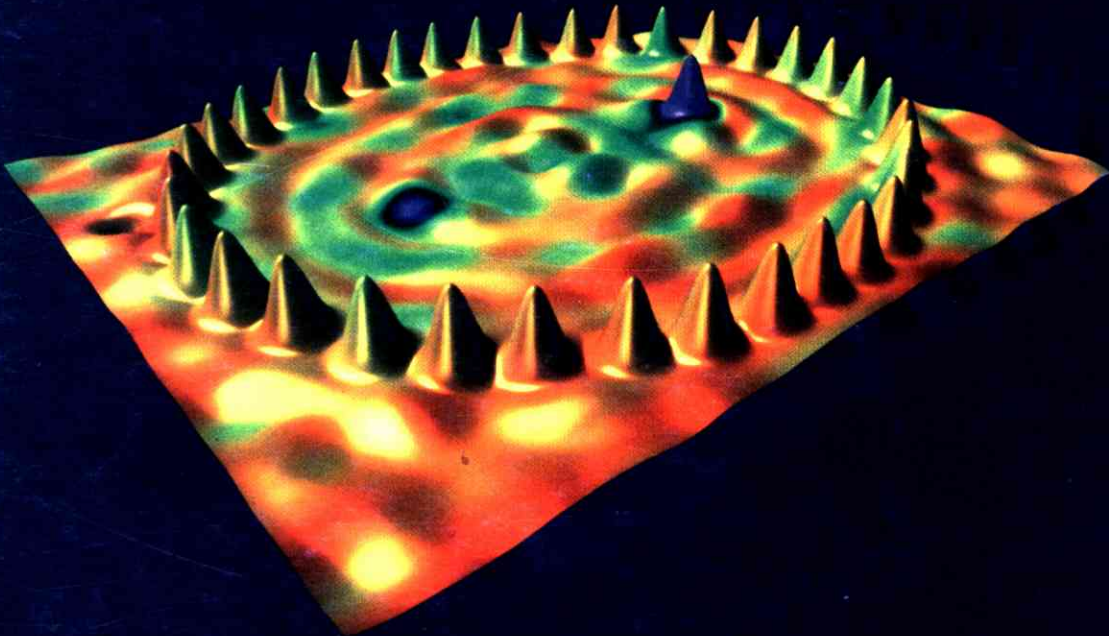


فیزیک

جلد سوم: الکتریسیته و مغناطیس

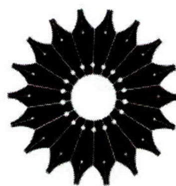
رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین

ویراست پنجم



ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی راد

KRANE
HALLIDAY
Physics Volume 3
KRANE



فیزیک

جلد سوم: الکتریسیته و مغناطیس

(ویراست پنجم)

رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین

ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۱۳۴۵

فیزیک
۱۴۰

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



مرکز نشر دانشگاهی

Physics
(Fifth Edition)
Volume 2
Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane

John Wiley & Sons 2002

فیزیک، ویراست پنجم

جلد سوم: الکتریسیته و مغناطیس

تألیف رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین

ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد

ویراستهٔ هوشنگ سپهری
طراح جلد: آرزو امینی
نسخه‌پرداز: مسعود رژدام، نازلین خسروی
حروفچین و صفحه‌آرا: مینا مهرابی‌فرد
ناظر چاپ: خشایار نصیری‌منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۸
چاپ دوم ۱۳۸۹
ویراست سوم ۱۳۶۶ (۲۰بار چاپ)
ویراست چهارم ۱۳۸۳ (۶بار چاپ)
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: وسمه
تعداد ۱۰۰۰۰
۹۷۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خبیری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فروش اینترنتی: http:\\eshop.iup.ir

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه : هالیدی، دیوید، ۱۹۱۶ ـ م. Halliday, David
عنوان و نام پدیدآور : فیزیک / رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کنت اس. کرین؛ ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد، منیژه رهبر.
مشخصات نشر : تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری : ۴ ج.: مصور، نمودار، جدول.
فروست : مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۷۲. ۱۳۴۵. فیزیک؛ ۱۳۱، ۱۴۰.
شابک : دوره: 978-964-01-8189-8؛ ج.۲: 978-964-01-1272-4؛ ج.۳: 978-964-01-1345-5
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا
یادداشت : فهرست نویسی بر اساس جلد دوم، ۱۳۸۷.
یادداشت : عنوان اصلی: Physics, 5th. Ed, c2002.
یادداشت : جلد سوم کتاب توسط جلال‌الدین پاشایی‌راد ترجمه شده است.
یادداشت : ج. ۳ (چاپ دوم: ۱۳۸۹) (فیپا).
یادداشت : نمایه
چاپ دوم: ۱۳۸۹.
مندرجات : ج. ۳. الکتریسیته و مغناطیس
موضوع : فیزیک
شناسه افزوده : رسنیک، رابرت، ۱۹۲۳ ـ م.
شناسه افزوده : Resnick, Robert
شناسه افزوده : کرین، کنت
شناسه افزوده : Krane, Kenneth S.
شناسه افزوده : پاشایی‌راد، جلال‌الدین، ۱۳۲۴ ـ ، مترجم
شناسه افزوده : رهبر، منیژه، ۱۳۲۴ ـ ، مترجم
شناسه افزوده : مرکز نشر دانشگاهی
رده‌بندی کنگره : QC ۲۱/۳/ ف ۹ ۱۳۸۰ ه ۲
رده‌بندی دیویی : ۵۳۰
شماره کتابشناسی ملی : ۱۵۲۸۲۲۲

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

پیشگفتار

این پنجمین ویراست کتابی درسی است که ابتدا در سال ۱۹۶۰ با عنوان فیزیک برای دانشجویان علوم و مهندسی تألیف دیوید هالیدی و رابرت رزنیک به چاپ رسید. این کتاب به مدت چهار دهه استانداردی برای دورهٔ درسی مقدماتی برمبنای حسابان بوده و به خاطر روشنی و کامل بودن مطالب ارائه‌شده شهرت داشته است. در ویراست فعلی تلاش کرده‌ایم، بدون قربانی کردن سطح یا جدی بودن محتوای کتاب، قابل فهم بودن آن را افزایش دهیم. کتاب به میزان قابل ملاحظه‌ای بازنویسی شده است تا مطالب به صورت هموارتری جریان داشته باشند و ورود دانشجویان به موضوعهای جدید راحت‌تر شود. کوشیده‌ایم مثالهای عملی بیشتری را در اختیار بگذاریم، و در هنگام معرفی موضوعهای جدید از مطالب خاص به عام برسیم.

در این ویراست، توجه به آموزش نقش مهمی در تغییرهای انجام‌شده و همین‌طور در ترتیب فصلها دارد. کسانی که با ویراست چهارم این کتاب آشنا هستند موضوعهای مشابه را با ترتیب تجدیدنظرشده خواهند یافت. در این تجدیدنظرها، از راهنمایی استفاده‌کنندگان ویراستهای قبلی بهره گرفته‌ایم و نتیجه‌های پژوهش در زمینهٔ آموزش فیزیک را منظور کرده‌ایم. برخی از تغییرهای انجام‌گرفته در این ویراست به قرار زیرند:

۱. به دلیل بازآرایی کتاب که منجر به حذف ۲ فصل از جلدهای قبلی شد، این جلد با فصل ۲۵ آغاز می‌شود (که نظیر فصل ۲۷ در ویراست چهارم است).

۲. دانشجویان برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای پیوستهٔ بار اغلب در انتگرال‌گیری روی این‌گونه توزیعها با مشکلاتی مواجه‌اند. این روش به لحاظ مفهومی مجرد و به لحاظ محاسباتی چالش‌برانگیز است. به‌منظور رفع سریعتر مشکلات مفهومی، در ابتدا این روش را برای نیروهای الکتریکی به‌کار می‌بندیم و نه برای میدانهای الکتریکی؛ مثلاً در فصل ۲۵، محاسبهٔ نیروی ناشی از بار خطی بر بار نقطه‌ای را مورد بحث قرار می‌دهیم. دانشجویان معمولاً استنباط فیزیکی بیشتری از نیروها دارند تا میدانها، و به این طریق می‌توانیم روش ریاضی را با محتوایی فیزیکی‌تر پی‌ریزی کنیم. بعداً این محاسبات را برای میدانها و پتانسیلها تکرار می‌کنیم. به همین دلایل، قضیه‌های مربوط به پوسته را در فصل ۲۵ با محتوای نیروها مطرح می‌کنیم، که با طرح همین قضیه در فصل ۱۴ برای نیروی گرانشی مشابهت دارد.

۳. مبحث مربوط به پراکندگی رادرفورد را از فصل مربوط به قانون گاؤس در ویراست پیشین به مبحث مربوط به میدانهای الکتریکی در فصل ۲۶ منتقل کرده‌ایم.

۴. در فصل ۲۷ (قانون گاؤس)، مبحث مربوط به ارتباط بین شار الکتریکی و خطهای میدان را توسعه داده‌ایم، و اکنون کاربردهای متداول قانون گاؤس در مورد توزیعهای پیوستهٔ بار را قبل از کاربردهای آن در رساناها بررسی و مطالعه می‌کنیم.

۵. فصل ۲۹ (خواص الکتریکی ماده) فصل جدیدی است که شامل مطالبی دربارهٔ رساناها و دی‌الکتریکها می‌شود. در ویراست پیشین این مطالب در دو فصل خازنها و جریانها مطرح شده بودند. بر این باوریم که این مطالب هرکدام جایگاه خود را دارد و با ارائهٔ آنها به این صورت به‌آسانی می‌توانیم رفتار رساناها و عایقها را در میدانهای الکتریکی با هم مقایسه کنیم.

۶. پژوهشهای آموزش فیزیک به‌طور سازگاری نشان می‌دهند که دانشجویان در درک رفتار مدارهای سادهٔ DC با مشکلات زیادی روبه‌رو می‌شوند. بنابراین در این ویراست ارائهٔ مطالب مربوط به این عنوان را گسترده‌تر کرده‌ایم، در حالی‌که به‌طور همزمان حجم مطالب مربوط به مدارهای چندحلقه‌ای و ابزارهای اندازه‌گیری را کاهش داده‌ایم.

۷. اکنون آشنایی با چشمه‌های میدان مغناطیسی (فصل ۳۳) را با ارائهٔ میدان ناشی از تک بار متحرک آغاز می‌کنیم و سپس موضوع را با میدان ناشی از جزء جریان ادامه می‌دهیم. این روش ما را قادر می‌سازد که تناظر بهتری با سبکی که میدانهای مغناطیسی را در فصل پیش از آن (فصل ۳۲) معرفی کردیم، برقرار کنیم (یعنی اول نیروی وارد بر تک بار متحرک را مطالعه می‌کنیم و سپس نیروی وارد بر جزء جریان را). همچنین اکنون روش محاسبهٔ مستقیم میدان محوری سیملوله را با استفاده از قانون بیو-ساوار، و قبل از تکرار محاسبات با بهره‌گیری از قانون آمپر، ارائه می‌دهیم.

۸. معرفی گشتاور دوقطبی مغناطیسی را تا فصل ۳۵ (خواص مغناطیسی ماده) به تأخیر انداخته‌ایم. این امر تا حدی به خاطر دوری جستن از انباشت مطالب جدید در اولین فصلی که دانشجویان با میدانهای مغناطیسی آشنا می‌شوند و نیز به خاطر فراهم آوردن رهیافتی هموارتر با معرفی دوقطبی مغناطیسی در مفهومی با بیشترین کاربرد مستقیم صورت گرفته است. در اینجا بحث مربوط به مغناطیس اتمی و هسته‌ای را تا حدودی به اختصار مطرح کرده‌ایم و ترجیح داده‌ایم که بحث مفصلتر در این باره را به فصلهای بعدتر و بعد از آشنایی با بعضی از مبانی ساختار اتمی همراه با اسپین الکترون موکول کنیم.

۹. فصلهای ۴۰، ۴۱، ۴۲ و ۴۳ ویراست پیشین را در قالب فصلهای ۳۸ و ۳۹ ویراست جدید آورده‌ایم. فصل ۳۸، اکنون معادله‌های ماکسول و کاربردشان را در مورد امواج الکترومغناطیسی ارائه می‌دهد، مطالبی که در ویراست چهارم فصلهای ۴۰ و ۴۱ را در برمی‌گرفت. فصل ۳۹ خواص امواج نور، از جمله بازتاب و شکست را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهد و به این ترتیب مطالبی را در برمی‌گیرد که در ویراست قبلی محتوای فصلهای ۴۱، ۴۲ و ۴۳ را تشکیل می‌دادند. اکنون چگونگی تشکیل تصویر در آینهٔ تخت در فصل بعدی (فصل ۴۰) ارائه می‌شود، که به‌طور طبیعی خیلی مناسبتر در مبحث مربوط به تشکیل تصویر توسط آینه‌ها و عدسیها می‌گنجد.

۱۰. در ویراست چهارم، موضوعهای فیزیک جدید در سراسر کتاب، معمولاً در بخشهایی "پراکنده شده بودند" که با عنوان "اختیاری" مشخص می‌شوند. در این ویراست به استفاده از مثالهای فیزیک جدید در سراسر کتاب ادامه داده‌ایم، اما بخشهای جداگانهٔ مربوط به فیزیک جدید را در فصلهای ۴۵ تا ۵۲ (که به موضوعهای فیزیک کوانتومی و کاربرد آن در اتمها، جامدها، و هسته‌ها می‌پردازد) گرد آورده‌ایم. ما جداً باور داریم که نسبیت و فیزیک کوانتومی بخشهای ضروری دورهٔ درسی مقدماتی در این سطح هستند، اما ارائهٔ منسجم و یکپارچهٔ این موضوعها بهتر از مجموعه‌ای از نمایشهای منزوی حق این مطالب را ادا می‌کند. مانند ویراست چهارم، فصل مربوط به نسبیت خاص را همچنان در بین فصلهای مکانیک کلاسیک قرار داده‌ایم، که باور جدی ما را به تعلق مستقیم نسبیت خاص به فصلهای سینماتیک و مکانیک فیزیک کلاسیک نشان می‌دهد. فصلهای ۴۵ تا ۴۸ که فیزیک کوانتومی و کاربردهای آن در اتمها را بررسی می‌کند، عمدتاً از ویراست چهارم بازنویسی شده‌اند. فصل ۴۵ آزمایشهای متداول اولیه‌ای را ارائه می‌دهد که حاکی از خواص ذره‌گونهٔ تابش الکترومغناطیسی (تابش گرمایی، اثر فوتوالکتریک، پراکندگی کامپتون) هستند. اما شواهد انکارناپذیر مربوط به دوگانگی ذره-موج نور فقط از آزمایشهای جدید تأخیری حاصل می‌شوند، که آنها را هم‌اکنون در فصل ۴۵ بررسی می‌کنیم. مبانی نظریهٔ شرودینگر را اکنون در فصل ۴۶ مطالعه می‌کنیم، و کاربردهای تفصیلی آن در مورد چاههای پتانسیل و اتم هیدروژن را در فصل ۴۷ مورد بررسی قرار می‌دهیم. فصل ۴۸، که به ساختار اتمی می‌پردازد، با فصل ۵۲ در ویراست چهارم شباهت دارد که در اینجا مطالب جدیدی نیز دربارهٔ مغناطیس اتمی بدان افزوده شده است.

مواد پایان فصلهای این ویراست با ویراست قبلی تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد. مجموعهٔ مسائل قبلی (که همه با بخشهای متناظر در فصل نشانه‌گذاری شده بودند) به دقت ویرایش شده و در دو گروه تمرینها و مسئله‌ها قرار گرفته‌اند. تمرینها، که با بخشهای متناظر در فصل نشانه‌گذاری شده‌اند، معمولاً نشانگر کاربردهای مستقیم مواد موجود در بخشهای مربوط‌اند. هدف آنها معمولاً کمک به آشنا کردن دانشجویان با مفاهیم، فرمولهای مهم، یکاها، ابعاد، و مانند آن است. مسئله‌ها، که با بخشهای فصل نشانه‌گذاری نشده‌اند، اغلب به استفادهٔ مفاهیم بخشهای مختلف یا حتی فصلهای قبل نیاز دارند. بعضی از مسائل از دانشجویان می‌خواهند تا داده‌های لازم برای حل مسئله را برآورد یا حتی آنها را مستقلاً پیدا کند. در ویرایش و گروه‌بندی مسئله‌ها، بعضی از مسئله‌های ویراست قبل را حذف کرده‌ایم. در سال آینده یک متمم مسئله عرضه خواهد شد که شامل اغلب مسئله‌های حذف‌شده و نیز گزیده‌ای از تمرینها و مسئله‌های جدید است. مانند قبل، پاسخ به تمرینها و مسئله‌های فرد

درکتاب داده شده است و پاسخ تمرینها و مسئله‌های زوج را می‌توان در راهنمای مدرس مربوط به این کتاب یافت.

پرسشهای چندگزینه‌ای و مسئله‌های کامپیوتری نیز به مواد پایان فصل افزوده شده‌اند. سرشت پرسشهای چندگزینه‌ای عموماً مفهومی است و اغلب بصیرتی فوق‌العاده در مورد مطالب را طلب می‌کند. پاسخ پرسشهای چندگزینه‌ای را می‌توان درکتاب راهنمای مدرس یافت. حل مسئله‌های کامپیوتری ممکن است نیازمند آشنایی با روشهای صفحهٔ گسترده یا کار با برنامه‌های نمادین مانند Maple یا Mathematica باشد.

تلاش کرده‌ایم یک کتاب درسی به‌وجود آوریم که تا حد امکان مرورکامل و دقیقی را از فیزیک پایه در این سطح ارائه دهد. با این همه، باید تأکید کنیم که به‌ندرت ممکن است مدرسانی بخواهند (اگر اصلاً چنین مدرسانی وجود داشته باشند) تمام محتوای کتاب را از آغاز تا پایان، به‌ویژه در دوره‌ای یکساله، دنبال کنند. از آن‌رو مسیرهای میان‌بُر متفاوتی در این کتاب وجود دارد. مدرسی که بخواهد موضوعهای کمتری را با عمق بیشتری آموزش دهد (که معمولاً آن را رهیافت "کمتر بیشتر است" می‌نامند) می‌تواند مسیر مورد نظر خودش را از بین این مسیرها انتخاب کند. برخی بخشها یا زیربخشها صراحتاً با برچسب "اختیاری" مشخص شده‌اند که نشان می‌دهند می‌توان بدون از دست‌رفتن پیوستگی موضوع، نخوانده از آنها رد شد. بسته به چگونگی طرح درس، از برخی بخشها یا حتی تمامی برخی از فصلها می‌توان نخوانده گذشت یا آنها را به اختصار مطالعه کرد. درکتاب راهنمای مدرس، که به‌عنوان یک جلد کتاب جداگانهٔ مرتبط موجود است، توصیه‌هایی برای چگونگی خلاصه کردن پوشش کتاب مطرح شده است. با وجود این، ارائهٔ کامل مباحث درکتاب وجود دارد که دانشجویان کنجکاو می‌توانند به آن رجوع کنند و با مطالعهٔ بخشهای حذف‌شده دیدگاه گسترده‌تری از موضوع به‌دست آورند. امیدواریم که کتاب به‌عنوان "نقشهٔ راه" در فیزیک در نظر گرفته شود؛ جاده‌های بسیار خوش‌منظره یا مستقیم را می‌توان انتخاب کرد و لازم نیست که در اولین سفر از همهٔ جاده‌ها استفاده کنیم. ممکن است که مسافر مشتاق تشویق شود به نقشه برگردد و مناطقی را که در سفرهای قبلی از دست‌داده دوباره مورد جستجو قرار دهد.

۲۵

بار الکتریکی و قانون کولن

در اینجا مطالعهٔ دقیق و مفصل الکترومغناطیس را آغاز می‌کنیم، که در بخش اعظم بقیهٔ این کتاب ادامه خواهد یافت. نیروهای الکترومغناطیسی در ساختار اتمها و در پیوند اتمها در مولکولها و جامدات مؤثرند. بسیاری از خواص مواد که تاکنون مطالعه کرده‌ایم سرشت الکترومغناطیسی دارند، که کشسانی جامدات و کشش سطحی مایعات از آن جمله‌اند. نیروی فنر، اصطکاک و نیروی عمود بر سطح تماس، همه، از نیروی الکترومغناطیسی بین اتمها سرچشمه می‌گیرند.

در بین مثالهای پدیدهٔ الکترومغناطیس که بررسی خواهیم کرد می‌توان به نیروی بین بارهای الکتریکی، مانند آنچه بین الکترون و هسته در یک اتم وجود دارد؛ حرکت یک جسم باردار تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی، مانند حرکت یک الکترون در یک باریکهٔ نوسان‌نما؛ شارش بارهای الکتریکی در مدارها و رفتار اجزای مدارها؛ نیروی بین آهنرباهای دائمی و خواص مواد مغناطیسی؛ و تابش الکترومغناطیسی اشاره کرد، که سرانجام به مطالعهٔ اپتیک، و سرشت انتشار نور می‌انجامد.

این فصل را با بحث دربارهٔ بار الکتریکی، برخی از خواص اجسام باردار و نیروی الکتریکی بنیادی بین دو جسم باردار آغاز می‌کنیم.

۲۵ـ۱ الکترومغناطیس: مقدمه

وجوه اشتراک سه پدیدهٔ زیر کدام است؟

۱. کلید چراغ را در اتاقتان روشن می‌کنید. مصرف سوخت در نیروگاه انرژی الکترومغناطیسی تولید می‌کند. این کار با چرخاندن حلقه‌ای از سیم رسانای الکتریکی در نزدیکی یک مغناطیس صورت می‌گیرد. سرانجام قسمتی از این انرژی به الکترونهای موجود در رشتهٔ لامپ اتاق شما منتقل می‌شود، که انرژی الکتریکی را به نور مرئی تبدیل می‌کند.

۲. دستوری را روی صفحهٔ کلید کامپیوترتان وارد می‌کنید. جویباری از الکترونها تشکیل می‌شود تا دستور شما را منتقل کند. چندین هزار مسیر ممکن برای الکترونها در مدارهای کامپیوتر وجود دارد، ولی اغلب آنها به‌وسیلهٔ دریچه‌های الکترونیکی بسته‌اند. الکترونها فقط می‌توانند از دریچه‌هایی عبور کنند که بنابر دستور شما باز شده‌اند به‌طوری که باریکهٔ الکترونها به مقصدشان می‌رسند و فرمان شما اجرا می‌شود.

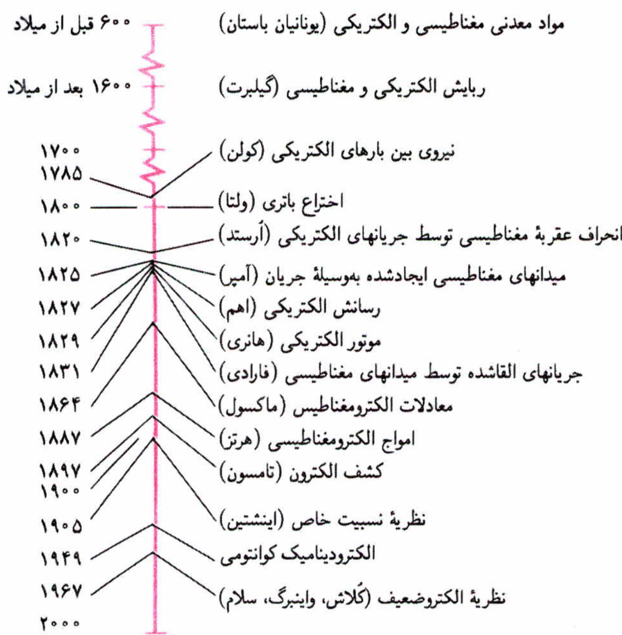
۳. دکمهٔ انتخاب کانال را روی دستگاه کنترل از راه دور تلویزیون خود فشار می‌دهید. امواج الکترومغناطیسی از دستگاه کنترل از راه دور به گیرنده‌ای در داخل تلویزیون می‌رسد، که به‌وسیلهٔ آن تلویزیون برای دریافت امواج الکترومغناطیسی دیگری تنظیم می‌شود که از ماهوارهٔ گردنده به دور زمین در ارتفاع زیاد سرچشمه می‌گیرد. امواجی که از ماهواره به دستگاه تلویزیون می‌رسند، دستورهایی را فراهم می‌آورند

که دستگاه با استفاده از نیروهای الکتریکی و مغناطیسی باریکه‌ای از الکترونها را متمرکز و هدایت می‌کند تا به صفحهٔ نمایش لامپ تصویر برخورد کرده تصویری مرئی به‌وجود آورد.

عامل مشترک بین این پدیده‌های گوناگون، آن است که همهٔ آنها به نیروهایی وابسته‌اند که آنها را با عنوان الکتریکی یا مغناطیسی توصیف می‌کنیم. این نیروها برای کنترل و هدایت جریان انرژی یا ذرات به‌کار می‌روند. این نیروها اساس مطالعهٔ پدیدهٔ الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهند. در مطالعهٔ این مبحث در خواهیم یافت که تمام آثار الکترومغناطیسی را می‌توان به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای متشکل از چهار معادلهٔ بنیادی تشریح کرد که به آنها معادلات ماکسول می‌گوییم. این معادلات قوانین منفرد الکترومغناطیس را نشان می‌دهند، درست به همان صورت که قبلاً معادلاتی را مورد بحث قرار داده‌ایم که قوانین مکانیک نیوتون یا قوانین ترمودینامیک را نمایش می‌دادند.

مطالعات خود را ابتدا با بررسی پدیدهٔ الکتریسیته شروع می‌کنیم و سپس با پدیدهٔ مغناطیس ادامه می‌دهیم. بعداً نشان خواهیم داد که این دو پدیده را نمی‌توان از هم جدا کرد؛ بعضی از پدیده‌های الکتریکی آثار مغناطیسی به‌وجود می‌آورند، و برخی از پدیده‌های مغناطیسی آثار الکتریکی ایجاد می‌کنند. این ارتباط ما را و به وحدت بخشیدن پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی هدایت می‌کند که آن را با نام مشترک الکترومغناطیس می‌خوانیم. پیدایش قوانین الکترومغناطیس و وحدت بخشیدن آنها پیروزی بسیار بزرگ فیزیک قرن نوزدهم بود. کاربرد این قوانین مستقیماً منجر به پدیدآمدن گسترهٔ وسیعی از ابزارهای کاربردی، مانند موتورها، رادیو و تلویزیون، رادار، اجاقهای میکروویو، و تلفنهای همراه شد.

گسترش نظریهٔ الکترومغناطیس، در قرن بیستم، با سه پیشرفت بسیار قابل توجه، ادامه یافت. در سال ۱۹۰۵، آلبرت اینشتین نشان داد که، برای یک ناظر متحرک، اثرهای الکتریکی ممکن است به‌صورت پدیده‌های مغناطیسی جلوه کنند، و از آن‌رو امکان دارد بین ناظرانی که نسبت به‌هم در حرکت‌اند، عدم توافق در مورد اندازه‌گیریهای مرتبط با مسائل الکتریکی یا مغناطیسی پیش بیاید. این نتیجه‌گیری اساس نظریهٔ نسبیت خاص را به‌وجود آورد که سرانجام برداشت ما از مفاهیم فضا و زمان را دستخوش انقلاب کرد. تحول دومی که در این زمینه رخ داد عبارت بود از معرفی نظریهٔ الکترومغناطیس، که به آن الکترودینامیک کوانتومی می‌گوییم. این نظریه در حوالی سال ۱۹۴۹ به بار نشست و فیزیکدانان را قادر ساخت که خواص اتمها را با دقتی باورنکردنی محاسبه کنند، به‌طوری که این دقت در زمان حاضر به ۱۱ رقم بامعنی



شکل ۲۵ـ۱ مقیاس زمانی پیشرفتهای اصلی الکترومغناطیس.

ارتقا یافته است. سومین پیشرفتِ نظریهٔ الکترومغناطیس در قرن بیستم عبارت بود از وحدت‌بخشیدن الکترومغناطیس با یک نیروی دیگر، به نام "نیروی ضعیف". نیروی ضعیف عامل برخی از فرایندهای واپاشی مواد پرتوزا و بعضی از برهم‌کنشهای بین ذرات است. درست به همان صورت که آثار الکتریکی و مغناطیسی در برهم‌کنش الکترومغناطیسی وحدت یافتند، آثار الکترومغناطیسی و ضعیف در سالهای دههٔ ۱۹۶۰ در برهم‌کنش الکتروضعیف به وحدت رسیدند. اما در حوزهٔ مطالعهٔ ما دربارهٔ نیروهای الکتریکی و مغناطیسی، برهم‌کنش الکتروضعیف هیچ نتیجهٔ جدیدی ارائه نمی‌دهد، و مناسب‌تر است که برهم‌کنش الکترومغناطیسی را جداگانه مورد بررسی قرار دهیم.

در شکل ۲۵ـ۱ مقیاس زمان مربوط به برخی از رویدادهای اصلی در گسترش درک ما از الکترومغناطیس را ترسیم کرده‌ایم.

۲۵ـ۲ بار الکتریکی

پس از آنکه یک شانهٔ پلاستیکی را چند بار از میان موهای سرتان گذراندید، درمی‌یابید که شانه به هر یک از تارهای موی شما نیرو وارد می‌کند. همچنین ممکن است مشاهده کنید که، چنانچه تار موی شما به سمت شانه کشیده شد و در تماس با آن قرار گرفت، دیگر ربایشی بین آنها وجود ندارد.

منطقی به نظر می‌رسد چنین نتیجه‌گیری کنیم که ربایش بین شانه و مو حاصل یک جوهر فیزیکی است که بر اثر مالش از یکی به دیگری

منتقل می‌شود، و همین جوهر فیزیکی وقتی دو جسم در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند به‌جای اولش باز می‌گردد تا ربایش را خنثی کند. این جوهر فیزیکی را بار الکتریکی می‌نامیم، و امروزه این انتقال را چنین درک می‌کنیم که می‌توان الکترونها را از اتمهای یک جسم برداشت و آنها را به اتمهای جسم دیگر چسباند.

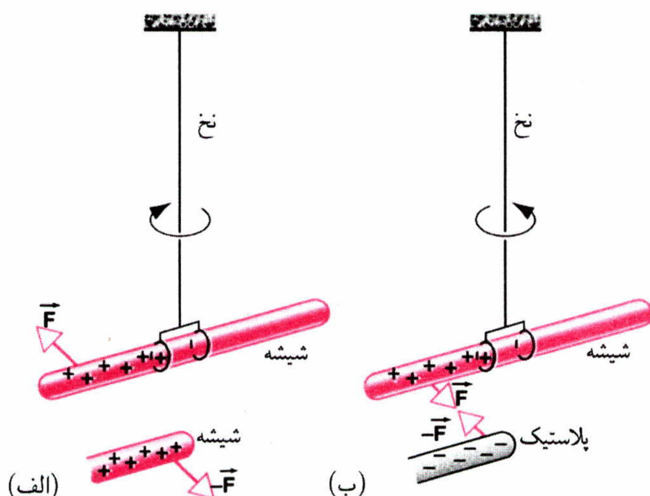
انتقال بار الکتریکی بر اثر مالش یک پدیدهٔ مشهود و متداول است. این پدیده توسط یونانیان باستان شناخته شده بود، آنها مشاهده کرده بودند که وقتی یک قطعه کهربا را با پوست مالش می‌دادند، می‌توانست قطعات کوچک کاه را برباید. وقتی روی قالی راه می‌روید و به هنگام تماسِ دستتان با دستگیرهٔ فلزی دچار گزش می‌شوید، یا وقتی که آذرخشی بین ابر و زمین کشیده می‌شود، شما شاهد وقوع آثار این‌گونه انتقال بار هستید.

وقتی که جسمی را "باردار" می‌کنیم (یعنی، وقتی باری را به جسمی منتقل می‌کنیم)، درمی‌یابیم که این جسم می‌تواند نیرویی به جسم دیگر وارد کند. مشاهدات اولیه، که این نیرو ممکن است ربایشی یا رانشی باشد، منجر به این نتیجه شد که باید دو نوع بار الکتریکی وجود داشته باشد که آنها را بارهای مثبت و منفی نامیدیم.*

گرچه آثار ناشی از انتقال بار ممکن است پرقدرت باشد، شگفت‌آور است که این آثار از انتقال کسر بسیار کوچکی از بار الکتریکی موجود در جسم سرچشمه می‌گیرد. مواد معمولی از اتمها یا مولکولهای خنثی ساخته شده‌اند که حاوی مقدار مساوی بار مثبت (هسته) و بار منفی (الکترونها) هستند. وقتی دو جسم را به‌هم مالش می‌دهیم، تعداد نسبتاً کمی الکترون از اتمهای یک جسم به جسم دیگر منتقل می‌شود؛ اغلب الکترونها دست‌نخورده باقی می‌مانند. این عدم توازن بسیار کوچک بین مقادیر بسیار بزرگ ولی برابر بارهای مثبت و منفی در یک جسم است که سبب ایجاد متداول‌ترین آثار مشهود الکتریکی می‌شود.

وقتی یک میلهٔ پلاستیکی را با یک تکه پوست مالش دهیم، الکترونها به میله منتقل می‌شوند؛ چون میله دارای الکترونهای اضافی است (که بار منفی حمل می‌کند) دارای بار منفی می‌شود. حالا پوست با کمبود الکترون مواجه است، و در نتیجه دارای بار مثبت است. می‌توانیم ربایش هر یک از رشته‌های پوست را به‌وسیلهٔ میله مشاهده کنیم، که ناشی از بارهایی است که روی هر یک از آن دو وجود دارد. به‌صورتی مشابه، می‌توانیم یک میلهٔ شیشه‌ای را به‌وسیلهٔ یک تکه

* برچسبهای مثبت و منفی برای بارهای الکتریکی به‌صورت دلخواه توسط بنیامین فرانکلین (۱۷۰۶ تا ۱۷۹۰) انتخاب شدند که فضایل بسیار داشت و دانشمندی با شهرت و اعتباری جهانی بود. درواقع، احتمالاً اعتبار علمی فرانکلین بوده است که در خلال جنگهای استقلال امریکا سبب موفقیتهای دیپلماسی او در فرانسه شده است.



شکل ۲۵ـ۲ (الف) دو میله که به‌طور یکسان باردار شده‌اند یکدیگر را دفع می‌کنند. (ب) دو میله که بارهای مخالف دارند یکدیگر را جذب می‌کنند.

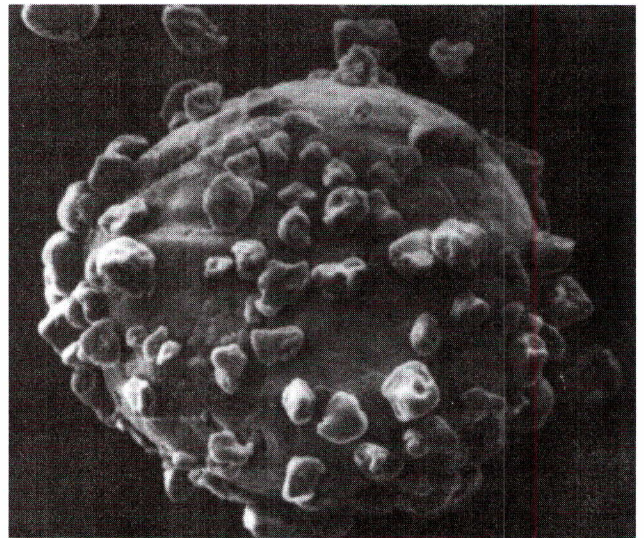
ابریشم مالش دهیم و مشاهده کنیم که هر دوی آنها باردار شده‌اند و می‌توانند یکدیگر را بربایند. در هر یک از این دو مورد، تعداد نسبتاً کمی الکترون را منتقل کرده‌ایم و خنثایی الکتریکی این اجسام را برهم زده‌ایم.

حالا یک میلهٔ شیشه‌ای را با مالش دادن یک تکه ابریشم به یک انتهای آن باردار می‌کنیم و آن را مطابق شکل ۲۵ـ۲ از یک رشته نخ می‌آویزیم. اگر یک میلهٔ شیشه‌ای را که به همین صورت باردار شده است در نزدیکی میلهٔ آویخته‌شده قرار دهیم، در می‌یابیم که دو میله همدیگر را دفع می‌کنند (شکل ۲۵ـ۲(الف)) و از هم دور می‌شوند. اما، اگر یک میلهٔ پلاستیکی باردارشده را (که با مالش پوست باردار شده است) به نزدیکی آن بیاوریم، دو میله یکدیگر را جذب می‌کنند (شکل ۲۵ـ۲(ب)).

وجود دو نوع نیرویی را که در بالا مشاهده کردیم برحسب دو نوع بار توضیح می‌دهیم. وقتی پلاستیک را با پوست مالش می‌دهیم، الکترونها به پلاستیک منتقل می‌شوند و میلهٔ پلاستیکی دارای بار منفی می‌شود. وقتی شیشه را با ابریشم مالش می‌دهیم، الکترونها به ابریشم منتقل می‌شوند، شیشه با کمبود الکترون مواجه شده و در نتیجه دارای بار خالص مثبت می‌شود. نیروهای مشاهده‌شده در شکل ۲۵ـ۲ را می‌توان در قاعدهٔ زیر به‌طور خلاصه معرفی کرد:

> بارهای الکتریکی همنام یکدیگر را می‌رانند، و بارهای الکتریکی ناهمنام همدیگر را می‌ربایند.

در بخش ۲۵ـ۴، این قاعده را به‌صورت قانون نیروی کولن، به‌صورت کمّی در می‌آوریم. در اینجا فقط بارهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم



شکل ۲۵ـ۳ یک گوی حامل در یک دستگاه فتوکپی زیراکس، پوشیده از ذرات تونر که بر اثر جاذبهٔ الکتروستاتیکی به گوی چسبیده‌اند. قطر گوی در حدود ۳ر۰ mm است.

که یا نسبت به‌هم ساکن‌اند و یا با سرعت خیلی کمی حرکت می‌کنند، محدودیتی که موضوع علم الکتروستاتیک را تعریف می‌کند.

نیروهای الکتریکی بین اجسام باردار کاربردهای صنعتی فراوانی دارد که از آن میان می‌توان به رنگ‌پاشی و اندودکردن اجسام با پودر به‌صورت الکتروستاتیکی، رسوبدهی، چاپ با مرکب بدون تماس و فتوکپی کردن اشاره کرد. برای مثال، شکل ۲۵ـ۳، گوی کوچک حاملی را در یک دستگاه فتوکپی نشان می‌دهد، که پوشیده از ذرات یک پودر به نام تونر است، تونر با نیروهای الکتروستاتیکی به گوی حامل چسبیده است. ذرات تونر دارای بار منفی را، سرانجام، یک تصویر نهان دارای بار مثبت از مدرکی که قرار است کپی شود، جذب می‌کند. این تصویر نهان روی یک استوانهٔ چرخان تشکیل می‌شود. سپس یک برگ کاغذ باردار ذرات تونر را از استوانه به خود جذب می‌کند و این ذرات به کمک گرما در محل مورد نظر قرار می‌گیرند تا تصویر یا کپی نهایی را به‌وجود آورند.

بار الکتریکی خالص هر جسم معمولاً با نماد q نمایش داده می‌شود. بار الکتریکی یک کمیت نرده‌ای است. بار الکتریکی ممکن است مثبت یا منفی باشد، که مثبت یا منفی بودن آن بستگی دارد به اینکه بار خالص جسم چه علامتی داشته باشد. بار الکتریکی را برحسب یکای کولن (C) اندازه‌گیری می‌کنیم. کولن یکای بسیار بزرگی از بار است؛ و در حدود ۶×۱۰^{۱۸} الکترون لازم است تا یک کولن بار تشکیل دهد.

کولن را نمی‌توان از یکاهای تعریف‌شدهٔ قبلی به‌دست آورد. نظر به اینکه بار الکتریکی یک کمیت جدید است، این آزادی عمل را داریم که یکای اصلی آن را به هر دو روش مناسبی تعریف کنیم. یکی از روشهای ممکن، عبارت است از تعریف بار برحسب نیروی مؤثر بین دو بار استاندارد که در فاصلهٔ معینی از یکدیگر قرار دارند، مانند مقدار باری که بر یک بار مشابه که در فاصلهٔ یک متری از آن قرار دارد نیروی یک نیوتون را وارد کند. ولی، اندازه‌گیری نیروی بین بارهای ساکن کاری دشوار است، و از آن‌رو، در عمل، بهتر است که کولن را برحسب نیروی مغناطیسی بین سیمهای حامل جریان تعریف کنیم (این موضوع را در فصل ۳۳ مورد بحث قرار داده‌ایم). این نیرو را می‌توانیم با دقت خیلی بیشتری از نیروی بین بارهای ساکن اندازه‌گیری کنیم. بنابراین مناسب‌تر است که یکای مبنای SI را برحسب جریان (آهنگ شارش بار الکتریکی در واحد زمان) تعریف کنیم. در آن صورت کولن به عنوان یکای بار الکتریکی یک یکای فرعی است، که از یکاهای اصلی جریان و زمان به‌دست آمده است (پیوست الف را ببینید).

بار الکتریکی کوانتیده است

وقتی که بار الکتریکی را از یک جسم به جسم دیگر منتقل می‌کنیم، امکان انتقال یکاهای کوچک دلخواه وجود ندارد. یعنی، شارش بار به‌صورت یک جریان، یک شارش پیوسته نیست، بلکه از اجزای گسسته‌ای تشکیل شده است.* آزمایش نشان می‌دهد که بار الکتریکی همواره فقط از مقادیری تشکیل شده است که مضربهای درستی از یک کمیت بنیادی معین بار، یعنی e، هستند. یعنی داریم

$$q = ne \qquad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۳, \cdots \qquad (۲۵\text{ـ}۱)$$

که در اینجا بار (e) (تا چهار رقم بامعنی) چنین است:

$$e = ۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۹} \mathrm{C}$$

بار بنیادی e از ثابتهای بنیادی طبیعت است که مقدار تجربی آن با عدم قطعیت ۴ قسمت در $۱۰^{۸}$ قسمت معین شده است.

الکترون و پروتون نمونه‌هایی از ذرات متداولی هستند که هر کدام حامل یک بار بنیادی‌اند. الکترون دارای بار $-e$ است و پروتون بار $+e$ دارد. بعضی از ذرات، مانند نوترون، حامل هیچ بار الکتریکی خالصی نیستند. مشخص شده است که بعضی از ذرات بنیادی دیگر حامل مضربهای کوچکی از e هستند، معمولاً ± ۱، ± ۲، یا ± ۳. هر ذره‌ای

* در روزگار فرانکلین، بار الکتریکی را به‌صورت یک ماده در نظر می‌گرفتند و می‌پنداشتند که مانند یک شارهٔ پیوسته جاری می‌شود. ولی اکنون می‌دانیم که شاره‌ها از اتمها و مولکولهای منفرد تشکیل شده‌اند، یا به عبارتی ماده گسسته است. به‌صورتی مشابه «شارهٔ الکتریکی» نیز پیوسته نیست بلکه گسسته است.

یک پادذرهٔ متناظر با خود دارد، که جرمش با خود ذره برابر است ولی بار الکتریکی آن مخالف است؛ پادالکترون، که آن را با نام پوزیترون می‌شناسیم، دارای بار $+e$ است. پادذره‌ها به‌طور متداول در طبیعت وجود ندارند، بلکه آنها را می‌توان در واپاشیها و واکنشهای هسته‌ای و ذرات بنیادی به‌وجود آورد.

معادلهٔ (۲۵ـ۱) نشان می‌دهد که می‌توان، ذره‌ای یافت که، به‌عنوان مثال، حامل بار $+10e$ یا $-6e$ باشد ولی هرگز نمی‌توان ذره‌ای با بار $3{,}57e$ در طبیعت پیدا کرد. هرگاه مقادیر مربوط به یک خاصیت اجسام به مضربهای گسسته‌ای از یک کمیت بنیادی محدود شده باشد، می‌گوییم که آن خاصیت کوانتیده است.

نظر به اینکه بار بنیادی کوچک است، در شرایط عادی از ماهیت گسستهٔ شارش بار آگاه نمی‌شویم. به‌عنوان مثال، در یک سیم مداری الکترونیکی که جریانهای میلی‌آمپری جریانهایی نوعی هستند، در هر ثانیه از هر سطح مقطع سیم 6×10^{15} الکترون می‌گذرد!

اتمها در شرایط عادی از نظر بار الکتریکی خنثی هستند و این بدان معناست که اتمها حاوی تعداد مساوی بار مثبت و منفی‌اند. هستهٔ هر اتم حاوی Z پروتون است (که Z را عدد اتمی آن اتم می‌خوانیم) و از آن‌رو حاوی بار $+Ze$ است. در یک اتم خنثی، تعداد Z الکترون با بار منفی گرد هسته می‌چرخند. اغلب این امکان وجود دارد که یک یا چند الکترون از یک اتم برداریم، و یونی ایجاد کنیم که حاوی بار اضافی مثبت $+e$، $+2e$، $\cdots$ باشد. مثلاً، اگر می‌توانستیم تمام الکترونهای یک اتم اورانیم ($Z = 92$) را برداریم، در آن صورت یک ذره به‌وجود آورده بودیم که بار الکتریکی آن $+92e$ بود. در شرایط معینی، می‌توانیم یک الکترون را به یک اتم خنثی بچسبانیم، و یونی با بار منفی ایجاد کنیم.

با آنکه باور داریم که الکترونها ذراتی بنیادی‌اند و هیچ زیرساختاری ندارند، پروتونها ذراتی بنیادی نیستند. آنها از جوهرهای بنیادی‌تری به نام کوارک ساخته شده‌اند. به کوارکها بارهای الکتریکی کسری $-1/3e$ و $+2/3e$ را نسبت داده‌ایم. هر پروتون از سه کوارک تشکیل شده است، دو کوارک با بار $+2/3e$ و یک کوارک با بار $-1/3e$، که حاصل‌جمع آنها بار خالص $+e$ است. شواهد تجربیِ وجود کوارکها در داخل پروتون بسیار قوی است (مثلاً، می‌توان شرایطی ایجاد کرد که الکترونهای پرانرژی از کوارکهای حامل بار کسریِ داخل پروتون پراکنده شوند)، ولی، هر چقدر هم سخت پروتونها را وادار به برخورد کنیم، هیچ کوارک آزادی مشاهده نخواهیم کرد. در نتیجه، تا به امروز هیچ ذرهٔ آزادی با بار کسری مشاهده نشده است. این واقعیت را می‌توان به این ترتیب درک کرد که نیروی ربایشی که یک کوارک بر کوارک دیگر وارد می‌کند با افزایش فاصلهٔ بین آنها افزایش می‌یابد. که این رفتار برخلاف نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی است که وقتی فاصلهٔ بین یک زوج از ذرات برهم‌کنش‌کننده افزایش می‌یابد، نیروی بین آنها، کاهش پیدا می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱ یک سکه، که از نظر الکتریکی خنثی است، حاوی مقدار یکسان بارهای الکتریکی مثبت و منفی است. اندازهٔ این بارهای مساوی چقدر است؟

حل. بار موجود در سکه، q، از رابطهٔ NZe به‌دست می‌آید. که در این عبارت N تعداد اتمهای موجود در سکه است و Ze عبارت است از مقدار بارهای مثبت و منفی موجود در هر اتم.

برای سادگی فرض می‌کنیم که سکه مسی باشد، که در این صورت تعداد اتمهای موجود در سکه، N، برابر است با $N_A\, m/M$ که در اینجا N_A ثابت آووگادرو است. جرم m سکه $3{,}11\ \text{g}$ و جرم M یک مول مس (که به آن جرم مولی می‌گوییم) $63{,}5\ \text{g}$ است. با بهره‌گیری از رابطهٔ بالا، نتیجه می‌گیریم

$$N = \frac{N_A m}{M} = \frac{(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{اتم/مول})(3{,}11\ \text{g})}{63{,}5\ \text{g/مول}}$$
$$= 2{,}95 \times 10^{22}\ \text{اتم}$$

هر اتم خنثی حاوی بار منفی Ze مربوط به الکترونها و همان مقدار بار مثبت است که به هستهٔ آن مربوط می‌شود. در اینجا e مقدار بار مربوط به هر الکترون است که برابر با $1{,}60 \times 10^{-19}\text{C}$ است، و Z عدد اتمی عنصر مورد مطالعه است. برای مس، Z برابر با ۲۹ است. در نتیجه، مقدار کل بار مثبت یا منفی موجود در یک سکه برابر است با

$$q = NZe = (2{,}95 \times 10^{22})(29)(1{,}60 \times 10^{-19}\text{C})$$
$$= 1{,}37 \times 10^{5}\text{C}$$

که این، بار الکتریکی فوق‌العاده زیادی است. برای مقایسه، مقدار باری را که می‌توانید به‌وسیلهٔ مالش روی یک میلهٔ پلاستیکی قرار دهید شاید در حدود 10^{-9}C باشد، که تقریباً 10^{14} مرتبه کوچکتر است. برای مقایسه‌ای دیگر، مدت ۱ تا ۲ روز طول می‌کشد تا بار $1{,}37 \times 10^{5}\text{C}$ از رشتهٔ تنگستن یک لامپ معمولی عبور کند. در مواد عادی بار الکتریکی بسیار زیادی وجود دارد.

۳_۲۵ رسانا و عایق

مواد را معمولاً براساس توانایی شارش الکترونها در داخل آنها طبقه‌بندی می‌کنند. در برخی از مواد، مانند فلزات، الکترونها می‌توانند به‌صورت نسبتاً آزاد حرکت کنند. این گونه مواد را رسانا می‌نامیم. الکترونهایی که در یک مکان از ماده به آن منتقل می‌شوند می‌توانند به آسانی در سرتاسر ماده حرکت کنند. آب لوله‌کشی و بدن انسان نمونه‌های دیگری از مواد رسانا هستند.

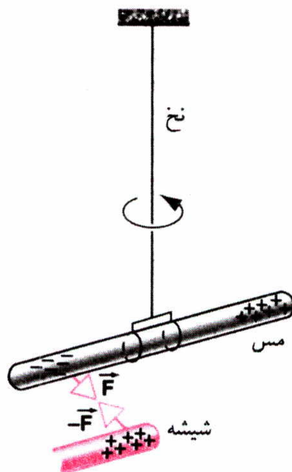
در سایر مواد، الکترونها اصلاً نمی‌توانند حرکت کنند. الکترونهایی که در یک مکان از ماده به آن انتقال داده شوند در همان مکان باقی می‌مانند. این گونه مواد را عایق می‌خوانیم. شیشه، پلاستیک، و بسیاری از مواد بلورین مانند NaCl نمونه‌هایی از مواد عایق‌اند.

اگر بخواهیم یک میله مسی را در دست نگه داشته با مالش دادن به یک تکه پوست باردار کنیم، موفق نخواهیم شد. ممکن است که الکترونها بر اثر اصطکاک از میله به پوست انتقال پیدا کنند، ولی الکترونهای دیگری به آسانی از طریق دستمان به میله وارد می‌شوند که جایگزین الکترونهای خارج‌شده خواهند شد. در نتیجه، بر اثر مالش هیچ‌گونه تجمع خالص بار الکتریکی در میله صورت نمی‌گیرد. می‌توانیم تصور کنیم که زمین یک چشمهٔ بی‌انتها از الکترونها باشد، که برخی از آنها به بدن شما وارد می‌شوند تا آنهایی را که از بدن شما به میلهٔ مسی انتقال یافته است جبران کنند. وقتی مسیری وجود دارد که از طریق آن الکترونها می‌توانند بین یک جسم و زمین شارش پیدا کنند، گفته می‌شود که آن جسم به زمین متصل شده است.

حال اگر به میلهٔ مسی یک دستهٔ پلاستیکی متصل شود، درمی‌یابیم که بر اثر مالش امکان تجمع بار روی آن وجود دارد. دستهٔ عایق مسیر شارش الکترونها بین میله و بدن شما را می‌بندد.

اتمهای منزوی در مواد رسانا مانند مس عموماً حاوی الکترونهایی هستند که پیوند سستی دارند و به آسانی می‌توان آنها را جدا کرد، و یک یون با بار مثبت بر جای گذاشت. وقتی اتمهای مس در کنار هم قرار می‌گیرند تا قطعه مس جامد را به‌وجود آورند، این الکترونها که پیوند سستی با هستهٔ اتم دارند دیگر متصل به اتمهای منفرد باقی نمی‌مانند و آزاد می‌شوند که در سرتاسر ماده پرسه بزنند. این الکترونهای آزاد را الکترونهای رسانش می‌خوانیم؛ در مس، به‌عنوان یک رسانای نوعی، در هر سانتی‌متر مکعب در حدود 10^{23} الکترون رسانش وجود دارد. یونهای دارای بار مثبت آزاد نیستند که حرکت کنند و در داخل ساختار شبکهٔ جامد مس ثابت باقی می‌مانند.

آزمایش شکل ۴_۲۵ قابلیت تحرک بار الکتریکی در یک رسانا را

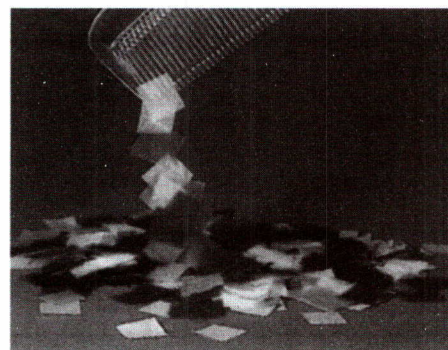


شکل ۴_۲۵ هر یک از دو سر یک میلهٔ مسی منزوی بدون بار به‌وسیلهٔ یک میلهٔ باردار، اعم از مثبت یا منفی، جذب می‌شود. در این حالت، الکترونهای رسانش موجود در میلهٔ مسی به طرف انتهای نزدیک به میلهٔ شیشه‌ای کشیده می‌شوند و انتهای دور از میلهٔ شیشه‌ای را با بار خالص مثبت بر جای می‌گذارند.

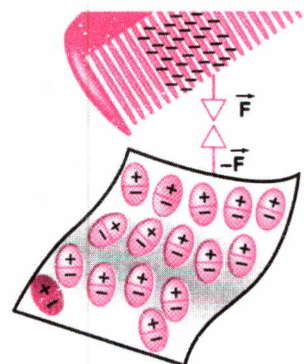
نشان می‌دهد. یک میلهٔ مسی بدون بار خالص به‌وسیلهٔ یک رشتهٔ نخ عایق آویخته شده است. وقتی یک میلهٔ شیشه‌ای دارای بار مثبت را به هر یک از دو انتهای میلهٔ مسی نزدیک کنیم، الکترونهای رسانش، آماده به حرکت، در میلهٔ مسی به‌وسیلهٔ بارهای مثبت روی میلهٔ شیشه‌ای جذب می‌شوند. شارش الکترونها به سمت انتهای نزدیک به میلهٔ شیشه‌ای سبب کمبود آن در انتهای دور از میلهٔ شیشه‌ای می‌شود و یک بار خالص مثبت در آن انتها بر جای می‌گذارد. انتهای دارای بار منفی میلهٔ مسی و انتهای با بار مثبت میلهٔ شیشه‌ای نیروهای ربایشی بر یکدیگر وارد می‌کنند. توجه داشته باشید که این مورد خیلی با مورد نشان داده شده در شکل ۲_۲۵ تفاوت دارد؛ در شکل ۴_۲۵ میلهٔ شیشه‌ای میلهٔ مسی را جذب می‌کند که حامل هیچ بار خالصی نیست. (همان‌طور که در بخش بعدی مورد بحث قرار خواهیم داد، نیروی الکتریکی به‌طور وارونه به فاصلهٔ بین دو بار وابسته است؛ بنابراین نیروی ربایشی بین شیشه و انتهای منفی میلهٔ مسی خیلی قویتر از نیروی رانشی بین شیشه و انتهای مثبت میلهٔ مسی است.)

اگر به‌جای میلهٔ شیشه‌ای با بار مثبت شکل ۴_۲۵ از یک میلهٔ پلاستیکی دارای بار منفی استفاده می‌کردیم، حاصل به همان صورت بود: یک نیروی ربایشی بین میلهٔ پلاستیکی و میلهٔ مسی. در این حالت میلهٔ پلاستیکی دارای بار منفی الکترونهای رسانش موجود در مس را دفع می‌کرد، و انتهای میلهٔ مسی نزدیک به میلهٔ پلاستیکی دارای بار مثبت می‌شد. در نتیجه بین انتهای منفی میلهٔ پلاستیکی و انتهای مثبت میلهٔ مسی یک نیروی ربایشی ایجاد می‌شد.

همچنین امکان دارد که بین یک جسم باردار و یک جسم عایق



(الف)



(ب)

شکل ۲۵ـ۵ (الف) یک شانهٔ دارای بار الکتریکی قطعات کوچک کاغذ را جذب می‌کند. (ب) شانهٔ دارای بار منفی بارهای موجود در مولکولها را قطبیده کرده، سبب ایجاد یک نیروی ربایشی بین شانه و قطعات ریز کاغذ می‌شود.

بدون بار یک نیروی ربایشی به‌وجود آید. در شکل ۲۵ـ۵(الف) یک شانهٔ باردار را نشان داده‌ایم که قطعات کوچک کاغذ بدون بار را جذب می‌کند. توضیح این‌گونه ربایش از ربایش بین میلهٔ شیشه‌ای و میلهٔ مسی متفاوت است. در این حالت، قطعات کاغذ عایق‌اند، و امکان ندارد که الکترونها را به یک انتهای کاغذ جمع کنیم (آن‌طور که در شکل ۲۵ـ۴ در مورد رسانا اتفاق می‌افتاد). در عوض، در اینجا الکترونهای مربوط به هر مولکول منفرد در قطعات ریز کاغذ توسط شانهٔ باردار دفع می‌شود، و در نتیجه الکترونها به‌صورت ترجیحی در سمتی از هر مولکول قرار می‌گیرند که دورتر از شانه است. در هر مولکول، انتهای مثبت (انتهایی که کمبود الکترون پیدا کرده است) به شانه نزدیکتر است و با نیروی قویتری به شانه جذب می‌شود. همین اثر سبب نیروی ربایشی خالصی بین شانه و قطعات کاغذ می‌شود (شکل ۲۵ـ۵(ب)). اگر شانه دارای بار مثبت هم باشد همین نیروی ربایشی به‌وجود می‌آمد.

جدا شدن بارهای مثبت و منفی در یک جسم منزوی تحت تأثیر یک جسم باردار را، که در نزدیکی آن قرارگرفته است، قطبش می‌گوییم. قطبش ممکن است در سطح ماکروسکوپی هم رخ دهد، مانند مورد میلهٔ مسی شکل ۲۵ـ۴ یا در سطح مولکولی، مانند مورد مطرح‌شده در شکل ۲۵ـ۵.

باردار کردن اجسام با تماس و با القا

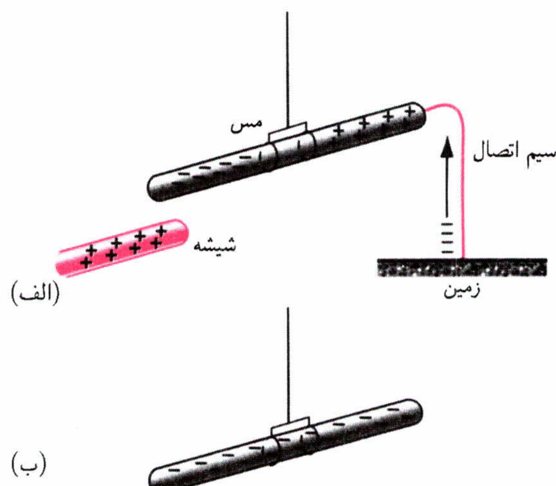
اکنون تصور کنید که میلهٔ شیشه‌ای دارای بار مثبت را با یک میلهٔ مسی بدون بار در تماس قرار می‌دهیم (شکل ۲۵ـ۶). الکترونها از مس جاری می‌شوند که بارهای مثبت روی میلهٔ شیشه‌ای را خنثی کنند. ولی، به دلیل اینکه الکترونها نمی‌توانند در داخل شیشه جاری شوند، فقط می‌توانند آن بارهای مثبتی را خنثی کنند که در نقطهٔ تماس با مس قرار دارند. برای اینکه الکترونهای بیشتری را از مس جدا کنیم، می‌توانیم میلهٔ شیشه‌ای را روی میلهٔ مسی "بکشیم"، و به این وسیله الکترونهایی را به نواحی تازه و خنثی‌نشدهٔ میلهٔ شیشه‌ای که به این ترتیب در تماس با مس قرار می‌گیرد منتقل کنیم (شکل ۲۵ـ۶(الف)). حال اگر میلهٔ شیشه‌ای را دور کنیم، میلهٔ مسی با کمبود الکترون باقی می‌ماند و در نتیجه دارای بار خالص مثبت است. الکترونها در سرتاسر مس جاری می‌شوند به‌طوری که بارهای مثبت (هسته‌های یونی) به‌طور یکنواخت در سرتاسر سطح میلهٔ مسی توزیع شوند. این انتقال مستقیم بار الکتریکی از یک جسم به جسم دیگر را باردار کردن از طریق تماس می‌گوییم. با آنکه، واقعاً این الکترونهای دارای بار منفی هستند که انتقال پیدا کرده‌اند، اغلب مناسب است تصور کنیم که در آزمایش شکل ۲۵ـ۶ این بارهای مثبت‌اند که از میلهٔ شیشه‌ای به مس انتقال یافته‌اند.



(الف)

(ب)

شکل ۲۵ـ۶ (الف) باردار کردن یک جسم از طریق تماس. الکترونها از میلهٔ مسی جاری می‌شوند تا بارهای مثبت موجود در نقطهٔ تماس با میلهٔ مسی را خنثی کنند. (ب) بار حاصل روی میلهٔ مسی پس از دور شدن میلهٔ شیشه‌ای.



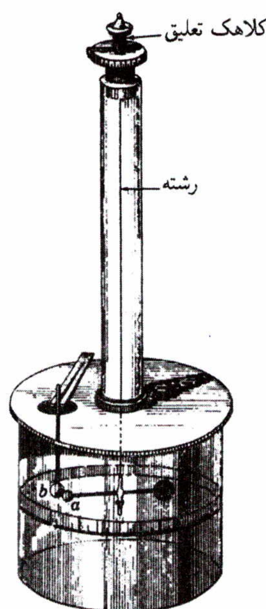
شکل ۲۵ـ۷ (الف) باردار کردن یک جسم به روش القا. الکترونها از زمین به سمت میلهٔ مسی جاری می‌شوند تا بارهای مثبت موجود در سر دورتر از میلهٔ شیشه‌ای را خنثی کنند. (ب) بار حاصل روی میلهٔ مسی پس از دور شدن میلهٔ شیشه‌ای.

بار دیگر به مورد نشان داده‌شده در شکل ۲۵ـ۴ بازمی‌گردیم. اگر بین انتهای دارای بار مثبت میلهٔ مسی و زمین یک سیم وصل کنیم (شکل ۲۵ـ۷(الف))، الکترونها از زمین به میلهٔ مسی جریان پیدا می‌کنند تا بارهای مثبت مس را خنثی کنند. اگر زمانی که میلهٔ شیشه‌ای در جای خودش در نزدیکی میلهٔ مسی قرار دارد سیم اتصال به زمین را قطع کنیم، میلهٔ مسی مقداری بار خالص منفی را در خود نگه می‌دارد. حال اگر میلهٔ شیشه‌ای را دور کنیم بارهای منفی چنان خودشان را روی سطح میلهٔ مسی توزیع می‌کنند (شکل ۲۵ـ۷(ب)) که در دورترین فاصله از همدیگر قرار بگیرند. این نحوهٔ باردار کردن اجسام را باردارکردن القایی می‌گوییم. توجه کنید که در اینجا با کاربرد میلهٔ شیشه‌ای با بار مثبت هم توانستیم با تماس به میلهٔ مسی بار مثبت انتقال دهیم و هم به‌وسیلهٔ القا بار منفی (از زمین) بدهیم.

۲۵ـ۴ قانون کولن

در این فصل تا به اینجا ثابت کردیم که دو نوع بار الکتریکی وجود دارد که بر یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. در این بخش هدف ما شناخت ماهیت این نیروست.

نخستین آزمایش کمّی موفق در مطالعهٔ نیروی بین بارهای الکتریکی توسط شارل آگوستین کولن (۱۷۳۶ تا ۱۸۰۶) صورت گرفت. کولن ربایش و رانش الکتریکی را اندازه‌گیری کرد و قانونی به‌دست آورد که این نیروها از آن پیروی می‌کردند. در اصل، ابزار کولن چیزی شبیه شکل ۲۵ـ۲ بود، جز آنکه او از کره‌های باردارشدهٔ کوچکی استفاده



شکل ۲۵ـ۸ ترازوی پیچشی کولن، از هدایای سال ۱۷۸۵ او به آکادمی علوم پاریس.

می‌کرد که در شکل ۲۵ـ۸ با نمادهای a و b نشان داده شده‌اند.

اگر گویهای a و b باردار شده باشند، نیروی الکتریکی وارد بر گوی a سبب پیچش رشتهٔ معلق می‌شود. کولن اثر این پیچش را با چرخاندن کلاهک تعلیق به اندازهٔ θ خنثی کرد تا دو جسم باردار را در فاصلهٔ مشخصی از یکدیگر نگه دارد. در این صورت زاویهٔ θ معیاری نسبی از نیروی الکتریکی وارد بر بار a است. ابزار شکل ۲۵ـ۸ یک ترازوی پیچشی است؛ بعدها کاوندیش ابزار مشابهی برای اندازه‌گیری جاذبهٔ گرانشی به‌کار برد (بخش ۱۴ـ۳).

آزمایشهای کولن و معاصرانش نشان داد نیروی الکتریکی که یک جسم باردار بر جسم باردار دیگر وارد می‌کند با حاصلضرب مقدار بار دو جسم نسبت مستقیم و با مجذور فاصلهٔ بین آنها نسبت عکس دارد. یعنی

$$F \propto \frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲}$$

که در این رابطه F مقدار نیروی متقابلی است که بر هر یک از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ وارد می‌شود، و r فاصلهٔ بین مرکزهای این دو گوی است. نیروی وارد بر هر بار از طرف بار دیگر در امتداد خط واصل این دو بار قرار می‌گیرد. همان‌طورکه قانون سوم نیوتون ایجاب می‌کند، نیرویی که از طرف بار $q_۱$ به بار $q_۲$ وارد می‌شود از نظر مقدار برابر و از نظر جهت برعکس نیرویی است که از طرف بار $q_۲$ به بار $q_۱$ وارد می‌شود، حتی اگر مقدار بارها روی هر کدام از دو گوی متفاوت باشد.

برای تبدیل تناسب بالا به معادله، یک ضریب تناسب وارد می‌کنیم که آن را با نماد K نمایش می‌دهیم و به آن ثابت کولن می‌گوییم. به این ترتیب، برای نیروی بین اجسام باردار رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$F = K\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲} \tag{۲ـ۲۵}$$

معادلهٔ (۲۵ـ۲)، که قانون کولن نامیده می‌شود، معمولاً برای اجسام بارداری برقرار است که ابعادشان خیلی کوچکتر از فاصلهٔ بین آنها باشد. اغلب می‌گوییم که این قانون فقط برای بارهای نقطه‌ای معتبر است.

باور ما به درستیِ قانون کولن از لحاظ کمّی متکی بر آزمایشهای کولن نیست. این‌گونه اندازه‌گیریها نمی‌توانند ما را متقاعد کنند که، به‌عنوان مثال، توان r در معادلهٔ (۲۵ـ۲) دقیقاً برابر با ۲ است و مثلاً ۲٫۰۰۰۱ نیست. در بخش ۲۷ـ۷ نشان می‌دهیم که قانون کولن را می‌توان از یک آزمایش غیرمستقیم نیز به‌دست آورد، که این آزمایش نشان می‌دهد، اگر نمای r در معادلهٔ (۲۵ـ۲) دقیقاً برابر با ۲ نباشد، حداکثر به اندازهٔ ۱×۱۰^{-۱۶} با ۲ تفاوت دارد.

قانون کولن شبیه قانون عکس مجذوری نیوتون برای گرانش، $F = Gm_۱m_۲/r^۲$، است، که در زمان انجام آزمایشهای کولن بیش از ۱۰۰ سال سابقه داشت. هر دو قانون، قانونهای عکس مجذوری‌اند و بار q در قانون کولن همان نقشی را دارد که جرم m در قانون گرانش نیوتون. یک تفاوت بین این دو قانون آن است که، تا آنجا که می‌دانیم، نیروهای گرانشی همواره نیروهای ربایشی یا جاذبه هستند، در حالی‌که نیروهای الکتروستاتیکی برحسب اینکه بارها هم‌علامت یا با علامت مخالف باشند، ممکن است به‌صورت رانشی یا ربایشی باشند.

در سیستم SI، ثابت K به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$K = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \tag{۳ـ۲۵}$$

گرچه به نظر می‌رسد که انتخاب این شکل برای ثابت K قانون کولن را بی‌جهت پیچیده می‌کند، سرانجام این گزینش به ساده‌سازیهایی در فرمولهای الکترومغناطیس می‌انجامد که خیلی بیشتر از قانون کولن مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند.

ثابت $\epsilon_۰$، که ثابت الکتریکی نامیده می‌شود (و ثابت گذردهی نیز خوانده می‌شود) دارای مقداری است که از مقدار پذیرفته‌شده برای سرعت سیر نور به‌دست می‌آید و آن را در فصل ۳۹ بررسی می‌کنیم.

مقدار دقیق ثابت الکتریکی چنین است

$$\epsilon_۰ = ۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲ \times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C^۲/N\cdot m^۲}$$

مقدار ثابت کولن، K، متناظر با این مقدار (تا سه رقم بامعنی) به قرار زیر است

$$K = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} = ۸٫۹۹ \times ۱۰^۹\ \mathrm{N\cdot m^۲/C^۲}$$

با این گزینش برای ثابت K، قانون کولن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$F = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲} \tag{۴ـ۲۵}$$

در این معادله اگر ثابت K دارای مقدار بالا باشد و q را برحسب کولن و r را برحسب متر در نظر بگیریم نیروی F برحسب نیوتون به‌دست می‌آید.

اهمیت قانون کولن بسیار فراتر از توصیف نیروهای مؤثر بین کره‌های باردار است. این قانون، وقتی وارد ساختار فیزیک کوانتومی می‌شود، توصیف درستی از (۱) نیروهای الکتریکی که الکترونهای یک اتم را به هستهٔ آن پیوند می‌زنند، (۲) نیروهایی که اتمها را به‌هم متصل می‌کنند تا مولکولها را به‌وجود آورند، و (۳) نیروهایی که اتمها و مولکولها را به‌هم می‌چسبانند تا جامدها و مایعها را به‌وجود آورند، ارائه می‌دهد. به این ترتیب اغلب نیروهای مؤثر در تجربیات روزمرهٔ ما که سرشت گرانشی ندارند الکتریکی هستند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۲ در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱ دیدیم که سکهٔ مسی حاوی بارهای مثبت و منفی است و مقدار هرکدام از این بارها در حدود $۱٫۳۷ \times ۱۰^۵\mathrm{C}$ است. فرض کنید می‌توانستیم این بارها را به‌صورت دو بستهٔ جدا از هم در فاصلهٔ ۱۰۰ متری از یکدیگر قرار می‌دهیم. نیروی ربایشی وارد بر هر بسته چقدر می‌شد؟

حل. از معادلهٔ (۲۵ـ۴) داریم

$$\begin{aligned} F &= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{|q|^۲}{r^۲} \\ &= \frac{(۸٫۹۹ \times ۱۰^۹\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۱٫۳۷ \times ۱۰^۵\mathrm{C})^۲}{(۱۰۰\ \mathrm{m})^۲} \\ &= ۱٫۶۹ \times ۱۰^{۱۶}\mathrm{N} \end{aligned}$$

که این مقدار در حدود ۲×۱۰^{۱۲} تن نیرو است! حتی اگر این بارها در فاصله‌ای برابر با قطر زمین از یکدیگر قرار گیرند، باز هم نیروی ربایشی بین آنها در حدود ۱۲۰ تن خواهد شد. در آنچه در اینجا ارائه شد، مشکل ایجاد یک "بسته" از بارهای جداشده از هم را که ابعادشان در مقایسه با فاصلهٔ بین آنها کوچک باشد نادیده گرفتیم. چنین بسته‌هایی از بار، حتی اگر به فرض محال به‌وجود هم بیایند، بر اثر نیروهای رانشی کولنی متلاشی خواهند شد.

درسی که از این مثال می‌گیریم آن است که خنثایی الکتریکی مواد عادی را نمی‌توانیم خیلی برهم بزنیم. اگر سعی کنیم که بخش قابل ملاحظه‌ای از بار موجود در یک جسم را از آن جدا کنیم، به‌طور خودکار یک نیروی کولنی قوی به‌وجود می‌آید، که سعی می‌کند آن بار را پس بکشد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۳ میانگین فاصلهٔ بین الکترون و پروتون در اتم هیدروژن $۵٫۳ \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{m}$ است. (الف) مقدار میانگین نیروی الکتروستاتیکی بین این دو ذره چقدر است؟ (ب) مقدار میانگین نیروی گرانشی بین این دو ذره چقدر است؟

حل. (الف) برای نیروی الکتروستاتیکی، از معادلهٔ (۲۵ـ۴) داریم،

$$F_{\mathrm{e}} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{۰}} \frac{e^{۲}}{r^{۲}}$$

$$= \frac{(۸٫۹۹ \times ۱۰^{۹}\mathrm{N\cdot m^{۲}/C^{۲}})(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})^{۲}}{(۵٫۳ \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{m})^{۲}}$$

$$= ۸٫۲ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{N}$$

گرچه ممکن است این نیرو کوچک به نظر بیاید (تقریباً برابر وزن یک ذرهٔ گردوغبار است) شتاب بسیار بزرگی در الکترون در داخل اتم به‌وجود می‌آورد، که در حدود $۱۰^{۲۳}\mathrm{m/s^{۲}}$ است.

(ب) در مورد نیروی گرانشی داریم

$$F_{\mathrm{g}} = G\frac{m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{p}}}{r^{۲}}$$

$$= \frac{(۶٫۶۷\times۱۰^{-۱۱}\mathrm{N\cdot m^{۲}/kg^{۲}})(۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg})(۱٫۶۷\times۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg})}{(۵٫۳\times۱۰^{-۱۱}\mathrm{m})^{۲}}$$

$$= ۳٫۶ \times ۱۰^{-۴۷}\mathrm{N}$$

می‌بینیم که نیروی گرانشی بسیار ضعیفتر از نیروی الکتروستاتیکی است و نسبت آنها از مرتبهٔ $۱۰^{۳۹}$ است. نیروی گرانشی گرچه ضعیف است، همواره ربایشی است. این نیرو می‌تواند در تشکیل جرمهای بسیار بزرگ، مانند ستارگان و کهکشانها، مؤثر باشد، به‌طوری که نیروهای گرانشی عظیمی را پدید آورد. از طرف دیگر، نیروی الکتروستاتیکی برای بارهای هم‌علامت رانشی است و از آن‌رو انباشت مقدار زیادی از بارهای مثبت یا منفی وجود ندارد. باید همواره دو نوع بار را در کنار هم داشته باشیم تا اثر یکدیگر را خنثی کنند. بارهایی که در زندگی روزمره با آنها سروکار داریم اختلالها یا آشفتگیهای کوچکی بر این توازن همیشگی‌اند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۴ شعاع هسته اتم آهن در حدود $۴ \times ۱۰^{-۱۵}\mathrm{m}$ است و این هسته حاوی ۲۶ پروتون است. نیروی رانشی الکتروستاتیکی مؤثر بین دو پروتون که در این هسته در فاصلهٔ یک شعاع از هم قرار دارند، چقدر است؟

حل. از معادلهٔ (۲۵ـ۴) داریم

$$F = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{۰}} \frac{e^{۲}}{r^{۲}}$$

$$= \frac{(۸٫۹۹\times۱۰^{۹}\mathrm{N\cdot m^{۲}/C^{۲}})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})^{۲}}{(۴\times۱۰^{-۱۵}\mathrm{m})^{۲}}$$

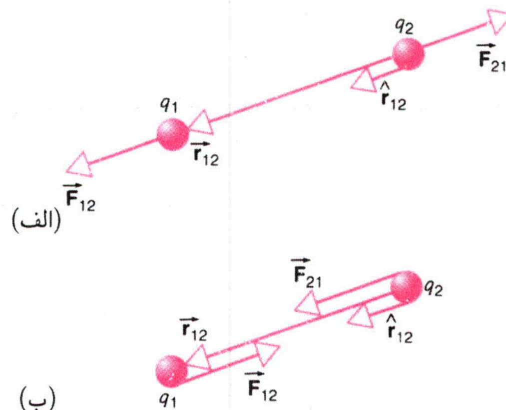
$$= ۱۴\mathrm{N}$$

این نیروی عظیم الکتروستاتیک رانشی، که روی تک پروتون اثر می‌کند باید توسط نیروی ربایشی هسته‌ای، که اجزای هسته را به‌هم پیوند می‌زند، خنثی شود. برد این نیرو به قدری کوتاه است که خیلی بیرون از هسته نمی‌توان آثار آن را احساس کرد، این نیرو به‌درستی "نیروی هسته‌ای قوی" نامیده می‌شود.

قانون کولن: شکل برداری

تا اینجا فقط بزرگی نیروی بین دو بار را براساس قانون کولن به‌دست آوردیم. نیرو، که یک کمیت برداری است، ویژگیهای جهتی هم دارد. در مورد قانون کولن، جهت نیرو را علامت نسبی دو بار الکتریکی معین می‌کند.

همان‌طور که در شکل ۲۵ـ۹ نشان داده‌ایم، فرض می‌کنیم که دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_{۱}$ و $q_{۲}$ در فاصلهٔ $r_{۱۲}$ از هم قرار گرفته‌اند. ابتدا فرض می‌کنیم که این دو بار هم‌علامت باشند، در این صورت یکدیگر را دفع می‌کنند. اکنون نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ توسط ذرهٔ ۲ را در نظر بگیرید، که طبق معمول آن را به‌صورت $\vec{\mathbf{F}}_{۱۲}$ می‌نویسیم. بردار مکانی که محل ذرهٔ ۱ را نسبت به ذرهٔ ۲ مشخص می‌کند با $\vec{\mathbf{r}}_{۱۲}$



شکل ۲۵ـ۹ (الف) دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که هم‌علامت‌اند نیروهای رانشی مساوی و در جهت مخالف به یکدیگر وارد می‌کنند. بردار $\vec{r}_{12}$ محل ذرهٔ q_1 را نسبت به q_2 مشخص می‌کند و بردار یکهٔ $\hat{r}_{12}$ در جهت بردار $\vec{r}_{12}$ است. توجه کنید که $\vec{F}_{12}$ موازی با $\vec{r}_{12}$ است. (ب) اکنون بارها دارای علامت مخالف‌اند و نیرو ربایشی است. توجه کنید که در این مورد نیروی $\vec{F}_{12}$ با بردار $\vec{r}_{12}$ پادموازی است.

نشان می‌دهیم؛ یعنی، اگر مبدأ دستگاه مختصات را در محل ذرهٔ ۲ قرار دهیم، بردار $\vec{r}_{12}$ بردار مکان ذرهٔ ۱ است.

اگر دو بار هم‌علامت باشند، نیروی وارد بر بارهای نیروی رانشی است و همان‌طورکه در شکل ۲۵ـ۹(الف) نشان داده‌ایم، نیروی $\vec{F}_{12}$ باید موازی با بردار مکان $\vec{r}_{12}$ باشد. اگر علامت بارها مختلف باشد، همان‌طور که در شکل ۲۵ـ۹(ب) نشان داده‌ایم، نیروی $\vec{F}_{12}$ یک نیروی ربایشی و پادموازی با بردار $\vec{r}_{12}$ است. در هر حالت، می‌توانیم نیرو را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad (۲۵\text{ـ}۵)$$

در اینجا r_{12} بزرگی بردار $\vec{r}_{12}$ است و $\hat{r}_{12}$ بردار یکه‌ای در جهت بردار $\vec{r}_{12}$ است. یعنی

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \qquad (۲۵\text{ـ}۶)$$

قبلاً برای بیان نیروی گرانشی از معادله‌ای مانند معادلهٔ (۲۵ـ۵) استفاده کردیم (معادله‌های ۱۴ـ۲ و ۱۴ـ۳).

شکل ۲۵ـ۹ ویژگی دیگری هم دارد. بنابر قانون سوم نیوتون، نیروی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱، یعنی نیروی $\vec{F}_{21}$ در خلاف جهت نیروی $\vec{F}_{12}$ است. این نیرو را هم می‌توانیم دقیقاً به همان شکل بیان کنیم:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21} \qquad (۲۵\text{ـ}۷)$$

در اینجا $\hat{r}_{21}$ بردار یکه‌ای است که جهت آن از ذرهٔ ۱ به ذرهٔ ۲ است؛ یعنی، اگر مبدأ مختصات را در محل ذرهٔ ۱ در نظر بگیریم این بردار یکه در جهت بردار مکان ذرهٔ ۲ قرار می‌گیرد.

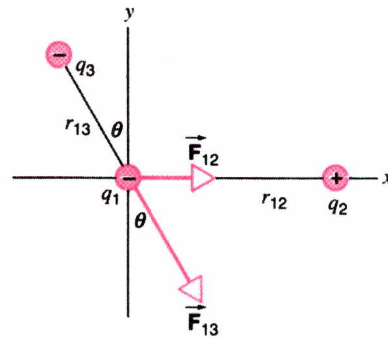
شکل برداری قانون کولن از آن‌رو مفید است که حاوی اطلاعاتی در مورد جهت بردار $\vec{F}$ است و مشخص می‌کند که بردار ربایشی است یا رانشی. استفاده از شکل برداری قانون کولن در مطالعهٔ نیروهای وارد بر مجموعه‌ای بیش از دو ذرهٔ باردار اهمیتی اساسی دارد. در این حالت معادلهٔ (۲۵ـ۵) برای هر زوج ذرهٔ باردار برقرار است و نیروی کل وارد بر یک ذرهٔ باردار از جمع برداری نیروهای ناشی از ذرات دیگر به‌دست می‌آید. مثلاً، نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ در یک مجموعه به‌صورت زیر است

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots \qquad (۲۵\text{ـ}۸)$$

در اینجا نیروی $\vec{F}_{12}$ نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذرهٔ ۲ است، $\vec{F}_{13}$ نیروی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذرهٔ ۳ است، و الی‌آخر. معادلهٔ (۲۵ـ۸) نمایش ریاضی اصل برهم‌نهی است که در مورد نیروهای الکتریکی به‌کار می‌رود. این معادله بیانگر آن است که نیروی وارد بر هر ذره از طرف ذرهٔ دیگر مستقل از حضور ذرات باردار دیگر در مجاورت آنهاست، و بنابراین می‌توانیم نیروی وارد بر هر زوج‌ذره را به‌طور جداگانه محاسبه کنیم و سپس نیروی خالص وارد بر هر ذره را از حاصل‌جمع برداری این نیروها به‌دست آوریم. مثلاً، نیروی $\vec{F}_{13}$ که ذرهٔ ۳ بر ذرهٔ ۱ وارد می‌کند مطلقاً تحت تأثیر حضور ذرهٔ ۲ نیست. اصل برهم‌نهی به هیچ‌وجه واضح و بدیهی نیست و این امکان وجود دارد که در مورد نیروهای الکتریکی خیلی قوی با شکست مواجه شود. فقط با آزمایش می‌توان مناسب‌بودن آن را بررسی کرد. اما، برای همهٔ مواردی که در این کتاب با آن مواجه می‌شویم، اصل برهم‌نهی معتبر است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۵ در شکل ۲۵ـ۱۰ سه ذرهٔ باردار را نشان داده‌ایم، که توسط نیروهایی نامرئی در محل مربوط نگهداری شده‌اند. نیروی الکتروستاتیکی وارد بر بار q_1 از طرف دو بار دیگر چقدر است؟ فرض کنید $q_1 = -۱{,}۲\mu C$، $q_2 = +۳{,}۷\mu C$، $q_3 = -۲{,}۳\mu C$، $r_{12} = ۱۵\,cm$، $r_{13} = ۱۰\,cm$، و $\theta = ۳۲^\circ$ است.

حل. حل این مثال نیازمند استفاده از اصل برهم‌نهی است. این کار را با محاسبهٔ مقدار نیروهایی که بارهای q_2 و q_3 بر q_1 وارد می‌کنند شروع می‌کنیم. بزرگی بارها را بدون توجه به علامتشان در



شکل ۲۵ـ۱۰ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۵. سه ذرهٔ باردار سه زوج نیروی کنش‌ـواکنش بر یکدیگر وارد می‌کنند. در اینجا فقط دو نیرویی را که بر ذرهٔ $q_۱$ وارد می‌شوند نشان داده‌ایم.

معادلهٔ (۲۵ـ۵) قرار می‌دهیم. به این ترتیب داریم

$$F_{۱۲} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{\circ}} \frac{|q_۱||q_۲|}{r_{۱۲}^۲}$$

$$= \frac{(۸٫۹۹ \times ۱۰^۹ \mathrm{N \cdot m^۲/C^۲})(۱٫۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})(۳٫۷ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})}{(۰٫۱۵\,\mathrm{m})^۲}$$

$$= ۱٫۷۷\,\mathrm{N}$$

بارهای $q_۱$ و $q_۲$ دارای علامت مخالف‌اند و در نتیجه نیروی بین آنها نیرویی ربایشی است. در نتیجه جهت نیروی $\vec{\mathbf{F}}_{۱۲}$ در شکل ۲۵ـ۱۰ به طرف راست است.

همچنین داریم

$$F_{۱۳} = \frac{(۸٫۹۹ \times ۱۰^۹ \mathrm{N \cdot m^۲/C^۲})(۱٫۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})(۲٫۳ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})}{(۰٫۱۰\,\mathrm{m})^۲}$$

$$= ۲٫۴۸\,\mathrm{N}$$

این دو ذرهٔ باردار هم‌علامت(منفی) هستند و در نتیجه نیرویی که بار $q_۳$ بر بار $q_۱$ وارد می‌کند رانشی است. از آن‌رو نیروی $\vec{\mathbf{F}}_{۱۳}$ همان جهتی را دارد که در شکل ۲۵ـ۱۰ نشان داده است.

مؤلفه‌های بردار برایند $\vec{\mathbf{F}}_۱$ که روی ذرهٔ $q_۱$ اثر می‌کند از مؤلفه‌های متناظر در معادلهٔ (۲۵ـ۸) به‌دست می‌آیند، یا به عبارت دیگر

$$F_{۱x} = F_{۱۲x} + F_{۱۳x} == F_{۱۲} + F_{۱۳}\sin\theta$$
$$= ۱٫۷۷\,\mathrm{N} + (۲٫۴۸\,\mathrm{N})(\sin ۳۲^\circ) = ۳٫۰۸\,\mathrm{N}$$

و

$$F_{۱y} = F_{۱۲y} + F_{۱۳y} = ۰ - F_{۱۳}\cos\theta$$
$$= -(۲٫۴۸\,\mathrm{N})(\cos ۳۲^\circ) = -۲٫۱۰\,\mathrm{N}$$

از این مؤلفه‌ها می‌توانید نشان دهید که بزرگی بردار $\vec{\mathbf{F}}_۱$ برابر با $۳٫۷۳\,\mathrm{N}$ است و این بردار با محور x زاویهٔ -۳۴° می‌سازد.

۲۵ـ۵ توزیع پیوستهٔ بار

تا اینجا دیدیم که چگونه می‌توان نیروهای ناشی از بارهای نقطه‌ای را محاسبه کرد. ولی، در اغلب کاربردها، نیروهای الکتریکی به‌وسیلهٔ اجسام بارداری اعمال می‌شوند که به شکل میله، صفحه، یا سایر اجسام توپر هستند. برای سادگی فرض می‌کنیم که این اجسام عایق بوده و بار در سرتاسر سطح یا در تمامی حجم آنها گسترده شده است و یک توزیع پیوستهٔ بار را به‌وجود آورده است.

در شکل ۲۵ـ۲ نیروهایی را که یک میلهٔ باردار بر میلهٔ باردار دیگر وارد می‌کرد نشان دادیم. قانون کولن فقط در مورد بارهای نقطه‌ای کاربرد دارد، و بنابراین نمی‌توانیم از قانون کولن مربوط به بار نقطه‌ای برای محاسبهٔ نیرویی که یک میلهٔ باردار بر میلهٔ باردار دیگر وارد می‌کند استفاده کنیم. ممکن است تصورکنیم که میله‌ها توسط بارهای نقطه‌ای پوشیده شده باشند و آن‌وقت از قانون کولن استفاده کنیم تا نیرویی را که یک بار نقطه‌ای روی یک میله بر تک‌تک بارهای نقطه‌ای روی میلهٔ دیگر وارد می‌کند محاسبه کنیم، ولی چنین رهیافتی به‌گونه‌ای بی‌حاصل پیچیده و دشوار می‌شود، اگر هرکدام از میله‌ها فقط مقدار ناچیزی در حدود $۱\,\mathrm{nC}$ بار داشته باشند، باید $۱۰^{۱۰}$ بار نقطه‌ای را روی هر میله مورد توجه قرار دهیم!

به‌جای این کار، برمی‌گردیم به عصر فرانکلین، و بار را به‌صورت یک خاصیت پیوسته در نظر می‌گیریم. روال مقدماتی آن است که بار را به اجزا و عناصر بسیار کوچکی تقسیم می‌کنیم و با بهره‌گیری از روشهای حسابان نیروی کل ناشی از کلیهٔ عناصر را به‌دست می‌آوریم.

اگر جسمی حاوی بار خالص q باشد، تصور می‌کنیم که این بار به تعداد زیادی اجزای کوچک با بار dq تقسیم شده باشد. هر عنصر دارای طول، مساحت، یا حجم معینی است، که این بستگی دارد به اینکه بار مورد نظر به‌ترتیب در یک، دو، یا سه بعد توزیع شده باشد. بار dq را برحسب اندازهٔ عنصر و چگالی بار بیان می‌کنیم. چگالی بار تشریح می‌کند که بار چگونه روی طول، سطح، یا حجم جسم توزیع شده است. در مورد اغلب مسئله‌هایی که در این کتاب بررسی می‌کنیم، بارها به‌طور یکنواخت در سرتاسر جسم توزیع شده‌اند. این امر بدان معنی است که چگالی بار در همهٔ جای جسم دارای مقدار یکسانی است.

در برخی موارد، بارها در یک بعد توزیع شده‌اند، مانند میله‌های

باردارشدهٔ نازک شکل ۲۵_۲. در این حالت، بار dq را برحسب چگالی خطی بار (بار بر واحد طول) λ، که یکای پایهٔ آن C/m است بیان می‌کنیم. یک عنصر کوچک از میله به طول dx دارای بار dq است که با عبارت زیر مشخص می‌شود

$$dq = \lambda\, dx \qquad (۲۵\text{_}۹)$$

اگر میله به‌طور یکنواخت باردار شده باشد، به‌طوری که کل بار q به‌طور یکنواخت روی تمام طول L توزیع شده باشد، در آن صورت $\lambda = q/L$. مثلاً، برای میله‌ای به طول $L = ۰٫۱۲\,\text{m}$ که حامل بار یکنواخت توزیع‌شدهٔ $q = ۵٫۴ \times ۱۰^{-۶}\text{C}$ است، چگالی خطی بار عبارت است از $\lambda = q/L = ۴٫۵ \times ۱۰^{-۵}\text{C/m}$. یک قطعهٔ کوچک از این میله با طول $dx = ۱٫۰\,\text{mm}$ حامل باری برابر با $dq = \lambda dx = ۴٫۵ \times ۱۰^{-۸}\text{C}$ است.

در موارد دیگر، ممکن است بار روی یک سطح دوبعدی، مانند سطح گوی حامل در شکل ۲۵_۳ توزیع شود. در این حالت dq را برحسب چگالی سطحی بار (بار موجود در یکای سطح) σ، بیان می‌کنیم، در یکای SI این کمیت به‌صورت $\text{C/m}^۲$ اندازه‌گیری می‌شود. یک عنصر سطحی کوچک مانند dA در این حالت دارای بار

$$dq = \sigma dA \qquad (۲۵\text{_}۱۰)$$

است. اگر مقدار بار q به‌طور یکنواخت روی سطح A توزیع شود، در آن صورت، داریم $\sigma = q/A$.

این امکان نیز وجود دارد که بار در تمامی حجم یک جسم سه‌بعدی توزیع شود. در این حالت، ما از چگالی حجمی بار (بار بر واحد حجم) ρ استفاده می‌کنیم، که در یکای SI برحسب $\text{C/m}^۳$ بیان می‌شود. در این صورت بار dq موجود در عنصر حجمی کوچک dV برابر است با

$$dq = \rho\, dV \qquad (۲۵\text{_}۱۱)$$

اگر بار q در حجم V به‌طور یکنواخت توزیع شده باشد، در آن صورت $\rho = q/V$ است.

برای اینکه این مفاهیم را به تصویر بکشیم، عبارت مربوط به نیرویی که یک توزیع بار پیوسته را بر بار نقطه‌ای $q_۰$ وارد می‌کند محاسبه می‌کنیم. با گسترش این روش، می‌توان نیرویی را که یک توزیع پیوستهٔ بار بر توزیع پیوستهٔ بار دیگری وارد می‌کند محاسبه کرد.

سلسله مراحل یافتن نیروی وارد از طرف یک توزیع بار پیوسته بر یک بار نقطه‌ای به شرح زیر است:

۱. تصور کنید که توزیع بار پیوسته به تعداد بسیار زیادی عناصر بار کوچک تقسیم شده باشد.

۲. یک عنصر بار دلخواه انتخاب کرده و بار dq آن را، برحسب تناسب و مورد، چنانچه در امتداد یک خط، روی یک سطح، یا در کل یک حجم توزیع شده باشد، به‌ترتیب برحسب معادله‌های (۲۵_۹)، (۲۵_۱۰)، یا (۲۵_۱۱) بیان کنید.

۳. چون dq بسیار بسیار کوچک است، می‌توانیم آن را به‌صورت یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم. بزرگی جزء نیروی dF را که به‌وسیلهٔ بار dq بر بار $q_۰$ وارد می‌شود برحسب قانون کولن، معادلهٔ (۲۵_۴)، بیان می‌کنیم:

$$dF = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{|dq||q_۰|}{r^۲} \qquad (۲۵\text{_}۱۲)$$

که در اینجا r فاصلهٔ بین بار dq و $q_۰$ است.

۴. با درنظرگرفتن علامت بارهای dq و $q_۰$ و موقعیت آنها جهت عنصر نیروی $d\vec{\mathbf{F}}$ را معین می‌کنیم.

۵. سپس نیروی کل را با افزودن این عناصر بسیار کوچک نیرو به همدیگر به‌دست می‌آوریم، این کار شامل انتگرال زیر می‌شود

$$\vec{\mathbf{F}} = \int d\vec{\mathbf{F}} \qquad (۲۵\text{_}۱۳)$$

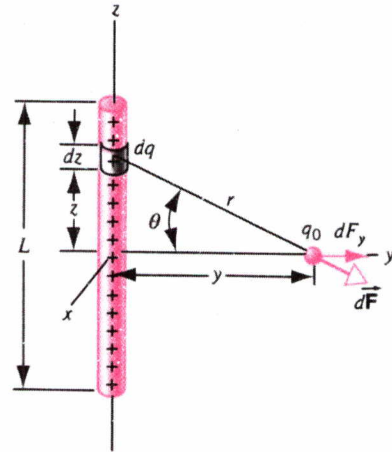
در انجام محاسبه این انتگرال، معمولاً لازم است که به این نکته توجه کنیم که عناصر بار متفاوت dq منجر به نیروهای در جهتهای متفاوت $d\vec{\mathbf{F}}$ می‌شود. معادلهٔ (۲۵_۱۳)، واقعاً به معنی سه معادلهٔ متفاوت برای سه مؤلفه نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ است:

$$F_x = \int dF_x, F_y = \int dF_y, F_z = \int dF_z \qquad (۲۵\text{_}۱۴)$$

گاه‌گاهی با بهره‌گیری از استدلال مبتنی بر تقارن از محاسبهٔ یکی یا دو تا از این انتگرالها خودداری می‌کنیم.

توزیع یکنواخت بار در امتداد یک خط

در شکل ۲۵_۱۱ یک میلهٔ باریک به طول L را نشان داده‌ایم که در امتداد محور z قرار گرفته است و حامل بار مثبت q است که به‌طور یکنواخت روی آن توزیع شده است، به‌طوری که چگالی بار خطی آن برابر با $\lambda = q/L$ است. می‌خواهیم نیروی وارد از طرف میله به بار نقطه‌ای $q_۰$ را محاسبه کنیم. بار $q_۰$ روی عمودمنصف میله (در جهت مثبت محور y) و در فاصلهٔ y از مرکز میله قرار گرفته است.



شکل ۲۵ـ۱۱ یک میلهٔ به‌طور یکنواخت باردارشده. برای اینکه نیروی وارد از طرف میله بر بار نقطه‌ای $q_\circ$ را معین کنیم، فرض می‌کنیم که میله از تعداد بسیار زیادی عناصر بار منفرد مانند dq تشکیل شده است.

در شکل گامهای ۱، ۲، و ۳ از سلسله مراحل انجام این محاسبه را نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم که میله را به عناصر کوچکی به طول dz تقسیم کرده‌ایم. یک عنصر دلخواه با بار $dq = \lambda dz$ را که در موقعیت z از مرکز میله قرارگرفته است و نیروی dF را بر بار $q_\circ$ وارد می‌کند در نظر می‌گیریم، که در اینجا

$$dF = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ dq}{r^۲}$$

جهت نیروی $d\vec{\mathbf{F}}$ را در شکل نشان داده‌ایم. نیروی $d\vec{\mathbf{F}}$ هیچ مؤلفه‌ای در امتداد محور x (عمود بر صفحهٔ کاغذ) ندارد، بنابراین $F_x = \circ$. همچنین می‌توانیم با استفاده از استدلالی مبتنی بر تقارن نشان دهیم که $F_z = \circ$ است. به‌ازای هر عنصر بار dq که در موقعیت $+z$ قرارگرفته، عنصر بار دیگری به اندازهٔ dq در موقعیت $-z$ واقع شده است. وقتی نیروهای ناشی از بارهای واقع در $+z$ و $-z$ را به‌هم بیفزاییم، درمی‌یابیم که مؤلفه‌های z آنها از لحاظ بزرگی با هم برابر ولی در جهتهای مخالف یکدیگرند، به‌طوری که حاصل‌جمع آنها برابر با صفر است. نظر به اینکه بار $q_\circ$ در صفحهٔ منصف میله قرارگرفته است، این‌گونه حذف مؤلفه‌های z برای هر زوج عنصر بار در دو طرف این صفحهٔ منصف برای تمامی طول میله اتفاق می‌افتد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $F_z = \circ$.

تنها مؤلفه‌ای که باقی می‌ماند و باید محاسبه شود F_y است. عنصر نیروی $dF_y = dF\cos\theta$ را در شکل ۲۵ـ۱۱ نشان داده‌ایم. در اینجا داریم $dq = \lambda dz$، $r^۲ = y^۲ + z^۲$، $\cos\theta = y/r$،

در نتیجه

$$dF_y = dF\cos\theta = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ \lambda dz}{(y^۲+z^۲)}\frac{y}{\sqrt{y^۲+z^۲}}$$

$$F_y = \int dF_y = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}q_\circ \lambda y\int_{-L/۲}^{L/۲}\frac{dz}{(y^۲+z^۲)^{۳/۲}}$$

از محاسبهٔ این انتگرال (به پیوست ط مراجعه کنید و توجه داشته باشید که y یک مقدار ثابت است) نتیجه می‌گیریم

$$F_y = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ q}{y\sqrt{y^۲+L^۲/۴}} \qquad (۲۵\text{ـ}۱۵)$$

این نیرو در جهت مثبت محور y است در صورتی‌که هر دو بار q و $q_\circ$ مثبت باشند. اگر بار $q_\circ$ در موقعیتهای دیگری در صفحهٔ xy قرار بگیرد، ممکن است عبارت مربوط به نیرو تغییر کند (تمرین ۱۴ را ببینید).

اغلب محاسبهٔ این‌گونه عبارتها، در یکی از شرایط حدی گوناگون، آموزنده است. در اینجا، این عبارت را برای وقتی که $y \gg L$ است محاسبه می‌کنیم، در این حالت نیرو به‌صورت زیر در می‌آید

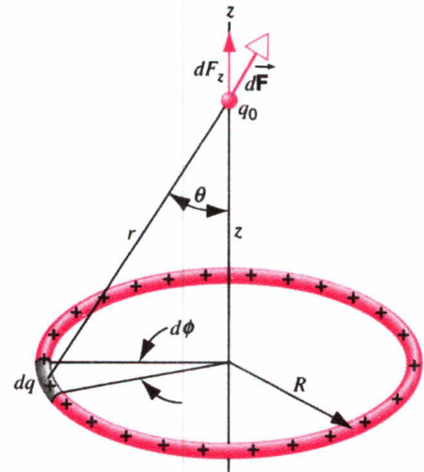
$$F_y \approx \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ q}{y^۲}$$

که این عبارت، همان عبارت مربوط به نیروی یک بار نقطه‌ای روی بار نقطه‌ای دیگر است. یعنی، وقتی که در فاصلهٔ بسیار دوری از میله قرار گرفته‌ایم، یا وقتی که طول میله بسیار کوتاه است، میله به‌صورت یک بار نقطه‌ای به نظر می‌آید.

حلقه‌ای از بار الکتریکی

در شکل ۲۵ـ۱۲ یک حلقهٔ نازک با شعاع R را نشان داده‌ایم که حامل بار یکنواخت توزیع‌شدهٔ مثبت q است، به‌طوری که چگالی بار خطی آن برابر با $\lambda = q/۲\pi R$ است. می‌خواهیم نیرویی را که این حلقه بر بار مثبت نقطه‌ای $q_\circ$ وارد می‌کند محاسبه کنیم. بار $q_\circ$ روی محور حلقه (برای سادگی محور حلقه را در امتداد محور مثبت z در نظر می‌گیریم) و در فاصلهٔ z از مرکز آن قرار دارد. عنصر بار کوچکی از حلقه به طول $Rd\phi$ را در نظر می‌گیریم. این عنصر حامل بار $dq = \lambda R d\phi$ است. نیروی وارد بر بار $q_\circ$ از طرف بار dq چنین است

$$dF = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ dq}{r^۲} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ \lambda R d\phi}{(z^۲+R^۲)}$$



شکل ۲۵ـ۱۲ حلقه‌ای که به‌طور یکنواخت باردار شده است. برای محاسبهٔ نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $q_\circ$، فرض می‌کنیم که حلقه از تعداد بسیار زیادی عناصر بار منفرد مانند dq تشکیل شده است.

می‌توانیم از استدلالی مبتنی بر تقارن استفاده کنیم و نشان دهیم که تنها مؤلفهٔ غیرصفر نیروی $\vec{\mathbf{F}}$، همانا مؤلفهٔ z آن است. به‌ازای هر عنصر dq حلقه، عنصر دیگری با بار dq، در انتهای دیگر قطری که از مرکز حلقه می‌گذرد قرار دارد؛ که وقتی نیروی ناشی از این دو عنصر بار را بر بار $q_\circ$ محاسبه کنیم و به هم بیفزاییم، تمام مؤلفه‌های دیگر نیرو به غیر از مؤلفهٔ F_z حذف می‌شوند. با توجه به اینکه $\cos\theta = z/r$، درمی‌یابیم که

$$F_z = \int dF_z = \int dF\cos\theta$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ \lambda R d\phi}{(z^2+R^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ \lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_\circ^{2\pi} d\phi$$

وقتی انتگرال را در گرداگرد حلقه محاسبه کنیم مقدار 2π را به‌دست می‌آوریم، و بنابراین نتیجهٔ نهایی برای نیروی وارد از طرف یک حلقه به یک بار نقطه‌ای چنین است:

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ q z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \qquad (۲۵\text{ـ}۱۶)$$

آیا این نتیجه وقتی که بار $q_\circ$ در سمت منفی محور z قرار دارد نیز معتبر است؟ (تمرین ۱۵ را ببینید.)

می‌توانیم این نتیجه را برای حالت حدی وقتی $z \to \infty$ مورد بررسی قرار دهیم. وقتی $R \ll z$ باشد، نتیجه می‌گیریم

$$F_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ q}{z^2}$$

که باز همان نتیجهٔ مربوط به بار نقطه‌ای را به‌دست می‌دهد. وقتی در فاصلهٔ بسیار دوری از حلقه قرار داشته باشیم، حلقه به‌صورت یک بار نقطه‌ای جلوه می‌کند.

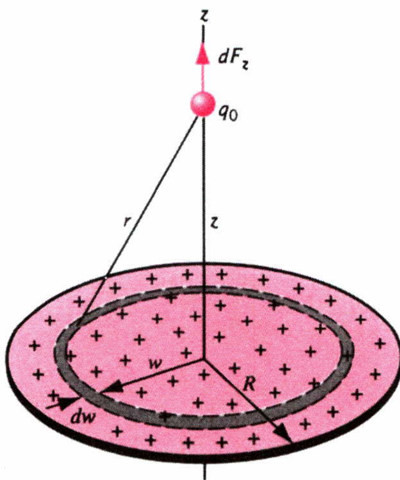
همچنین توجه کنید که وقتی $z = \circ$ است نیروی $F_z = \circ$ است. این نتیجه منطقی است، زیرا وقتی بار $q_\circ$ در مرکز حلقه قرار گیرد به‌وسیلهٔ عناصر باری که حلقه را تشکیل داده‌اند در همهٔ جهات به یک اندازه کشیده یا رانده می‌شود.

قرصی از بار الکتریکی

در شکل ۲۵ـ۱۳ قرصی دایره‌ای را نشان داده‌ایم که حاوی بار مثبت q است که به‌طور یکنواخت در سرتاسر سطح آن توزیع شده است، به‌طوری که چگالی بار سطحی آن برابر با $\sigma = q/\pi R^2$ است. بار نقطه‌ای مثبت $q_\circ$ روی محور این قرص (در امتداد محور مثبت z) و در فاصلهٔ z از مرکز آن قرار دارد. برای اینکه نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای از طرف قرص را پیدا کنیم، می‌توانیم قرص را به مجموعه‌ای از حلقه‌های باریک متحدالمرکز تقسیم کنیم. مقدار بار موجود روی حلقه‌ای به شعاع w و ضخامت dw، که در شکل ۲۵ـ۱۳ نشان داده شده است، برابر با $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi w\, dw) = 2\pi\sigma w\, dw$ است. با استفاده از معادلهٔ (۲۵ـ۱۶) و با جایگزین‌کردن q با dq و R با w می‌توان نیروی dF_z وارد از طرف این حلقه به بار $q_\circ$ را معین کرد:

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ(2\pi\sigma w\, dw)z}{(z^2+w^2)^{3/2}}$$

برای اینکه عناصر نیروی حاصل از تمامی حلقه‌ها را به هم بیفزاییم،



شکل ۲۵ـ۱۳ قرصی دایره‌ای با چگالی بار سطحی یکنواخت. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $q_\circ$ با تقسیم‌کردن قرص به حلقه‌های دایره‌ای باریک معین می‌شود.

روی w در تمام گسترهٔ از ۰ تا R انتگرال می‌گیریم:

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 2\pi\sigma z \int_0^R \frac{w\,dw}{(z^2+w^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_0 q}{R^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \quad (۱۷\text{–}۲۵)$$

توجه کنید که این انتگرال دارای شکل $\int u^{-3/2}du$ است، که می‌توان آن را مستقیماً محاسبه کرد. اگر در این رابطه $z < 0$ باشد نتیجه چگونه تغییر خواهد کرد؟ (تمرین ۱۵ را ببینید.) هرگاه z به طرف بی‌نهایت برود، می‌توانید از بسط دوجمله‌ای (پیوست ط) استفاده کنید و نشان دهید که این عبارت به قانون کولن برای بارهای نقطه‌ای تبدیل خواهد شد.

در هر سه مثال بالا فرض کردیم که بارهای الکتریکی مثبت باشند. اگر بار نقطه‌ای یا بار موجود بر روی جسم گسترده (ولی نه هر دو!) منفی شود، جهت نیرو برعکس آنچه در شکلهای ۲۵ـ۱۱ تا ۲۵ـ۱۳ نشان داده شده است، خواهد شد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۶ دو قرص دایره‌ای به شعاع $R = 5{,}0\ \text{cm}$ در فاصلهٔ $6{,}0\ \text{cm}$ از یکدیگر در امتداد یک محور مشترک عمود بر سطح زمین قرار گرفته‌اند. این قرصها دارای بارهای الکتریکی مساوی ولی با علامت مخالف‌اند که به‌طور یکنواخت روی سطح آنها گسترده شده است. روی هر کدام از این دو قرص چه مقدار بار q قرار دهیم تا یک قطرهٔ بسیار ریز روغن به جرم $4{,}0 \times 10^{-15}\text{kg}$ و با بار الکتریکی $-e$ روی محور قرصها و در نقطهٔ وسط بین آن دو قرار گرفته است، معلق بماند؟

حل. فرض کنید که بار قرص بالایی مثبت و بار قرص پایینی منفی باشد. در آن صورت قرص بالایی قطره را می‌رباید و قرص پایینی آن را می‌راند. از آنجا که قطره در نقطهٔ وسط دو قرص قرار دارد نیروهای F_z مقدار یکسانی دارند که با معادلهٔ (۲۵ـ۱۷) مشخص شده است. برای اینکه قطره در حال تعادل قرار بگیرد، باید نیروی الکتروستاتیک بالاسوی خالص $2F_z$ برابر با وزن mg قطره شود. از برابر قرار دادن این دو نیرو و با استفاده از معادلهٔ (۲۵ـ۱۷)، می‌رسیم به:

$$q = \frac{mg}{\dfrac{4e}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}$$

از حل این معادله، بار روی هر قرص را برابر با $q = 35\ \text{nC}$ به‌دست می‌آوریم.

رابرت ا. میلیکان در مجموعهٔ آزمایشهایی در سال ۱۹۰۶ برای اندازه‌گیری بار الکترون شروع کرد از این روش بهره گرفت. (بخش ۲۶ـ۶ را ببینید.)

یک حالت خاص

حالت خاصی وجود دارد که در آن می‌توان توزیع پیوستهٔ بار را به‌صورت یک بار نقطه‌ای پنداشت، و در این مورد خاص مجاز به استفاده از قانون کولن برای بار نقطه‌ای هستیم. این مورد وقتی رخ می‌دهد که بار الکتریکی روی جسمی با تقارن کروی توزیع شده باشد. یعنی، اینکه ممکن است توزیع حجمی بار برحسب شعاع تغییر کند، ولی چگالی بار روی هر پوستهٔ نازکی در هر شعاعی یکنواخت است.

نخست یک پوستهٔ نازک کروی را در نظر می‌گیریم. در بخش ۱۴ـ۵ دو ویژگی نیروی گرانش اعمال‌شده به‌وسیلهٔ یک پوستهٔ کروی با چگالی یکنواخت ماده را بر روی یک جرم نقطه‌ای اثبات کردیم. این دو ویژگی عبارت‌اند از: (۱) نیروی وارد بر هر ذره در داخل پوسته صفر است، و (۲) نیروی وارد بر هر ذره‌ای در خارج از پوسته برابر است با نیروی حاصل وقتی که کل ماده موجود در پوسته در مرکز آن متمرکز می‌شد.

تقارن بین قوانین نیروی گرانش و الکتروستاتیک (که هر دو به $\frac{1}{r^2}$ بستگی دارند) ما را مجاز می‌دارد که مقایسه‌های بی‌شماری را بین گرانش و الکتروستاتیک انجام دهیم. اغلب می‌توانیم نتایج مربوط به گرانش را مستقیماً در مورد الکتروستاتیک اعمال کنیم بدون آنکه نیاز داشته باشیم محاسبه یا اثبات مضاعفی را انجام دهیم. این قضیه در مورد ویژگیهای مربوط به پوسته‌های یکنواخت صادق است. اثبات این دو نتیجهٔ مهم در حوزهٔ الکتروستاتیک دقیقاً از اثباتهای متناظر مربوط به نیروی گرانشی در بخش ۱۴ـ۵ حاصل می‌شود.

> یک پوستهٔ کروی با توزیع بار یکنواخت، هیچ نیروی الکتروستاتیکی بر یک بار نقطه‌ای که در جایی در داخل پوسته قرار گرفته است، وارد نمی‌کند.

> یک پوستهٔ کروی با توزیع بار یکنواخت بر یک بار نقطه‌ای واقع در خارج پوسته نیرویی وارد می‌کند که گویی تمامی بار پوسته در نقطه‌ای مستقر در مرکز پوسته متمرکز شده است.

بین موارد گرانشی و الکتروستاتیکی یک تفاوت وجود دارد: نیروی گرانشی همواره ربایشی است، ولی نیروی الکتروستاتیکی ممکن است

ربایشی یا رانشی باشد. با این همه، این اختلاف تأثیری در تبدیل دو قاعدهٔ بالا از گرانشی به نیروی الکتروستاتیکی ندارد.

از این قواعد می‌توانیم برای به‌دست‌آوردن نتایج معتبر برای توزیعهای بارکروی استفاده کنیم. تصور کنید که یک توزیع بارکروی داریم که در آن چگالی حجمی بار، یعنی ρ، یا ثابت است یا برحسب تابعی فقط از شعاع r تغییر می‌کند. که در آن صورت می‌توانیم کره را متشکل از مجموعه‌ای از پوسته‌های نازک کروی درنظر بگیریم. هرکدام از این پوسته‌های کروی به‌طور یکنواخت باردار شده‌اند؛ یعنی، با آنکه امکان دارد چگالی بار یک پوسته با چگالی بار پوستهٔ دیگر تفاوت داشته باشد، ولی بار توزیع‌شده روی هر پوستهٔ منفرد یکنواخت است. در آن صورت می‌توانیم هر یک از دو قانون بالا را در مورد هر یک از پوسته‌های کروی به‌کار ببریم. اگر بار آزمون مورد نظر ما در جایی در داخل کره قرار داشته باشد، پوسته‌های کروی بیرونی، بنابر قاعده و قانون اول، هیچ نیرویی بر آن وارد نمی‌کنند. (این نتیجه در مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴ـ۴ مربوط به نیروی گرانشی مورد استفاده قرارگرفته بود.) اگر بار در خارج از کره قرارگرفته باشد، در آن صورت می‌توانیم هر پوسته را با یک بار نقطه‌ای در مرکز آن جایگزین کنیم، و در نتیجه کل کره را می‌توانیم با یک بار نقطه‌ای جایگزین کنیم که بار آن برابر با بار کل کره است.

به همین دلیل نیرویی که به‌وسیلهٔ هستهٔ یک اتم بر الکترونهایش وارد می‌شود در حالت کلی نمی‌تواند هیچ‌گونه اطلاعاتی دربارهٔ چگونگی توزیع بار مثبت در داخل هسته در اختیار ما قرار دهد. در تمام هسته‌های کروی که چگالی بار آنها فقط به شعاع r وابسته است، کلیهٔ توزیعهای بار، نیروهای یکسانی بر یک الکترون خارج از هسته وارد می‌کنند. با این همه، گاه‌گاهی ممکن است الکترونی در داخل هسته سرگردان شود و اطلاعاتی دربارهٔ چگونگی توزیع بار مثبت در داخل هسته ارائه دهد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۷ هستهٔ کروی اتم معینی حاوی بار مثبت Ze در حجمی به شعاع R است. برای هسته‌ای که در آن (الف) توزیع بار در تمامی حجم ثابت است، و (ب) چگالی بار به‌صورت مستقیم با شعاع r افزایش می‌یابد، نیروی وارد بر یک الکترون در داخل هسته به شعاع R۰٫۵ را با نیروی وارد بر آن در شعاع R برای هسته‌ای که در آن (الف) چگالی بار در سرتاسر حجم آن ثابت است و (ب) چگالی بار مستقیماً متناسب با شعاع r است مقایسه کنید.

حل. (الف) برای یک هستهٔ یکنواخت‌باردارشده (که تقریب خوبی بر رفتار بسیاری از هسته‌هاست)، چگالی حجمی بار چنین است:

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{Ze}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}$$

وقتی الکترون در شعاع $r = R$ قرار دارد، کل هسته را می‌توان با یک بار نقطه‌ای به مقدار $q = Ze$ که در مرکز کره مستقر است جایگزین کرد، که در آن صورت نیروی وارد بر الکترون در $r = R$ برابر است با

$$F(R) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{Ze^۲}{R^۲}$$

وقتی الکترون در فاصلهٔ $r = R/۲$ قرار می‌گیرد، تمامی بارهایی که در فواصل دورتری از این مقدار قرار دارند هیچ نیرویی بر الکترون وارد نمی‌کنند (بنابر قاعدهٔ اول مربوط به پوسته‌های کروی). در این حالت بار موجود در داخل فاصلهٔ $R/۲$ را می‌توان با یک بار نقطه‌ای جایگزین کرد. چه مقدار بار در داخل کره‌ای به شعاع $R/۲$ قرار دارد؟ چون حجم کره به $r^۳$ وابسته است، حجم داخل شعاع $r = R/۲$ برابر با $(۱/۲)^۳ = ۱/۸$ حجم کرهٔ اصلی است. بنابراین، بار موجود در داخل فاصلهٔ $r = R/۲$ برابر با ۱/۸ بار موجود در کل کره است، و از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{F(R/۲)}{F(R)} = \frac{۱}{۸}$$

(ب) در این حالت می‌توانیم چگالی بار را به‌صورت $\rho(r) = br$ بنویسیم. در آغاز باید ضریب تناسب b را محاسبه کنیم. می‌دانیم که کل بار موجود در داخل هسته باید Ze باشد، بنابراین

$$\int_۰^R \rho\, dV = \int_۰^R (br)۴\pi r^۲ dr = Ze$$

که در معادلهٔ بالا $dV = ۴\pi r^۲ dr$ عبارت است از حجم پوستهٔ کروی. با انجام انتگرال‌گیری، می‌رسیم به $b = Ze/\pi R^۴$.

از قاعدهٔ دوم مربوط به پوسته‌های کروی، می‌دانیم که نیروی $F(R)$ برای هر دو توزیع بار یکسان است. ولی، $F(R/۲)$ برای دو توزیع متفاوت خواهد بود. برای آنکه $F(R/۲)$ را معین کنیم، باید بدانیم چه مقدار بار q' در داخل کره‌ای به شعاع $R/۲$ وجود دارد، زیرا می‌دانیم بارهای خارج از شعاع $R/۲$ نیرویی بر این الکترون وارد نمی‌کنند. مقدار بار چنین است:

$$q' = \int_۰^{R/۲} \rho\, dV = \int_۰^{R/۲} \frac{Zer}{\pi R^۴} ۴\pi r^۲ dr = \frac{Ze}{۱۶}$$

نیروی وارد بر الکترون موجود در فاصلهٔ $r = R/۲$ را می‌توان با جایگزین کردن بار داخل این کره با یک بار نقطه‌ای q' در مرکز کره معین کرد، که نتیجه ۱/۱۶ نیروی وارد بر الکترون در سطح هسته است:

$$\frac{F(R/۲)}{F(R)} = \frac{۱}{۱۶}$$

این جواب با جواب به‌دست‌آمده در قسمت (الف) برای توزیع بار یکنواخت بسیار تفاوت دارد، و نشان می‌دهد که گرچه الکترون در خارج از هسته نمی‌تواند بین دو توزیع تفاوت قائل شود، در داخل هسته امکان شناسایی را دارد.

الکترونهای اتمی گاهی به داخل هسته نفوذ می‌کنند، و می‌توان آنها را به‌وسیلهٔ شتابدهنده به داخل هسته شلیک کرد. این دو روش می‌تواند اطلاعاتی دربارهٔ چگونگی توزیع بار در داخل هسته به ما بدهد. یک نتیجه از چنین آزمایشهایی آن است که چگالی بار برای اغلب هسته‌ها تقریباً یکنواخت است. با وجود نیروی رانشی کولنی بین پروتونها (که انتظار می‌رود پروتونها را به سطح هسته براند) و با وجود نیروی هسته‌ای قوی بین پروتونها (که انتظار می‌رود پروتونها را در نزدیکی مرکز هسته متمرکز کند)، پروتونها در داخل هسته تقریباً با چگالی یکنواخت توزیع شده‌اند. علاوه بر آن، این چگالی تقریباً برای هسته‌های سبک و سنگین یکسان است. این نتایج شگفت‌آور، درک و شناخت عمیقی از خواص مهم نیروی هسته‌ای را فراهم می‌آورند.

۲۵ـ۶ پایستگی بار الکتریکی

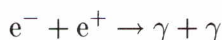
وقتی یک میلهٔ شیشه‌ای را با ابریشم مالش می‌دهیم، بار مثبتی روی میله ظاهر می‌شود. اندازه‌گیری نشان می‌دهد که به همان اندازه بار منفی روی پارچه ابریشمی پدید می‌آید. این آزمایش نشان می‌دهد که عمل مالش، بار را به‌وجود نمی‌آورد بلکه صرفاً آن را از یک جسم به جسم دیگر منتقل می‌کند و خنثایی الکتریکی هر یک از دو جسم را اندکی مختل می‌کند. این فرضیهٔ پایستگی بار الکتریکی در آزمونهای بسیار دقیق هم برای اجسام بزرگ‌مقیاس و هم در مورد اتم، هسته، و ذرات بنیادی به‌دقت بررسی شده است؛ تاکنون هیچ مورد نقض یافت نشده است.

از مقایسه با سایر قوانین پایستگی، مانند پایستگی تکانه یا پایستگی انرژی، پایستگی بار الکتریکی را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$\sum q = \text{ثابت} \quad \text{یا} \quad q_{\mathrm{i}} = q_{\mathrm{f}} \qquad (۲۵ـ۱۸)$$

در هر فرایندی که در یک سیستم منزوی رخ می‌دهد بار الکتریکی خالص آغازی باید با بار خالص پایانی برابر باشد. در مشخص کردن بار خالص، درنظرگرفتن علامت مربوط به هر یک از بارهای الکتریکی منفرد حایز اهمیت است.

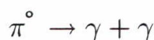
مثال جالبی از پایستگی بار الکتریکی وقتی مطرح می‌شود که یک الکترون (با بار $= -e$) و یک پادالکترون یا پوزیترون (با بار $= +e$) به هم نزدیک شوند. این امکان وجود دارد که دو ذره یکدیگر را نابود کنند و کل انرژی سکون آنها به انرژی تابشی تبدیل شود. انرژی تابشی هم ممکن است به‌صورت دو پرتو گاما (بسته‌های با انرژی بالا از تابش الکترومغناطیسی، که بدون بار الکتریکی هستند) ظاهر شود:



$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \to \gamma + \gamma$$

بار خالص در این برهم‌کنش چه قبل و چه بعد از رویداد، صفر و پایسته است.

برخی از ذرات بدون بار، مانند مزون π خنثی، وجود دارند که ممکن است، گاهی اوقات به دو پرتو گاما واپاشند:



$$\pi^\circ \to \gamma + \gamma$$

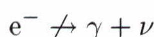
در این واپاشی بار پایسته است، باز هم در اینجا بار کل قبل و بعد از واپاشی صفر است. مثال دیگری در این مورد واپاشی نوترون $(q = ۰)$ به یک پروتون $(q = +e)$ و یک ذرهٔ خنثای دیگر، یک نوترینو $(q = ۰)$ است:



$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \nu$$

بار الکتریکی قبل و بعد از واپاشی صفر است، و بار پایسته است. در جستجوی واپاشیهایی که در آن نوترون به یک پروتون واپاشد و هیچ الکترونی گسیل نشود که پایستگی بار را نقض کند، آزمایشهایی صورت گرفته است اما تاکنون چنین رویدادی یافت نشده است.

واپاشی یک الکترون $(q = -e)$ به ذرات خنثی، مانند پرتو گاما (γ) یا نوترینو (ν) ممنوع است؛ مثلاً



$$\mathrm{e}^- \not\to \gamma + \nu$$

زیرا این واپاشی پایستگی بار الکتریکی را نقض می‌کند. تلاشهای انجام‌شده برای مشاهدهٔ این‌گونه واپاشیها هم به جایی نرسیده است، که نشان می‌دهد اگر این واپاشی صورت بگیرد، طول عمر الکترون باید حداقل $۱۰^{۲۳}$ سال باشد!

نمونهٔ دیگری از پایستگی بار الکتریکی در همجوشی دو هستهٔ دوتریم ^{2}H (به نام "هیدروژن سنگین") برای تولید یک اتم هلیم رخ می‌دهد. در میان واکنشهای ممکن می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:



$$^{2}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{3}H + p$$



$$^{2}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{3}He + n$$

هستهٔ دوتریم دارای یک پروتون و یک نوترون است و بنابراین دارای بار $+e$ است. هستهٔ ایزوتوپ هیدروژن با جرم ۳، که آن را به‌صورت ^{3}H می‌نویسیم و به نام تریتیوم می‌شناسیم، یک پروتون و دو نوترون دارد و از آن‌رو هستهٔ این ایزوتوپ نیز دارای بار $+e$ است. بنابراین واکنش اول در هر دو طرف دارای بار $+2e$ و در آن بار پایسته است. در واکنش دوم نوترون بدون بار است، در حالی‌که هستهٔ ایزوتوپ هلیم با جرم ۳ حاوی ۲ پروتون و ۱ نوترون است و بنابراین دارای بار الکتریکی $+2e$ است. به این ترتیب در واکنش دوم هم بار پایسته است. پایستگی بار الکتریکی توجیه می‌کند که چرا در واکنش دوم هرگز یک پروتون به همراه ^{3}He و در واکنش اول هرگز یک نوترون به همراه ^{3}H گسیل نمی‌شود.

خلاصه اینکه، بار الکتریکی در تمام برهم‌کنشهای شناخته‌شدهٔ بین ذرات پایسته است؛ و تا به امروز هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

چندگزینه‌ای

۲۵ـ۱ الکترومغناطیس: مقدمه

۲۵ـ۲ بار الکتریکی

۱. بارهای الکتریکی A و B یکدیگر را می‌ربایند. بارهای الکتریکی B و C همدیگر را می‌رانند. اگر بارهای A و C را در نزدیکی هم قرار دهیم، آنها

(الف) یکدیگر را می‌ربایند. (ب) همدیگر را می‌رانند.

(ج) تأثیری بر هم ندارند.

(د) برای پاسخگویی به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

۲. بارهای الکتریکی A و B یکدیگر را می‌ربایند. بارهای الکتریکی B و C نیز یکدیگر را می‌ربایند. اگر بارهای A و C را در نزدیکی همدیگر قرار دهیم، آنها

(الف) یکدیگر را می‌ربایند. (ب) همدیگر را می‌رانند.

(ج) تأثیری بر هم ندارند.

(د) برای پاسخگویی به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

۳. بارهای الکتریکی A و B یکدیگر را می‌رانند. بارهای الکتریکی B و C نیز یکدیگر را می‌رانند. اگر بارهای A و C را در نزدیکی همدیگر قرار دهیم، آنها

(الف) یکدیگر را می‌ربایند. (ب) همدیگر را می‌رانند.

(ج) تأثیری بر هم ندارند.

(د) برای پاسخگویی به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

۲۵ـ۳ رسانا و عایق

۴. اگر جسمی را که از مادهٔ A ساخته شده است بر جسمی که از مادهٔ B ساخته شده است مالش دهیم، جسم A دارای بار مثبت می‌شود و جسم B دارای بار منفی. اما، اگر جسمی را که از مادهٔ A ساخته شده است بر جسمی که از مادهٔ C ساخته شده است مالش دهیم، در آن حالت جسم A دارای بار منفی می‌شود. اگر جسمی را که از مادهٔ B ساخته شده است بر جسمی که از مادهٔ C ساخته شده است مالش دهیم چه اتفاقی روی خواهد داد؟

(الف) B دارای بار مثبت و C هم دارای بار مثبت می‌شود.

(ب) B دارای بار مثبت و C دارای بار منفی می‌شود.

(ج) B دارای بار منفی و C دارای بار مثبت می‌شود.

(د) B دارای بار منفی و C هم دارای بار منفی می‌شود.

۵. میله‌ای را که دارای بار مثبت است در نزدیکی گویی قرار می‌دهیم که به‌وسیلهٔ نخ عایقی آویخته شده است. مشاهده می‌شود که گوی به سمت میله به حرکت در می‌آید. از این مشاهده چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(الف) گوی باید دارای بار مخالف با بار میله باشد.

(ب) ممکن است که گوی در ابتدا خنثی باشد، اما وقتی که میله را در نزدیکی آن قرار می‌دهیم باردار می‌شود.

(ج) گوی باید رسانا باشد.

(د) گوی حاوی بار مثبت نیست، ولی ممکن است خنثی باشد.

۶. یک گوی کروی رسانا به‌وسیلهٔ نخ رسانایی آویخته شده است که به زمین اتصال دارد. یک بار نقطه‌ای مثبت به نزدیکی گوی آورده می‌شود. در این صورت گوی

(الف) به‌وسیلهٔ بار نقطه‌ای ربوده شده به سوی آن حرکت می‌کند.

(ب) از بار نقطه‌ای رانده شده از آن دور می‌شود.

(ج) تحت تأثیر بار نقطه‌ای قرار نمی‌گیرد.

۷. یک گوی کروی رسانا به‌وسیلهٔ نخ عایقی آویخته شده است. یک بار نقطه‌ای مثبت به نزدیکی گوی آورده می‌شود. در این صورت گوی

(الف) به‌وسیلهٔ بار نقطه‌ای ربوده شده به سوی آن حرکت می‌کند.
(ب) از بار نقطه‌ای رانده شده از آن دور می‌شود.
(ج) تحت تأثیر بار نقطه‌ای قرار نمی‌گیرد.

۲۵ـ۴ قانون کولن

۸. بار نقطه‌ای $q_{۱} = ۳\mu\mathrm{C}$ در فاصلهٔ d از بار نقطه‌ای دیگر $q_{۲} = -۶\mu\mathrm{C}$ قرارگرفته است. نسبت نیروهای $|\vec{\mathbf{F}}_{۲۱}|/|\vec{\mathbf{F}}_{۱۲}|$ چقدر است؟

(الف) ۱/۲ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۱۸

۹. دو گلولهٔ سربی ۲۰۰ پوندی در فاصلهٔ یک متر از یکدیگر قرار دارند. این دو گلوله حامل بار مثبت یکسان qاند. چه مقدار بار سبب ایجاد نیرویی الکتروستاتیکی بین دو گلوله می‌شود که برابر با وزن یکی از توپهاست؟

(الف) $۱ \times ۱۰^{-۱۴}\mathrm{C}$ (ب) $۱ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{C}$ (ج) $۳ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{C}$
(د) $۲ \times ۱۰^{-۲}\mathrm{C}$

۱۰. دو کرهٔ رسانای کوچک یکسان در فاصلهٔ $۱\,\mathrm{m}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. این دو کره در آغاز حامل بار مثبت یکسانی هستند، و نیروی بین آنها برابر با $F_{۰}$ است. سپس نیمی از بار یک کره به کرهٔ دیگر منتقل می‌شود. نیروی بین کره‌ها در این حالت چقدر است؟

(الف) $F_{۰}/۴$ (ب) $F_{۰}/۲$ (ج) $۳F_{۰}/۴$ (د) $۳F_{۰}/۲$
(هـ) $۳F_{۰}$

۱۱. دو کرهٔ رسانای کوچک یکسان در فاصلهٔ $۱\,\mathrm{m}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. این دو کره در آغاز حامل مقدار بار الکتریکی مساوی ولی با علامت مخالف‌اند و نیروی بین آنها برابر با $F_{۰}$ است. سپس نیمی از بار یک کره به کرهٔ دیگر منتقل می‌شود. نیروی بین کره‌ها در این حالت چقدر است؟

(الف) $F_{۰}/۴$ (ب) $F_{۰}/۲$ (ج) $۳F_{۰}/۴$ (د) $۳F_{۰}/۲$
(هـ) $۳F_{۰}$

۲۵ـ۵ توزیع پیوستهٔ بار

۱۲. بار نقطه‌ای q را در فاصلهٔ a از سطح کره‌ای به شعاع $۲a$ قرار داده‌ایم. بار الکتریکی Q را به‌طور یکنواخت در سرتاسر حجم کره توزیع کرده‌ایم. اندازهٔ نیروی الکتروستاتیک بین بار نقطه‌ای و کره برابر با F است، در صورتی‌که

(الف) $F = |qQ|/۴\pi\epsilon_{۰}a^{۲}$
(ب) $|qQ|/۴\pi\epsilon_{۰}a^{۲} > F > |qQ|/۱۲\pi\epsilon_{۰}a^{۲}$
(ج) $|qQ|/۱۲\pi\epsilon_{۰}a^{۲} > F > |qQ|/۲۰\pi\epsilon_{۰}a^{۲}$
(د) $|qQ|/۲۰\pi\epsilon_{۰}a^{۲} > F > |qQ|/۳۶\pi\epsilon_{۰}a^{۲}$
(هـ) $F = |qQ|/۳۶\pi\epsilon_{۰}a^{۲}$

۲۵ـ۶ پایستگی بار الکتریکی

۱۳. یک میلهٔ باردارشده با بار الکتریکی مثبت را در نزدیکی کرهٔ رسانای خنثایی که از نخ عایقی آویخته شده است نگه می‌داریم. در این صورت کره

(الف) تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد، چون خنثی است.
(ب) خنثی باقی می‌ماند، ولی از میله رانده می‌شود.
(ج) خنثی باقی می‌ماند، ولی به‌وسیلهٔ میله ربوده می‌شود.
(د) بار منفی به‌دست می‌آورد و از میله رانده می‌شود.
(هـ) بار منفی به‌دست می‌آورد و به‌وسیلهٔ میله ربوده می‌شود.

۱۴. اجسام A، B، و C سه کرهٔ رسانای عایق‌بندی‌شده یکسان‌اند. در آغاز کره‌های A و B هر دو دارای بار الکتریکی $+۳\,\mathrm{mC}$ بوده‌اند و کرهٔ C دارای بار الکتریکی $-۶\,\mathrm{mC}$ است. اجسام A و C را در تماس با یکدیگر قرار می‌دهیم، و سپس آنها را از هم جدا می‌کنیم. سپس اجسام B و C را در تماس با یکدیگر قرار می‌دهیم و بعد از هم جدا می‌کنیم.

(۱) اگر اجسام A و B را در نزدیکی هم قرار دهیم، آنها
(الف) همدیگر را می‌ربایند. (ب) یکدیگر را می‌رانند.
(ج) تأثیری بر همدیگر ندارند.

(۲) اگر اجسام A و C را در نزدیکی یکدیگر قرار دهیم، آنها
(الف) همدیگر را می‌ربایند. (ب) یکدیگر را می‌رانند.
(ج) تأثیری بر همدیگر ندارند.

پرسشها

۱. دو کرهٔ فلزی در اختیار داریم که روی پایه‌های عایق قابل حمل نصب شده‌اند. روشی بیابید که بتوان بارهای مساوی و با علامت مخالف را روی آنها قرار داد. می‌توانید از میلهٔ شیشه‌ای که با ابریشم مالش داده شده است استفاده کنید، ولی میله نباید با کره‌ها تماس پیدا کند. برای اینکه روش پیشنهادی شما عملی شود، آیا ضرورت دارد که کره‌ها یک اندازه باشند؟

۲. در پرسش ۱، روشی را پیشنهاد کنید که به کره‌ها بارهای الکتریکی مساوی و هم‌علامت بدهد. بازهم، برای اینکه روش پیشنهادی شما عملی بشود، آیا ضرورت دارد که کره‌ها هم‌اندازه باشند؟

۳. یک میلهٔ باردار قطعات بسیار ریز چوب‌پنبهٔ خشک را جذب می‌کند،

که این ذرات پس از تماس با میله، اغلب به‌شدت از آن وا می‌جهند. در این باره توضیح دهید.

۴. اگر در پرسشهای چندگزینه‌ای ۱، ۲، و ۳ یکی از اجسام A و B، و C بدون بار باشند، پاسخ شما چگونه تغییر خواهد کرد؟

۵. آزمایشهای توصیف‌شده در بخش ۲۵ـ۲ را می‌توان با فرض وجود چهار نوع بار؛ یعنی، بار روی شیشه، ابریشم، پلاستیک و پوست توضیح داد. چه استدلالی در مخالفت با این طرح می‌توان ارائه داد؟

۶. بار مثبتی را به یک رسانای عایق‌بندی‌شدهٔ بدون بار خیلی نزدیک کرده‌ایم. هنگامی که بار در نزدیکی رساناست، آن را به زمین متصل کرده‌ایم. آیا این رسانا در دو حالت زیر بار مثبت یا منفی دارد یا اصلاً بار ندارد: (الف) اول بار مثبت را دور و سپس سیم اتصال به زمین را قطع کنیم و (ب) ابتدا سیم اتصال به زمین را قطع و سپس بار مثبت را دور کنیم.

۷. یک عایق باردار را می‌توان با عبور دادن آن از بالای یک شعله تخلیهٔ الکتریکی کرد. چگونگی این عمل را توضیح دهید.

۸. اگر سکه‌ای را به‌شدت با انگشتانتان مالش دهید، به نظر می‌رسد که با اصطکاک باردار نمی‌شود. چرا؟

۹. اگر به‌سرعت روی قالی راه بروید، اغلب به هنگام تماس با یک دستگیرهٔ فلزی شاهد جرقه‌زدن خواهید بود. (الف) چه عاملی سبب این جرقه می‌شود؟ (ب) چگونه می‌توان از وقوع آن جلوگیری کرد؟

۱۰. چرا آزمایشهای مربوط به الکتروستاتیک در روزهای مرطوب خوب انجام نمی‌شوند؟

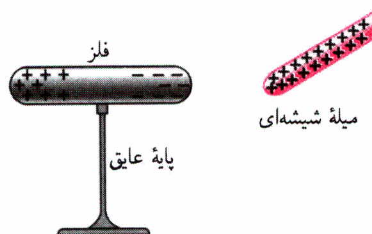
۱۱. چرا توصیه می‌شود که قبل از نصب هرگونه وسایل جنبی در داخل کامپیوتر شخصی خود ابتدا بدنهٔ فلزی آن را لمس کنید؟

۱۲. به شما می‌گویند که یک میلهٔ عایق حاوی بار الکتریکی است. چگونه می‌توانید درستی این گفته را تأیید و علامت بار را تعیین کنید؟

۱۳. اگر یک میلهٔ شیشه‌ای باردار را مطابق شکل ۲۵ـ۱۴ به یک سر میلهٔ فلزی بی‌بار علایق‌بندی‌شده نزدیک کنیم، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، الکترونها به یک سر آن کشیده می‌شوند. با وجود اینکه در میلهٔ فلزی چشمهٔ تقریباً بی‌پایانی از الکترونها وجود دارد، چرا جریان الکترونها متوقف می‌شود؟

۱۴. آیا در شکل ۲۵ـ۱۴ هیچ نیروی الکتریکی خالصی بر میلهٔ فلزی وارد می‌شود؟ در این باره توضیح دهید.

۱۵. شخصی که روی یک چارپایهٔ عایق‌بندی‌شده قرار دارد یک رسانای باردار عایق‌بندی‌شده را لمس می‌کند. آیا بار رسانا به‌طور کامل تخلیه می‌شود؟



شکل ۲۵ـ۱۴ پرسش ۱۳ و ۱۴.

۱۶. (الف) یک میلهٔ شیشه‌ای دارای بار مثبت جسم آویخته‌ای را جذب می‌کند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که جسم آویخته بار منفی دارد؟ (ب) یک میلهٔ شیشه‌ای دارای بار مثبت جسم آویخته‌ای را می‌راند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که جسم آویخته بار مثبت دارد؟

۱۷. گزارهٔ "نیروهای الکتروستاتیکی از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند" را توضیح دهید.

۱۸. آیا نیرویی که یک بار الکتریکی بر بار دیگر وارد می‌کند، با نزدیک‌شدن بارهای دیگر تغییر می‌کند؟

۱۹. محلول سولفات مس رساناست. در این مورد چه ذراتی نقش حاملان بار را به عهده دارند؟

۲۰. اگر الکترونها در فلزی مانند مس آزادانه جابه‌جا شوند، اغلب اوقات در می‌یابیم که به طرف سطح فلز در حرکت‌اند. چرا الکترونها به راه خودشان ادامه نمی‌دهند تا از فلز خارج شوند؟

۲۱. اگر بنیامین فرانکلین تصمیم گرفته بود که الکترونها را مثبت و پروتونها را منفی در نظر بگیرد، آیا هیچ تفاوت اساسی به‌وجود می‌آمد؟

۲۲. قانون کولن پیش‌بینی می‌کند نیرویی که یک بار نقطه‌ای بر بار نقطه‌ای دیگر وارد می‌کند با حاصلضرب دو بار متناسب است. برای تحقیق تجربی این موضوع در آزمایشگاه چه روشی را پیشنهاد می‌کنید؟

۲۳. توضیح دهید که چگونه هستهٔ اتم متشکل از ذراتی که یا خنثی هستند (نوترونها) یا بارهای یکسان دارند (پروتونها) می‌تواند پایدار باشد.

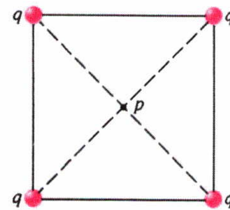
۲۴. الکترونی (با بار $-e=$) در اتم هلیم دور هستهٔ آن (بار $+2e=$) می‌چرخد. کدام ذره نیروی بیشتری بر ذرهٔ دیگر وارد می‌کند؟

۲۵. بار هر ذره یک ویژگی واقعی ذره و مستقل از وضعیت حرکت آن است. توضیح دهید که چگونه می‌توان درستی این عبارت را با انجام آزمایشهای بسیار دقیق که نشان می‌دهند اتم هیدروژن واقعاً از لحاظ الکتریکی خنثی است، تحقیق کرد.

۲۶. فرض کنید که بار الکتریکی شکل ۲۵ـ۱۱ به‌طور یکنواخت در سراسر طول میله توزیع نشده باشد بلکه در عوض بیشترین چگالی بار

در وسط میله باشد و با آهنگ یکنواختی به سمت دو سر کم شود. آیا اکنون نیرو دارای مؤلفهٔ z است؟ اگر این میله دارای همان مقدار بار q باشد که در توزیع یکنواخت وجود داشت، بزرگی مؤلفهٔ F_y با معادلهٔ (۲۵ـ۱۵) چگونه مقایسه می‌شود؟ این دو پرسش را برای وقتی که در وسط میله فقدان بار وجود دارد و چگالی بار با آهنگ یکسانی با دورشدن از مرکز میله افزایش پیدا می‌کند، پاسخ بدهید.

۲۷. بنابر قضیهٔ اِرن‌شاو هیچ ذره‌ای نمی‌تواند تحت تأثیر نیروهای الکتروستاتیکی صرف، در تعادل پایدار قرار بگیرد. اکنون نقطهٔ P را در مرکز مربعی در نظر بگیرید که در چهار رأس آن چهار بار مثبت مساوی، مطابق شکل ۲۵ـ۱۵، قرار دارد. اگر یک بار آزمون مثبت را در آن نقطه بگذارید ممکن است به نظر آید که این بار در تعادل پایدار قرار دارد. هر کدام از چهار ذرهٔ خارجی بار آزمون را به سمت P هُل می‌دهند. با وجود این، هنوز قضیهٔ اِرن‌شاو برقرار است. آیا می‌توانید بگویید چگونه؟



شکل ۲۵ـ۱۵ پرسش ۲۷.

۲۸. کوانتوم بار $۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$ کولن است. آیا یک کوانتوم جرم متناظر با آن وجود دارد؟

۲۹. معنی این عبارت که یک کمیت فیزیکی (الف) کوانتیده یا (ب) پایسته است، چیست؟ در این مورد مثالهایی بزنید.

۳۰. در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۳ نشان دادیم که نیروی الکتریکی در حدود $۱۰^{۳۹}$ مرتبه قوی‌تر از نیروی گرانشی است. آیا می‌توانید از این موضوع نتیجه بگیرید که اساساً یک کهکشان، ستاره، یا سیاره باید از لحاظ الکتریکی خنثی باشد؟

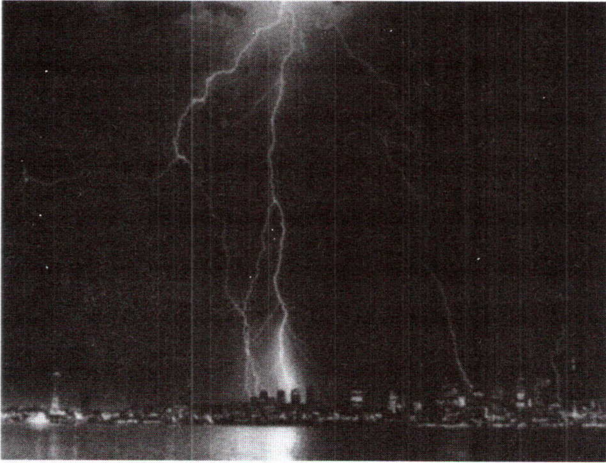
۳۱. از کجا می‌دانید که نیروهای الکتروستاتیکی عامل جاذبهٔ گرانشی بین، مثلاً، زمین و ماه نیستند؟

تمرینها

۲۵ـ۱ الکترومغناطیس: مقدمه

۲۵ـ۲ بار الکتریکی

۱. در یک نمونهٔ آذرخش (شکل ۲۵ـ۱۶) جریانی به‌شدت


شکل ۲۵ـ۱۶ تمرین ۱.

$۲٫۵ \times ۱۰^{۴}\,\mathrm{C/s}$ در مدت زمان $۲۰\,\mu\mathrm{s}$ جاری می‌شود. در این رویداد چقدر بار جابه‌جا می‌شود؟

۲۵ـ۳ رسانا و عایق

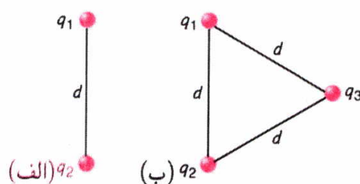
۲۵ـ۴ قانون کولن

۲. برای اینکه بزرگی نیروی ربایش الکتریکی بین بار نقطه‌ای $q_1 = ۲۶٫۳\,\mu\mathrm{C}$ و بار نقطه‌ای $q_2 = -۴۷٫۱\,\mu\mathrm{C}$ برابر با $۵٫۶۶\,\mathrm{N}$ باشد، فاصلهٔ بین این دو بار باید چقدر باشد؟

۳. یک بار نقطه‌ای $+۳٫۱۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ در فاصلهٔ $۱۲٫۳\,\mathrm{cm}$ از بار نقطه‌ای دیگری به مقدار $-۱٫۴۸ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C}$ قرارگرفته است. بزرگی نیروی وارد بر هر کدام از بارها را محاسبه کنید.

۴. دو ذرهٔ دارای بار مساوی که در فاصلهٔ $۳٫۲۰\,\mathrm{mm}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، از حال سکون رها می‌شوند. مشاهده می‌کنیم که شتاب اولیهٔ ذرهٔ اول $۷٫۲۲\,\mathrm{m/s^2}$ است و شتاب ذرهٔ دوم $۹٫۱۶\,\mathrm{m/s^2}$. جرم ذرهٔ اول $۶٫۳۱ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{kg}$ است. (الف) جرم ذرهٔ دوم و (ب) بزرگی بار هر یک از این دو ذره را معین کنید.

۵. در شکل ۲۵ـ۱۷ (الف) دو ذرهٔ باردار q_1 و q_2 را نشان داده‌ایم که در فاصلهٔ d از یکدیگر قرار گرفته‌اند.

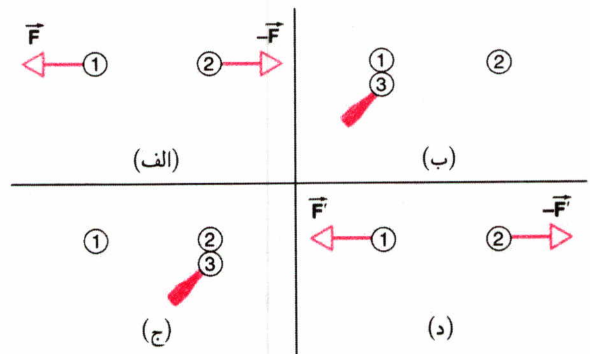


شکل ۲۵ـ۱۷ تمرین ۵.

(الف) شدت نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ q_1 را معین کنید. فرض

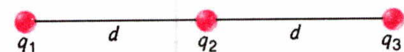
کنید $q_1 = q_2 =$ ۲۱٫۳μC و فاصلهٔ $d =$ ۱٫۵۲ m است. (ب) ذرهٔ باردار سومی ۲۱٫۳μC $= q_3$، را به این محدوده وارد می‌کنیم و آن را مطابق ۲۵ـ۱۷(ب) قرار می‌دهیم. اکنون شدت نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ q_1 را معین کنید.

۶. دو کرهٔ رسانای یکسان ۱ و ۲ حامل بارهای الکتریکی مساوی هستند و در فاصله‌ای که در مقایسه با قطر آنها بسیار بزرگ است تثبیت شده‌اند. این دو کره یکدیگر را با نیروی الکتریکی ۸۸ mN دفع می‌کنند. اکنون فرض کنید که کرهٔ مشابهٔ ۳ که دارای یک دستهٔ عایق است و در آغاز هیچ بار الکتریکی ندارد، ابتدا با کرهٔ ۱ و سپس با کرهٔ ۲ تماس پیدا می‌کند و سرانجام آن را از محدودهٔ این بارها دور می‌کنیم. اکنون نیروی بین کره‌های ۱ و ۲ را پیدا کنید. نگاه کنید به شکل ۲۵ـ۱۸.



شکل ۲۵ـ۱۸ تمرین ۶.

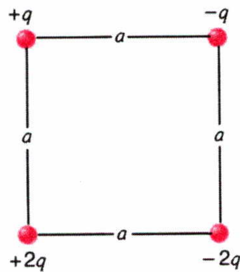
۷. سه ذرهٔ باردار مطابق شکل ۲۵ـ۱۹ روی یک خط مستقیم و به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. بارهای q_1 و q_2 ثابت نگه داشته شده‌اند. درمی‌یابیم، بار q_3 که امکان حرکت دارد، تحت تأثیر نیروهای الکتریکی در حال تعادل است. q_1 را برحسب q_2 به‌دست آورید.



شکل ۲۵ـ۱۹ تمرین ۷.

۸. در شکل ۲۵ـ۲۰، مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) عمودیِ نیروی الکتریکیِ برایند وارد بر بار واقع در گوشهٔ پایین سمت چپ را پیدا کنید. فرض کنید که $q =$ ۱٫۱۳μC و $a =$ ۱۵٫۳ cm است. بارها در حال سکون‌اند.

۹. دو بار مثبت مساوی، هر یک به اندازهٔ ۴٫۱۸μC، و یک بار منفی به مقدار ۶٫۳۶μC− را در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به



شکل ۲۵ـ۲۰ تمرین ۸.

ضلع ۱۳٫۰ cm قرار داده‌ایم. نیروی الکتریکی وارد بر بار منفی را معین کنید.

۱۰. دو کرهٔ کوچک دارای بار مثبت هستند، به‌طوری که بار الکتریکی کل هر دو کره برابر با ۵۲٫۶μC است. وقتی این دو کره در فاصلهٔ ۱٫۹۴ m از یکدیگر قرار بگیرند با نیرویی برابر با ۱٫۱۹ N همدیگر را دفع می‌کنند. بار الکتریکی هر یک از دو کره را محاسبه کنید.

۱۱. دو بار ثابت ۱٫۰۷μC+ و ۳٫۲۸μC− در فاصلهٔ ۶۱٫۸ cm از یکدیگر قرار گرفته‌اند. بار الکتریکی سوم را درکجا قرار دهیم که هیچ نیروی برایندی بر آن وارد نشود؟

۱۲. سه گوی کوچک، هر یک به جرم ۱۳٫۳ g، به‌وسیلهٔ سه رشته نخ ابریشمی، هر یک به طول ۱٫۱۷ m از نقطهٔ مشترکی آویخته شده‌اند. گویها دارای بار مساوی و در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۵٫۳ cm قرار گرفته‌اند. بار هر یک از گویها را معین کنید.

۱۳. مکعبی به ضلع a حاوی بار الکتریکی در هر یک از رأسهاست. نشان دهید که برایند نیروی الکتریکی وارد بر هر یک از بارها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F = \frac{۰٫۲۶۲ q^2}{\epsilon_0 a^2}$$

این نیرو در امتداد قطری از مکعب است که از آن رأس می‌گذرد و جهت آن به سمت خارج از مکعب است.

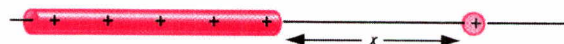
۲۵ـ۵ توزیع پیوستهٔ بار

۱۴. معادلهٔ (۲۵ـ۱۵) با این فرض به‌دست آمد که بار q_0 روی بخش مثبت محور y قرار داشته باشد. (الف) آیا معادلهٔ (۲۵ـ۱۵) برای وقتی که بار q_0 روی بخش منفی محور y قرار داشته باشد معتبر است؟ در این باره توضیح دهید. (ب) معادله‌ای مشابه معادلهٔ (۲۵ـ۱۵) برای وقتی که بار q_0 در فاصلهٔ x از میله روی بخش مثبت یا منفی محور x قرارگرفته باشد بنویسید. (ج) برای وقتی که بار q_0 در فاصلهٔ d از میله و روی نیمساز بخش مثبت محورهای x و y، یعنی در زاویهٔ ۴۵°

قرار داشته باشد معادله‌ای به‌صورت مؤلفه‌های برداری برای نیروی وارد بر q_0 بنویسید. (د) معادلهٔ مؤلفه‌ای بردار نیروی وارد بر بار q_0 را، وقتی که این بار در یک نقطهٔ دلخواه x, y در صفحهٔ xy قرار گرفته است بنویسید. بررسی کنید، آیا وقتی که نقطهٔ x, y در هر یک از چهار ربع صفحهٔ xy قرار می‌گیرد، مؤلفه‌های بردار نیرو علامت درست را به‌دست می‌دهند.

۱۵. (الف) با شروع از معادلهٔ (۲۵ـ۱۶)، معادله‌ای برداری بنویسید که نیروی وارد بر q_0 را به‌دست دهد؛ اعم از اینکه q_0 در جهت مثبت و یا منفی محور z بار حلقه‌ای قرار داشته باشد. (ب) همین کار را با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۵ـ۱۷) در مورد یک قرص حامل بار به‌کار برید.

۱۶. نیروی وارد بر بار مثبت نقطه‌ای q را که به فاصلهٔ x از یک سر میلهٔ باردارشده‌ای، در امتداد محور آن، مطابق شکل ۲۵ـ۲۱، قرار گرفته است، معین کنید. بار Q به‌طور یکنواخت در سرتاسر میلهٔ به طول L توزیع شده است.



شکل ۲۵ـ۲۱ تمرین ۱۶.

۱۷. میله و بار q_0 نشان داده‌شده در شکل ۲۵ـ۱۱ را در نظر بگیرید. در کجا می‌توانید یک بار نقطه‌ای q (برابر با بار موجود روی میله) را قرار دهید که بار q_0 در حال تعادل باشد (از گرانش چشم بپوشید)؟ این مسئله را برای دو حالت زیر حل کنید: (الف) بار q مثبت است و (ب) بار q منفی است.

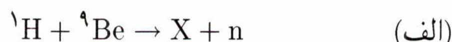
۱۸. نشان دهید که تعادل بار q_0 در تمرین ۱۷ ناپایدار است. (راهنمایی: این مسئله را می‌توان از طریق استدلال مبتنی بر تقارن حل کرد، و درواقع فقط به اندکی محاسبهٔ ریاضی نیاز دارد!)

۱۹. فرض کنید که میلهٔ شکل ۲۵ـ۱۱، در نیمهٔ بالایی دارای چگالی بار یکنواخت مثبت λ باشد و در نیمهٔ پایینی چگالی بار یکنواخت $-\lambda$. برایند نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q_0 را معین کنید.

۲۰. چهار میلهٔ باردارشده چهار ضلع یک مربع را در صفحهٔ افقی xy تشکیل می‌دهند. طول هر کدام از میله‌ها $L = 25.0\ \text{cm}$ است و هر یک از میله‌ها حامل بار مثبت یکنواخت توزیع‌شدهٔ Q است. کرهٔ کوچکی، که می‌توان آن را یک بار نقطه‌ای انگاشت، با جرم $3.46 \times 10^{-4}\ \text{g}$ و بار الکتریکی $q = +2.45 \times 10^{-12}\ \text{C}$، در فاصلهٔ $z = 21.4\ \text{cm}$ بالای مرکز مربع در وضعیت تعادل است. مقدار Q را معین کنید.

۲۵ـ۶ پایستگی بار الکتریکی

۲۱. در واکنشهای هسته‌ای زیر عنصر X را شناسایی کنید



(الف) $^{1}\text{H} + {}^{9}\text{Be} \rightarrow \text{X} + \text{n}$



(ب) $^{12}\text{C} + {}^{1}\text{H} \rightarrow \text{X}$



(ج) $^{15}\text{N} + {}^{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}\text{He} + \text{X}$

(راهنمایی: به پیوست هـ مراجعه کنید.)

۲۲. در واپاشی پرتوزای ^{238}U ($^{238}\text{U} \rightarrow {}^{4}\text{He} + {}^{234}\text{Th}$)، مرکز ذرهٔ خارج‌شدهٔ ^{4}He، در یک زمان معین، در فاصلهٔ $12 \times 10^{-15}\ \text{m}$ از مرکز هستهٔ بجا ماندهٔ ^{234}Th قرار دارد. در این لحظه، (الف) نیروی وارد بر ذرهٔ ^{4}He و (ب) شتاب آن چقدر است؟

۲۳. در یک بلور نمک، یک اتم سدیم یکی از الکترونهایش را به یکی از اتمهای کلر مجاورش منتقل می‌کند و یک پیوند یونی به‌وجود می‌آورد. یون مثبت سدیم و یون منفی کلر با نیروی الکتروستاتیکی یکدیگر را می‌ربایند. نیروی ربایش الکتروستاتیکی را در صورتی که فاصلهٔ بین یونها ۲۸۲ پیکومتر باشد محاسبه کنید.

۲۴. نیروی الکتروستاتیکی بین دو یون یکسان که در فاصلهٔ $5.0 \times 10^{-10}\ \text{m}$ از هم قرارگرفته‌اند برابر $3.7 \times 10^{-9}\ \text{N}$ است. (الف) بار هر یون را محاسبه کنید. (ب) هر یون چند الکترون از دست داده است؟

۲۵. تصور می‌شود که نوترون از یک کوارک "بالا" با بار $+\frac{2}{3}e$ و دو کوارک "پایین" با بار $-\frac{1}{3}e$ تشکیل شده است. اگر کوارکهای پایین در داخل نوترون در فاصلهٔ $2.6 \times 10^{-15}\ \text{m}$ از هم قرار داشته باشند، نیروی رانش الکتریکی بین آنها چقدر است؟

۲۶. (الف) چند الکترون را باید از یک سکه خارج کنیم تا بار باقی مانده در آن $+1.15 \times 10^{-7}\ \text{C}$ شود. (ب) این مقدار چه کسری از کل الکترونهای موجود در سکه را تشکیل می‌دهد؟ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱ را ببینید.

۲۷. الکترونی در نزدیکی سطح زمین در خلأ قرار دارد. یک الکترون دیگر را باید کجا قرار دهیم تا برایند نیروی ناشی از الکترون دوم و گرانش وارد بر الکترون اول برابر صفر شود؟

۲۸. بار الکتریکی موجود در $75.0\ \text{kg}$ الکترون را برحسب کولن پیدا کنید.

۲۹. بارهای مثبت موجود در یک لیوان آب را برحسب کولن محاسبه کنید. فرض کنید که حجم یک لیوان آب برابر $250\ \text{cm}^3$ باشد.

۳۰. دو دانشجوی فیزیک یکی به جرم $52.0\ \text{kg}$ و دیگری به جرم $90.7\ \text{kg}$ در فاصلهٔ $28.0\ \text{m}$ از هم قرار دارند. فرض کنید که هرکدام

از آنها در میزان بارهای مثبت و منفیشان به اندازهٔ ۰٫۰۱٪ عدم توازن داشته باشند، یکی از این دانشجویان بار مثبت دارد و دیگری بار منفی. نیروی ربایش الکتروستاتیکی بین آنها را تخمین بزنید. (راهنمایی: دانشجویان را با کره‌هایی از آب جایگزین کنید و نتایج تمرین ۲۹ را مورد استفاده قرار دهید.)

۳۱. (الف) چه مقدار بار مثبت و به میزان مساوی باید روی زمین و روی ماه قرار داد تا ربایش گرانشی آنها را خنثی کند؟ آیا برای حل این مسئله نیاز به دانستن فاصلهٔ زمین تا ماه دارید؟ اگر پاسخ مثبت است، چرا و اگر منفی است، چرا؟ (ب) برای تأمین بار مثبت محاسبه‌شده در قسمت (الف) به چند تن متریک هیدروژن نیاز داریم؟ جرم مولی هیدروژن $1{,}008\ \mathrm{g/mol}$ است.

مسئله‌ها

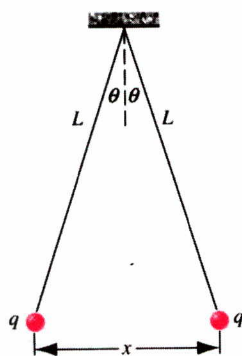
۱. دو کرهٔ رسانای یکسان، که حامل بارهای با علامت مخالف‌اند، وقتی در فاصلهٔ $50{,}0\ \mathrm{cm}$ از یکدیگر قرار بگیرند با نیرویی برابر $0{,}108\ \mathrm{N}$ یکدیگر را می‌ربایند. ناگهان دو کره را با یک رشته سیم رسانای نازک به هم متصل می‌کنیم، و سپس سیم را برمی‌داریم، پس از این رویداد کره‌ها یکدیگر را با نیرویی برابر با $0{,}0360\ \mathrm{N}$ می‌رانند. بار اولیهٔ روی هر یک از دو کره چقدر بوده است؟

۲. بار Q در هر یک از دو رأس مقابل یک مربع قرار گرفته است. بار دیگری مانند q را در هر یک از دو رأس مقابل دیگر مربع قرار می‌دهیم. (الف) اگر نیروی الکتریکی برایند وارد بر Q برابر با صفر باشد، Q و q با هم چه رابطه‌ای دارند؟ (ب) آیا می‌توان q را چنان انتخاب کرد که نیروی الکتریکی برایند روی هر باری برابر با صفر شود؟ در این باره توضیح دهید.

۳. دو بار نقطه‌ای آزاد $+q$ و $+4q$ در فاصلهٔ L از یکدیگر قرار گرفته‌اند. بار سومی را چنان قرار می‌دهیم که کل مجموعه در حال تعادل قرار می‌گیرد. (الف) علامت، مقدار و محل این بار سوم را معین کنید. (ب) نشان دهید که این تعادل ناپایدار است.

۴. دو گوی مشابه بسیار کوچک هر کدام به جرم m از دو رشته نخ ابریشمی به طول L آویخته شده‌اند و هر یک حامل بار یکسان q هستند (شکل ۲۵ـ۲۲). فرض کنید زاویهٔ θ آن‌قدر کوچک است که می‌توانیم $\tan\theta$ را تقریباً با $\sin\theta$ جایگزین کنیم. (الف) نشان دهید که در این حد تقریب و در حالت تعادل داریم

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$



شکل ۲۵ـ۲۲ مسئله‌های ۴، ۵، و ۶.

که x همان فاصلهٔ بین دو گوی است. (ب) اگر $L = 122\ \mathrm{cm}$، $m = 11{,}2\ \mathrm{g}$ و $x = 4{,}70\ \mathrm{cm}$ باشد، مقدار q چقدر است؟

۵. اگر گویهای شکل ۲۵ـ۲۲ رسانا باشند، (الف) پس از آنکه یکی از آنها تخلیه شد چه اتفاقی خواهد افتاد؟ دربارهٔ پاسخ خود توضیح دهید. (ب) فاصلهٔ جدایی حالت تعادل جدید را معین کنید.

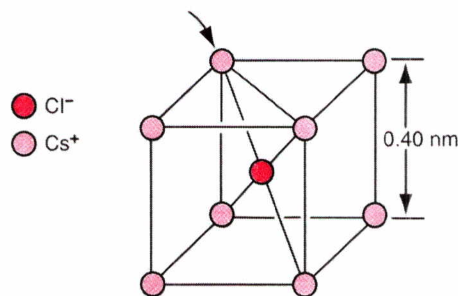
۶. فرض کنید که گویهای مسئلهٔ ۴ با آهنگ $1{,}20\ \mathrm{nC/s}$ بار خود را از دست می‌دهند. گویها در ابتدا با چه سرعت لحظه‌ای نسبی (مساوی dx/dt) به هم نزدیک می‌شوند؟

۷. می‌خواهیم بار مشخص Q را به دو بخش $Q-q$ و q تقسیم کنیم. اگر این دو قسمت را در فاصله معینی از یکدیگر قرار دهیم و بخواهیم که نیروی رانشی کولنی در این حالت بیشینه باشد، q و Q باید چه ارتباطی با هم داشته باشند؟

۸. دو بار مثبت $+Q$ در فاصلهٔ d از یکدیگر ثابت شده‌اند. ذره‌ای با بار منفی $-q$ و جرم m را در وسط خطی که دو بار را به هم متصل می‌کند قرار داده‌ایم. سپس بار $-q$ را در جهت عمود بر خط اتصال بین دو بار Q جابه‌جا کرده آن را رها می‌کنیم. نشان دهید که حرکت این ذره یک حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب $(\epsilon_0 m\pi^3 d^3/qQ)^{1/2}$ است.

۹. دورهٔ تناوب مربوط به حرکت نوسانی یک ذره با بار مثبت $+q$ را که از نقطهٔ وسط خط اتصال بین دو بار $+Q$ مسئلهٔ ۸ و در امتداد آن خط اندکی جابه‌جا شده باشد محاسبه کنید.

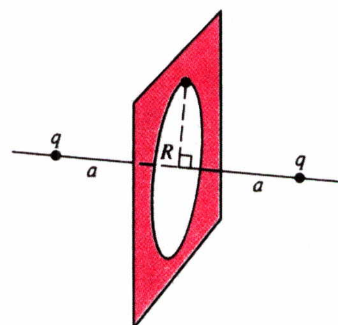
۱۰. در ترکیب CsCl (سزیم کلرید)، اتمهای سزیم در گوشه‌های مکعبی قرار گرفته‌اند که یک اتم کلر در مرکز آن وجود دارد. طول ضلع این مکعب $0{,}40\ \mathrm{nm}$ است؛ شکل ۲۵ـ۲۳ را ببینید. هر کدام از اتمهای سزیم یک الکترون کم دارد و اتم کلر حامل یک الکترون اضافی است. (الف) شدت برایند نیروی الکتریکی وارد بر اتم کلر از سوی هشت اتم سزیم نشان داده‌شده در شکل چقدر است؟ (ب) فرض



شکل ۲۵ـ۲۳ مسئلهٔ ۱۰.

کنید اتم Cs که در شکل با علامت پیکان نشان داده شده است وجود ندارد (نقص بلور). در این صورت برایند نیروی الکتریکی وارد بر اتم Cl از سوی هفت اتم باقی‌ماندهٔ Cs چقدر است؟

۱۱. دو بار نقطه‌ای مثبت و مساوی q را در فاصلهٔ $۲a$ از هم قرار داده‌ایم. یک بار آزمون نقطه‌ای را روی صفحهٔ عمود منصف خطی قرار داده‌ایم که بارها را به هم متصل می‌کند. شعاع R دایره‌ای را در این صفحه معین کنید که برای آن نیروی وارد بر ذرهٔ آزمون دارای بیشترین مقدار باشد. شکل ۲۵ـ۲۴ را ببینید.



شکل ۲۵ـ۲۴ مسئلهٔ ۱۱.

مسئله‌های کامپیوتری

۱. نیروی ربایشی بین دو حلقهٔ باردار را، که بارهای $+q$ و $-q$ به‌طور یکنواخت روی آنها توزیع شده است، محاسبه کنید. محور حلقه‌ها محور x و شعاع هر حلقه برابر با R و فاصلهٔ بین دو حلقه برابر با $۲R$ است. پاسخ نهایی شما باید به‌صورت $F = C_r q^۲/۴\pi R^۲$ باشد، که در اینجا به C_r یک ثابت بدون بعد است که باید آن را معین کنید.

۲. مسئلهٔ رایانه‌ای ۱ را برای حالتی تکرار کنید که به‌جای دو حلقه، دو قرص داشته باشیم که بارهای $+q$ و $-q$ به‌طور یکنواخت روی آنها توزیع شده باشد. پاسخ نهایی شما باز هم به‌صورت $F = C_d q^۲/۴\pi\epsilon_\circ R^۲$ خواهد بود. در اینجا هم C_d یک ثابت بدون بعد است که آن را مشخص می‌کنید؛ اما C_d مربوط به قرص با C_r مربوط به حلقه تفاوت دارد.

۳. نیروی ربایش بین دوکرهٔ توپر را، که بارهای $+q$ و $-q$ به‌طور یکنواخت در آنها توزیع شده است، محاسبه کنید. کره‌ها روی محور x قرار دارند و شعاع هر کدام از آنها R است. فاصلهٔ بین مراکز این دو کره $d > ۲R$ است. پاسخ نهایی شما باید به‌صورت $F = C_s q^۲/۴\pi\epsilon_\circ d^۲$ باشد، که در اینجا C_s یک ثابت بدون بعد است که آن را مشخص می‌کنید.

۴. شعاع یک حلقه یکنواخت با بار Q برابر $R = ۱٫\circ\circ$ cm است. الکترونی مقید به حرکت در داخل صفحهٔ این حلقه است. (الف) فرض کنید که $Q = -۱\circ\circ\mu$C است. سرعت الکترونی را معین کنید که در مسیری دایره‌ای و هم‌مرکز با حلقه در شعاع $r = \circ٫۵\circ$ cm دوران می‌کند. (ب) فرض کنید که $Q = +۱\circ\circ\mu$C باشد، در این حالت سرعت الکترونی را معین کنید که در مسیری دایره‌ای و هم‌مرکز با حلقه در شعاع $r = ۱٫۵\circ$ cm دوران می‌کند. (ج) با انتگرال‌گیری عددی از حرکت، نشان دهید که هیچ‌یک از دو مدار پایدار نیست.

۲۶

میدان الکتریکی

بارهای الکتریکی می‌توانند از فواصل بسیار دور با یکدیگر برهم‌کنش داشته باشند. الکترونها یا اتمهای یونیده در دورترین فواصل شناخته‌شدهٔ عالم می‌توانند نیروهایی را اعمال کنند که سبب حرکت الکترونها در سطح زمین شوند.

چگونه می‌توانیم این‌گونه برهم‌کنشها را توضیح دهیم؟ این کار را با بهره‌گیری از میدان الکتریکی انجام می‌دهیم —بارهای موجود در فواصل بسیار دور میدانی الکتریکی ایجاد می‌کنند، که در سرتاسر فضای بین زمین و سرچشمهٔ میدان وجود دارد. حرکت بارهای الکتریکی سبب پدید آمدن آشفتگیهایی در میدان می‌شود، این آشفتگیها با سرعت مسیر نور در فضا حرکت می‌کنند و چند صباحی بعد، وقتی که سبب حرکت الکترونها در مدارهای موجود در روی زمین شدند، (به‌صورت تابش) آشکارسازی می‌شوند.

در این فصل فقط به میدان الکتریکی استاتیک می‌پردازیم که از بارهای الکتریکی ساکن سرچشمه می‌گیرند. در قسمتهای بعدی این کتاب این مبحث را گسترش می‌دهیم تا نشان دهیم چگونه بارهای الکتریکی متحرک سبب ایجاد میدانهایی مرتبط با تابش الکترومغناطیسی، مانند امواج رادیویی یا نور، می‌شوند.

۲۶ـ۱ میدان چیست؟

در اتاقی که نشسته‌اید دما در هر نقطهٔ آن مقدار معینی دارد. شما می‌توانید با قرار دادن دماسنج در هر نقطه دما را اندازه‌گیری کنید. سپس می‌توانید توزیع دما را به دو صورت نمایش دهید: یا با ترسیم نقشهٔ اتاق و نشان دادن دما در هر نقطه، یا به‌صورتی دیگر با مشخص‌کردن یک تابع ریاضی $T(x, y, z)$ که می‌توان با قراردادن x, y, z، دما را در آن نقطه محاسبه کرد. توزیع دما را، چه به‌صورت یک نقشه و چه به‌صورت یک تابع نمایش داده شود، میدان دما می‌خوانیم. به‌صورتی مشابه می‌توانیم فشار را در هر نقطه اندازه‌گیری کنیم و میدان فشار را معین کنیم. این میدانها نمونه‌هایی از میدانهای نرده‌ای هستند، زیرا دما و فشار هر دو کمیتهای نرده‌ای‌اند. اگر دما و فشار برحسب زمان تغییر نکنند، میدانهای آن میدانهای استاتیکی‌اند؛ در غیر این صورت این میدانها، میدانهای متغیر با زمان‌اند که می‌توان آنها را به‌صورت ریاضی با یک تابع وابسته به زمان مانند $T(x, y, z, t)$ نمایش داد.

از سوی دیگر، اگر می‌خواستید سرعت شارش یک شاره در هر نقطه را اندازه‌گیری کنید، نیاز داشتید که مقدار بردار سرعت در هر نقطه را معین کنید. باز هم، می‌توانید یک نقشه ترسیم کنید و مقدار و جهت بردار سرعت را در آن نشان دهید، یا می‌توانید یک تابع ریاضی مانند $\vec{\mathbf{v}}(x, y, z)$ مشخص کنید که به‌وسیلهٔ آن امکان محاسبهٔ سرعت شارش در هر نقطه وجود داشته باشد. این میدان نمونه‌ای

از یک میدان برداری است.

میدان گرانشی زمین نمونهٔ دیگری از یک میدان برداری است. می‌توانید مقدار نیروی گرانشی در هر نقطه را با وصل‌کردن یک جرم آزمون $m_\circ$ به یک ترازوی فنری محاسبه کنید. سپس می‌توانید بزرگی و جهت بردار نیروی گرانشی $\vec{\mathbf{F}}$ را در هر نقطه تعیین کنید. آنگاه می‌توانید نتایج به‌دست‌آمده را یا با ترسیم نقشه‌ای که بزرگی و جهت نیروی گرانشی را نشان می‌دهد به نمایش بگذارید یا با مشخص‌کردن یک تابع ریاضی $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z)$. ولی، چنین نقشه یا نموداری برای سایرین چندان مفید نخواهد بود مگر آنکه دقیقاً همان جرم آزمونی را به‌کار ببرند که شما مورد استفاده قرار دادید. زیرا نیرویی را که شما اندازه‌گیری می‌کنید با مقدار جرم آزمون نسبت مستقیم دارد، روال بهتر آن است که نقشه یا نموداری را ایجاد کنیم که به‌جای نیروی وارد بر جرم آزمون، نیروی وارد به یکای جرم آزمون، یعنی $\vec{\mathbf{F}}/m_\circ$، را نشان دهد. این کمیت، که حالا دارای یکای $\mathrm{N/kg}$ است، مستقل از جرم $m_\circ$ آزمون است. انتخاب جرمهای آزمون با ابعاد و اندازه‌های متفاوت، در این حالت نقشه‌های دقیقاً یکسانی را به‌دست می‌دهد که مقادیر نیرو بر واحد جرم آنها در هر نقطه یکسان است.* کمیت $\vec{\mathbf{F}}/m_\circ$ را میدان گرانشی می‌نامیم. همچنین، درمی‌یابیم که این کمیت برابر با شتاب سقوط آزاد $\vec{\mathbf{g}}$ د ر هر نقطه است:

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m_\circ} \qquad (۱_۲۶)$$

میدان $\vec{\mathbf{g}}$ برداری است که جهتش جهت نیروی گرانش در هر نقطه را مشخص می‌کند و بزرگی آن مبین ”شدت“ اثر گرانش در آن نقطه است. می‌توانیم نیروی وارد بر هر جسم با جرم m در هر نقطه را با ضرب‌کردن $\vec{\mathbf{g}}$ مربوط به آن نقطه در مقدار جرم آن جسم معین کنیم:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}} \qquad (۲_۲۶)$$

در این فصل، مفهوم سودمند میدان الکتریکی را بسط می‌دهیم، که بر روند مشابهی پایه‌گذاری شده که شامل تعیین نیروی الکتریکی بر واحد بار الکتریکی است (و نه نیروی گرانشی بر واحد جرم). نظر به اینکه با یک نیرو سروکار داریم. میدان الکتریکی یک میدان برداری است. در اینجا فقط به میدانهای استاتیکی یا ایستا می‌پردازیم، ولی بعداً که تابش الکترومغناطیسی را مورد مطالعه قرار دادیم، به میدانهای الکتریکی متغیر با زمان خواهیم پرداخت.

قبل از اینکه مفهوم میدانها به‌طور گسترده‌ای پذیرفته شود، چنین تصور می‌شد که نیروی اعمال‌شده توسط یک جسم گرانشی بر جسم دیگر یک برهم‌کنش مستقیم و لحظه‌ای است. این دیدگاه، که موسوم به کنش از دور است، در مورد نیروهای الکترومغناطیسی نیز به‌کار می‌رفت. در حالت مربوط به نیروهای گرانشی این برهم‌کنش را می‌توان به‌صورت شیمیایی زیر نشان داد

جرم ⇆ جرم

که حکایت از برهم‌کنش مستقیم دو جسم با یکدیگر دارد. براساس این دیدگاه اثر جابه‌جایی یک جسم به‌طور لحظه‌ای به جسم دیگر انتقال پیدا می‌کند. این دیدگاه ناقض نظریهٔ نسبیت خاص است که بیشینهٔ سرعت انتقال این‌گونه اطلاعات را به سرعت سیر نور، c، محدود می‌کند. تعبیر حاضر را، که بر مفهوم میدان بنا نهاده شده است، می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد

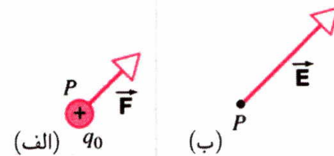
جرم ⇄ میدان ⇆ جرم

که در این تعبیر هر جسم به‌طور مستقیم با جسم دیگر برهم‌کنش نمی‌کند بلکه با میدان گرانشی ایجادشده توسط آن برهم‌کنش می‌کند. یعنی، اینکه جرم اول میدانی ایجاد می‌کند که در هر نقطه از فضا مقدار معینی دارد؛ آنگاه جرم دوم با این میدان در محل خاص خودش برهم‌کنش می‌کند. میدان نقش میانجی بین دو جسم را بازی می‌کند. نیروی وارد بر جسم دوم را می‌توان از معادلهٔ (۲۶_۲) به‌دست آورد، مشروط بر آنکه مقدار میدان $\vec{\mathbf{g}}$ ناشی از جسم اول را بدانیم. موقعیت از دیدگاه جرم اول کاملاً متقارن است؛ یعنی جسم اول با میدان گرانشی ایجادشده توسط جسم دوم برهم‌کنش می‌کند. تغییر در موقعیت یک جرم سبب تغییراتی در میدان گرانشی آن می‌شود؛ این تغییرات با سرعت نور انتشار می‌یابند، به‌طوری که مفهوم میدان با محدودیت ایجادشده به‌وسیلهٔ نسبیت خاص همخوانی دارد.

۲۶_۲ میدان الکتریکی

توصیف پیشین میدان گرانش را می‌توان مستقیماً در مورد الکتروستاتیک به‌کار برد. قانون کولن در مورد نیرویی که یک بار الکتریکی بر بار دیگر

* معمولاً می‌گوییم که جرم آزمون $m_\circ$ باید کوچک باشد. یعنی، نمی‌خواهیم که جرم آزمون میدان گرانشی زمین را تغییر دهد. مثلاً، اگر از جسمی به اندازهٔ ماه به‌عنوان جرم آزمون استفاده می‌کردیم، نیروی گرانشی آن روی زمین سبب ایجاد نیروهای کشندی می‌شود که توزیع جرم روی زمین را تغییر می‌دهد و از آن رو سبب تغییر نیروی گرانشی در مکانهای مختلف می‌شود. برای جلوگیری از وقوع چنین تغییراتی، جرم آزمون $m_\circ$ را خیلی کوچکتر از جرم زمین درنظر می‌گیریم.



شکل ۲۶ـ۱ (الف) اجسام باردار موجود در محیط نیروی $\vec{F}$ را بر بار آزمون مثبت q_0 در نقطهٔ P وارد می‌کنند. (ب) میدان الکتریکی ناشی از اجسام باردار موجود در محیط در نقطهٔ P.

وارد می‌کند ما را تشویق می‌کند که به کنش از دور بیندیشیم، که می‌توان آن را به‌صورت زیر نمایش داد:

بار الکتریکی ⇆ بار الکتریکی

باز هم با معرفی میدان به‌عنوان میانجی بین بارها، برهم‌کنش را می‌توانیم به‌صورت دیگری نمایش دهیم

بار الکتریکی ⇆ میدان ⇆ بار الکتریکی

یعنی، اینکه بار الکتریکی اول یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند، و بار دوم با میدان ناشی از بار اول برهم‌کنش می‌کند. بنابراین، مسئلهٔ تعیین برهم‌کنش بین بارهای الکتریکی به دو مسئلهٔ جداگانه تبدیل می‌شود: (۱) تعیین میدان الکتریکی ایجادشده توسط بار اول در هر نقطه‌ای از فضا، از طریق اندازه‌گیری یا محاسبه، و (۲) محاسبهٔ نیرویی که میدان ناشی از بار اول بر بار دوم که در نقطهٔ مشخصی از فضا قرار گرفته است وارد می‌کند.

در قیاس با معادلهٔ (۲۶ـ۱) برای میدان گرانشی، می‌توانیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ وابسته به مجموعهٔ معینی از بارهای الکتریکی را برحسب نیروی اعمال‌شده بر یک بار مثبت آزمون q_0 در یک نقطهٔ مشخص تعریف کنیم، یا به عبارتی

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (۲۶\text{ـ}۳)$$

جهت بردار $\vec{E}$ همان جهت بردار نیروی $\vec{F}$ است، زیرا q_0 یک کمیت اسکالر مثبت است. میدان الکتریکی را که به این‌صورت تعریف کرده‌ایم مستقل از اندازه و بزرگی بار آزمون q_0 است.

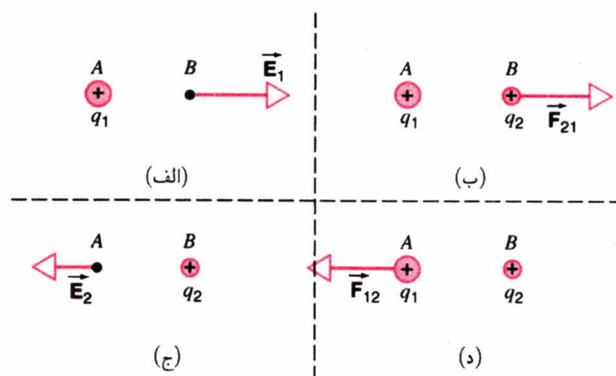
در شکل ۲۶ـ۱ نشان داده‌ایم که چگونه می‌توان از این تعریف برای تعیین میدان الکتریکی در نقطهٔ مشخص P استفاده کرد. بار آزمون مثبت q_0 را در نقطهٔ P قرار می‌دهیم، و نیروی الکتروستاتیک وارد بر q_0 را که ناشی از اجسام موجود در اطراف آن است معین می‌کنیم (این اجسام را در شکل نشان نداده‌ایم). سپس از معادلهٔ (۲۶ـ۳) میدان الکتریکی نشان داده‌شده در شکل ۲۶ـ۱(ب) را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $\vec{E}$ و $\vec{F}$، همان‌طور که از تعریف معادلهٔ (۲۶ـ۳) نتیجه می‌شود، موازی هستند.

جدول ۲۶ـ۱ برخی از میدانهای الکتریکی

موقعیت	میدان الکتریکی (N/C)
روی سطح هستهٔ اورانیم	3×10^{21}
در اتم هیدروژن، با شعاع میانگین الکترون	5×10^{11}
تخلیهٔ الکتریکی در هوا	3×10^{6}
در روی غلتک باردارشدهٔ یک دستگاه فتوکپی	10^{5}
در شتابدهندهٔ باریکهٔ الکترونی در یک دستگاه تلویزیون	10^{5}
در نزدیکی یک شانهٔ پلاستیکی باردارشده	10^{3}
در قسمت پایینی جو زمین	10^{2}
در داخل سیم مسی در مدارهای لوازم خانگی	10^{-2}

از نظر ابعادی، میدان الکتریکی برابر است با نیرو بر واحد بار الکتریکی، و یکای آن در سیستم SI برابر با نیوتون بر کولن (N/C) است. گرچه، بعداً در فصل ۲۸ خواهیم دید، که اغلب از یکای معادل ولت بر متر (V/m) استفاده می‌کنیم. به شباهت آن با میدان گرانشی توجه کنید، که در آنجا g (که معمولاً برحسب یکای m/s^2 بیان می‌شود) را می‌توان برحسب نیرو بر واحد جرم یا نیوتون بر کیلوگرم (N/kg) نیز بیان کرد. توجه کنید که میدانهای گرانشی و الکتریکی را می‌توان به‌صورت نیرو تقسیم بر خاصیتی از جسم آزمون (جرم یا بار الکتریکی) بیان کرد. در جدول ۲۶ـ۱ برخی از میدانهای الکتریکی را که وجود دارند نمایش داده‌ایم.

همان‌طور که در معادلهٔ (۲۶ـ۲) در مورد نیروی گرانشی وارد بر یک جسم عمل کردیم، می‌توانیم از میدان الکتریکی برای محاسبهٔ نیروی وارد بر یک جسم باردار استفاده کنیم. همین که میدان الکتریکی را در یک نقطه معین کردیم (مثلاً، با بهره‌گیری از یک جسم آزمون)، می‌توانیم نیروی الکتریکی وارد بر هر جسمی با بار q را در آن موقعیت



شکل ۲۶ـ۲ (الف) بار الکتریکی $q_۱$ در نقطهٔ A یک میدان الکتریکی در نقطهٔ B ایجاد می‌کند. (ب) میدان الکتریکی موجود در نقطهٔ B نیرویی بر بار $q_۲$ وارد می‌کند. (ج) بار $q_۲$ در نقطهٔ B یک میدان الکتریکی در نقطهٔ A ایجاد می‌کند. (د) میدان الکتریکی موجود در نقطهٔ A نیرویی بر بار $q_۱$ وارد می‌کند. توجه کنید که $\vec{\mathbf{F}}_{۱۲} = -\vec{\mathbf{F}}_{۲۱}$ است.

محاسبه کنیم، یعنی

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} \qquad (۲۶\text{ـ}۴)$$

در اینجا میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ به‌وسیلهٔ سایر بارهایی که ممکن است حضور داشته باشند ایجاد شده است، و نه به‌وسیلهٔ بار q. معادلهٔ (۲۶ـ۴) فقط روشی است برای مشخص‌کردن نیرویی که به‌وسیلهٔ بارهای دیگر بر بار q وارد می‌شود.

اکنون می‌توانیم درک کنیم که چرا میدان الکتریکی در برهم‌کنش بین دو بار $q_۱$ و $q_۲$ به‌صورت میانجی عمل می‌کند. همان‌طور که در شکل ۲۶ـ۲(الف) نشان داده‌ایم، بار $q_۱$ که در نقطهٔ A قرار گرفته است در تمامی نقاط اطرافش میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. فرض کنید که این میدان در نقطهٔ B برابر با $\vec{\mathbf{E}}_۱$ باشد. می‌توانیم با قراردادن بار آزمون در نقطهٔ B و اندازه‌گیری نیروی وارد بر آن به‌وسیلهٔ بار $q_۱$ مقدار میدان را معین کنیم. اگر بار دیگری مانند $q_۲$ را در نقطهٔ B قرار دهیم، این بار تحت تأثیر نیروی الکتریکی $\vec{\mathbf{F}}_{۲۱}$ قرار خواهد گرفت، که می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۲۶ـ۴) آن را محاسبه کرد: $\vec{\mathbf{F}}_{۲۱} = q_۲\vec{\mathbf{E}}_۱$ (شکل ۲۶ـ۲(ب)). وضعیت در اینجا کاملاً متقارن است: می‌توانستیم ابتدا از بار آزمون برای تعیین میدان $\vec{\mathbf{E}}_۲$ ناشی از بار $q_۲$ در نقطهٔ A استفاده کنیم (شکل ۲۶ـ۲(ج)). سپس بار $q_۱$ را در نقطهٔ A قرار دهیم و از آن طریق نیروی وارد بر $q_۱$ به‌وسیلهٔ بار $q_۲$ را محاسبه کنیم: $\vec{\mathbf{F}}_{۱۲} = q_۱\vec{\mathbf{E}}_۲$ (شکل ۲۶ـ۲(د)). بنابر قانون سوم نیوتون این نیروها مساوی و با جهت مخالف‌اند ($\vec{\mathbf{F}}_{۲۱} = -\vec{\mathbf{F}}_{۱۲}$)، با آنکه ممکن است میدانهای الکتریکی ایجادشده به‌وسیلهٔ هر یک از دو بار متفاوت باشند.

برای بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۶ـ۳) به‌عنوان یک روند عملیاتی اندازه‌گیری میدان الکتریکی، باید همان احتیاطهایی را به‌جا آوریم که در مورد استفاده از جرم آزمون برای اندازه‌گیری میدان گرانشی رعایت کردیم: یعنی بار آزمون باید به قدرکافی کوچک باشد که سبب آشفتگی توزیع بارهایی نشود که میدان الکتریکی مورد نظر را به‌وجود آورده‌اند. یعنی، باید معادلهٔ (۲۶ـ۳) را به‌صورت مناسب‌تر زیر بازنویسی کنیم

$$\vec{\mathbf{E}} = \lim_{q_\circ \to \circ} \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_\circ} \qquad (۲۶\text{ـ}۵)$$

با آنکه از مطلب ارائه‌شده در فصل ۲۵ می‌دانیم که در واقع نمی‌توانیم این حد را به سمت صفر میل دهیم؛ زیرا که بار آزمون هرگز نمی‌تواند کمتر از بار بنیادی e بشود. البته، اگر میدان الکتریکی ناشی از مجموعه‌ای مشخص از بارهای ثابت را محاسبه کنیم (و اندازه‌گیری نکنیم) نه مقدار و نه علامت $q_\circ$ تأثیری در نتیجه نمی‌گذارد. در بخشهای بعدی این فصل نشان خواهیم داد که میدان الکتریکی ناشی از مجموعه‌ای از بارها را می‌توانیم، با استفاده از معادلهٔ (۲۶ـ۳) و قانون کولن، بدون مراجعهٔ مستقیم به معادلهٔ (۲۶ـ۵) محاسبه کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۱ به الکترونی $(q = -e)$ که در نزدیکی جسم بارداری قرار گرفته است نیروی $۳{,}۶۰ \times ۱۰^{-۸}\text{N}$ در امتداد محور $+y$ وارد می‌شود. (الف) میدان الکتریکی در آن مکان چقدر است؟ (ب) نیروی وارد بر یک ذرهٔ آلفا $(q = +۲e)$ که در همان مکان الکترون قرار بگیرد، از طرف این جسم باردار، چقدر است؟

حل. (الف) با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۶ـ۴)، داریم

$$E_y = \frac{F_y}{q} = \frac{۳{,}۶۰ \times ۱۰^{-۸}\text{N}}{-۱{,}۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}} = -۲{,}۲۵ \times ۱۰^{۱۱}\text{N/C}$$

میدان الکتریکی در جهت y منفی است.

(ب) از معادلهٔ (۲۶ـ۴)، نیروی وارد بر ذرهٔ آلفا برابر است با

$$F_y = qE_y = ۲(+۱{,}۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(-۲{,}۲۵ \times ۱۰^{۱۱}\text{N/C})$$
$$= -۷{,}۲۰ \times ۱۰^{-۸}\text{N}$$

نیروی وارد بر ذرهٔ آلفا در جهت منفی y است، که همان جهت میدان الکتریکی و برخلاف جهت نیروی وارد بر الکترون است. در همان میدان الکتریکی، نیروی وارد بر ذرهٔ آلفا از لحاظ مقداری دو برابر نیروی وارد بر الکترون است، زیرا بار ذرهٔ آلفا از لحاظ بزرگی دو برابر بار الکترون است.

۲۶ـ۳ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای

در این بخش میدان ناشی از بارهای نقطه‌ای را بررسی می‌کنیم، نخست یک بار نقطه‌ای را بررسی می‌کنیم و سپس مجموعه‌ای از بارهای منفرد را. بعداً مطلب را به توزیعهای پیوستهٔ بار تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید که بار آزمون $q_\circ$ در فاصلهٔ r از بار نقطه‌ای q قرار گرفته باشد. بزرگی نیروی وارد بر بار $q_\circ$ با استفاده از قانون کولن چنین است:

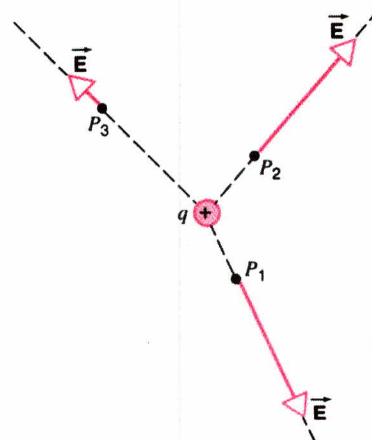
$$F = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q_\circ|q|}{r^۲}$$

بزرگی میدان الکتریکی در محل بار آزمون، از معادلهٔ (۲۶ـ۳)، برابر است با

$$E = \frac{F}{q_\circ} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{|q|}{r^۲} \qquad (۲۶ـ۶)$$

جهت بردار $\vec{\mathbf{E}}$ همان جهت بردار $\vec{\mathbf{F}}$ است، یعنی در امتداد خط شعاعی از q، به سوی خارج اگر q مثبت باشد و به طرف داخل اگر q منفی باشد. شکل ۲۶ـ۳ اندازه و جهت میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ را در نقطه‌های مختلف در حوالی یک بار نقطه‌ای مثبت نشان می‌دهد. اگر این بار منفی بود، این شکل را چگونه رسم می‌کردید؟

برای پیدا کردن میدان $\vec{\mathbf{E}}$ ناشی از مجموعه‌ای متشکل از N بار نقطه‌ای، از روش زیر استفاده می‌کنیم: (۱) میدان $\vec{\mathbf{E}}_n$ ناشی از هر یک از بارهای n را در نقطهٔ مورد نظر محاسبه و فرض می‌کنیم که هیچ بار دیگری وجود ندارد. (۲) این میدانهای جداگانه محاسبه‌شده



شکل ۲۶ـ۳ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ در نقاط مختلف در حوالی بار نقطه‌ای مثبت q. توجه کنید که جهت $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا در امتداد شعاع و به سمت خارج از q است. میدانهای مربوط به نقطه‌های $P_۱$ و $P_۲$ که در فاصلهٔ مساوی از q قرار گرفته‌اند از نظر بزرگی با هم برابرند. بزرگی میدان مربوط به نقطهٔ $P_۳$ که فاصله‌اش از q دوبرابر فاصلهٔ $P_۱$ و $P_۲$ است، یک‌چهارم میدان در $P_۱$ یا $P_۲$ است.

را به‌صورت برداری با هم جمع می‌کنیم تا میدان برایند $\vec{\mathbf{E}}$ را در آن نقطه مشخص کنیم. به‌صورت معادله‌ای، داریم:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_۱ + \vec{\mathbf{E}}_۲ + \vec{\mathbf{E}}_۳ = \sum \vec{\mathbf{E}}_n \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots, N) \qquad (۲۶ـ۷)$$

این جمع یک جمع برداری است، و روی همهٔ بارها انجام شده است. معادلهٔ (۲۶ـ۷) (مانند معادلهٔ ۲۵ـ۸) مثالی از کاربرد اصل برهم‌نهی است که به این‌صورت بیان می‌شود، که در یک نقطهٔ مشخص میدانهای الکتریکی ناشی از توزیعهای بار جداگانه، به‌سادگی با هم جمع می‌شوند (به‌صورت برداری) یا به‌صورت مستقل برهم نهاده می‌شوند. این اصل ممکن است وقتی اندازهٔ میدانها بسیار بزرگ باشد با شکست مواجه شود، ولی برای مواردی که در این کتاب مطرح می‌شوند معتبر است.

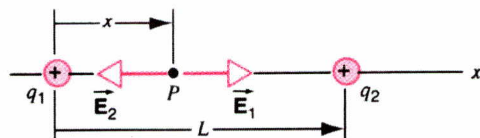
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۲ در اتم هلیم یونیده (اتم هلیمی که از آن یکی از دو الکترون جدا شده است)، فاصلهٔ الکترون و هسته برابر با ۲۶٫۵ pm است. میدان ناشی از هسته در محل الکترون چقدر است؟

حل. با استفاده از معادلهٔ (۲۶ـ۶) و انتخاب بار q (بار هسته) برابر با $+۲e$ داریم:

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{|q|}{r^۲} = \frac{(۸٫۹۹\times۱۰^۹\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})[۲(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})]}{(۲۶٫۵\times۱۰^{-۱۲}\mathrm{m})^۲} = ۴٫۱۰\times۱۰^{۱۲}\mathrm{N/C}$$

این مقدار ۸ برابر میدان الکتریکی است که در اتم هیدروژن بر الکترون اثر می‌کند (جدول ۲۶ـ۱). این افزایش به دلایل زیر است (۱) بار هستهٔ اتم هلیم دو برابر هستهٔ هیدروژن است و (۲) فاصلهٔ الکترون از هستهٔ اتم هلیم نصف فاصلهٔ الکترون از هستهٔ هیدروژن است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۳ در شکل ۲۶ـ۴ ذرهٔ $q_۱$ با بار $+۱٫۵\mu\mathrm{C}$ و



شکل ۲۶ـ۴ در نقطهٔ P میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ با هم برابر و در جهت مخالف یکدیگر است، و بنابراین میدان خالص در نقطهٔ P برابر صفر است.

ذرهٔ $q_۲$ با بار $+۲٫۳ \mu C$ را نشان داده‌ایم. ذرهٔ $q_۱$ در مبدأ محور x قرار گرفته و ذرهٔ دوم در مکان $x = L$ است، که $L = ۱۳\,cm$. در چه نقطه‌ای (P) روی محور x میدان الکتریکی برابر با صفر است؟

حل. این نقطه باید بین دو بار قرار گیرد زیرا تنها در این ناحیه است که نیروهای وارد بر یک بار آزمون از طرف بارهای $q_۱$ و $q_۲$ مخالف هم هستند. اگر $\vec{E}_۱$ میدان ناشی از بار $q_۱$ و $\vec{E}_۲$ میدان ناشی از بار $q_۲$ باشد، بزرگی این دو بردار باید با هم برابر باشد، یا به عبارت دیگر

$$E_۱ = E_۲$$

از معادلهٔ (۲۶-۶) داریم

$$\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱}{x^۲} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۲}{(L-x)^۲}$$

که در معادلهٔ بالا x همان مختصهٔ نقطهٔ P است. با استخراج ریشهٔ دوم این معادله و حل آن برای x، می‌رسیم به:

$$x = \frac{L}{۱ \pm \sqrt{q_۲/q_۱}}$$

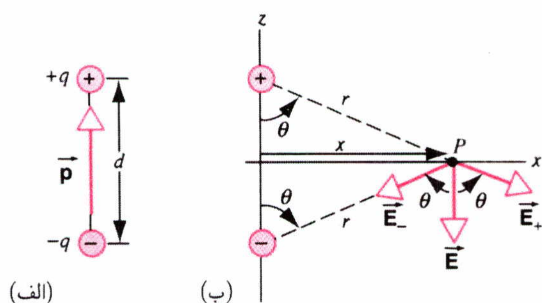
که در اینجا به این نکته توجه کردیم که ریشهٔ دوم ممکن است مقدار مثبت یا منفی داشته باشد. از جانشانی مقادیر عددی به‌جای L، $q_۱$، و $q_۲$ نتیجه می‌گیریم که

$$x = ۵٫۸\,cm \quad \text{و} \quad x = -۵۴٫۶\,cm$$

جواب اول، که یک نقطه بین دو بار را به‌دست می‌دهد، پاسخ مورد نظر ماست. جواب دوم، نقطه‌ای در سمت چپ هر دو بار است. درست است که در این نقطه $E_۱ = E_۲$ است، ولی هر دو میدان در این نقطه جهت یکسانی دارند و امکان ندارد که حاصل جمع برداری آنها برابر با صفر شود. و بنابراین حذف پاسخ دوم موجه است.

دوقطبی الکتریکی

تعداد زیادی از اجسامی را که در طبیعت یافت می‌شود می‌توانیم به گونهٔ موفقیت‌آمیزی به‌صورت اجسام منفردی که دارای بار خالصی هستند تحلیل کنیم، که در این فصل تاکنون چنین کرده‌ایم. بعضی از اجسام رفتار دیگری از خود نشان می‌دهند. یکی از این رفتارها ویژگی جسمی است که هیچ بار خالصی ندارد ولی از مقدار مساوی بارهای



شکل ۲۶-۵ (الف) بارهای مثبت و منفی با مقادیر یکسان تشکیل دوقطبی الکتریکی می‌دهند. (ب) میدان الکتریکی $\vec{E}$ در هر نقطه برابر است با حاصل‌جمع برداری میدانهای ناشی از هرکدام از بارها. در نقطهٔ P واقع بر محور x، میدان فقط دارای مؤلفهٔ z است.

مثبت و منفی $+q$ و $-q$ تشکیل شده است که در فاصلهٔ ثابت d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. مثلاً، یک مولکول یونی مانند NaCl (در حالت بخاری در دمای بالا، نه در حالت بلوری شناخته‌شدهٔ آن) از نظر بار الکتریکی خنثی است ولی می‌توان آن را به‌صورت یک یون Na^+ که به یک یون Cl^- متصل شده است، در نظر گرفت. به‌عنوان مثالی دیگر، رفتار مشابهی در مولکول آب، به‌طور نسبی مسبب محلول‌پذیری زیاد مواد بسیاری در آب است.

پیکربندی دو بار مساوی با علامتهای مخالف را که در فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند دوقطبی الکتریکی می‌نامیم. در معادله‌هایی که دوقطبیهای الکتریکی را توصیف می‌کنند، درمی‌یابیم که بزرگی بار موجود روی هر کدام از اجزا، یعنی q، و فاصلهٔ بین آنها یعنی d، اغلب به‌صورت حاصلضرب، qd، ظاهر می‌شوند. مناسب است که این کمیت را گشتاور دوقطبی الکتریکی، p، تعریف کنیم:

$$p = qd \qquad (۲۶\text{-}۸)$$

مشخص می‌شود که این کمیت به‌صورت یک بردار عمل می‌کند. تعریف می‌کنیم که بزرگی بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی برابر، $p = qd$، باشد و جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت در امتداد خطی باشد که بارها را به‌هم متصل می‌کند. در شکل ۲۶-۵(الف) یک دوقطبی الکتریکی و بردار گشتاور دوقطبی آن را نشان داده‌ایم. مثلاً در NaCl مقدار بار هر یک از یونها برابر با e است و فاصلهٔ اندازه‌گیری‌شدهٔ بین آنها $۰٫۲۳۶\,nm$ است و در نتیجه انتظار داریم که گشتاور دوقطبی این مولکول برابر مقدار زیر باشد

$$p = ed = (۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}C)(۰٫۲۳۶ \times ۱۰^{-۹}m)$$
$$= ۳٫۷۸ \times ۱۰^{-۲۹}C \cdot m$$

مقدار اندازه‌گیری‌شده گشتاور دوقطبی این مولکول برابر با $۳٫۰۰ \times ۱۰^{-۲۹} \mathrm{C \cdot m}$ است، که حاکی است الکترون به‌طور کامل از Na جدا و به Cl پیوند نشده است، که گشتاور دوقطبی کمتری از مقدار مورد انتظار به‌دست می‌دهد.

اکنون میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ مربوط به دوقطبی را در نقطهٔ P روی عمودمنصف خط واصل بین دو بار و در فاصلهٔ x از این خط محاسبه می‌کنیم (شکل ۲۶ـ۵(ب)).

بارهای مثبت و منفی به‌ترتیب میدانهای $\vec{\mathbf{E}}_+$ و $\vec{\mathbf{E}}_-$ را به‌وجود می‌آورند. مقدار این دو میدان در نقطهٔ P برابر است، زیرا فاصلهٔ نقطهٔ P از هر دو بار یکسان است. شکل ۲۶ـ۵(ب) جهت میدانهای $\vec{\mathbf{E}}_+$ و $\vec{\mathbf{E}}_-$ را نیز نشان می‌دهد، که توسط جهت نیرویی که هر یک از دو بار به‌تنهایی بر یک بار آزمون مثبت واقع در نقطهٔ P اعمال می‌کنند، معین می‌شود. بنابر معادلهٔ (۲۶ـ۷)، میدان الکتریکی کل در نقطهٔ P از جمع این بردارها به‌دست می‌آید

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_-$$

بنابر معادلهٔ (۲۶ـ۶)، بزرگی شدت میدان ناشی از هر کدام از بارها عبارت است از

$$E_+ = E_- = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{r^۲} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{x^۲ + (d/۲)^۲} \quad (۲۶\text{ـ}۹)$$

چون میدانهای $\vec{\mathbf{E}}_+$ و $\vec{\mathbf{E}}_-$ دارای بزرگی یکسان‌اند و با راستای z در شکل زاویه‌های مساوی θ را می‌سازند، مؤلفهٔ x میدان کل برابر است با $E_+ \sin\theta - E_- \sin\theta = ۰$. بنابراین میدان کل $\vec{\mathbf{E}}$ فقط دارای مؤلفهٔ z با بزرگی زیر است

$$E = E_+ \cos\theta + E_- \cos\theta = ۲E_+ \cos\theta \quad (۲۶\text{ـ}۱۰)$$

از شکل ۲۶ـ۵(ب) مشاهده می‌کنیم که کسینوس زاویهٔ θ با نسبت زیر مشخص می‌شود

$$\cos\theta = \frac{d/۲}{\sqrt{x^۲ + (d/۲)^۲}}$$

از جانشانی این مقدار و معادلهٔ (۲۶ـ۹) در معادلهٔ (۲۶ـ۱۰) می‌رسیم به

$$E = (۲)\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{x^۲ + (d/۲)^۲}\frac{d/۲}{\sqrt{x^۲ + (d/۲)^۲}}$$

یا

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{p}{[x^۲ + (d/۲)^۲]^{۳/۲}} \quad (۲۶\text{ـ}۱۱)$$

که در اینجا از معادلهٔ (۲۶ـ۸) $(p = qd)$ برای اندازهٔ گشتاور دوقطبی استفاده کردیم.

معادلهٔ (۲۶ـ۱۱) بزرگی میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی را در نقطهٔ P به‌دست می‌دهد. توجه کنید که این مسئله دارای تقارن استوانه‌ای حول محور z است؛ یعنی اینکه، می‌توانیم هر راستای عمود بر محور دوقطبی را محور x اختیار کنیم، و در آن صورت میدان با معادلهٔ (۲۶ـ۱۱) مشخص می‌شود.

اغلب میدان ناشی از دوقطبی الکتریکی را در نقاطی مانند P که فاصلهٔ x آنها در مقایسه با فاصلهٔ بین دو بار، d، بسیار زیاد است مشاهده می‌کنیم. در این حالت، می‌توان با استفاده از بسط دوجمله‌ای به‌صورت زیر میدان دوقطبی را تا حدودی ساده کرد

$$(۱ + y)^n = ۱ + ny + \frac{n(n-۱)}{۲!}y^۲ + \ldots$$

حالا معادلهٔ (۲۶ـ۱۱) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{p}{x^۳}\frac{۱}{[۱ + (d/۲x)^۲]^{۳/۲}}$$
$$= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{p}{x^۳}[۱ + (\frac{d}{۲x})^۲]^{-۳/۲}$$

و بسط دوجمله‌ای را در مورد عبارت داخل کروشه به‌کار می‌بندیم، و نتیجه می‌گیریم که

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{p}{x^۳}\left[۱ + \left(-\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{d}{۲x}\right)^۲ + \cdots\right]$$

برای وقتی که $x \gg d$ است فقط کافی است که اولین جملهٔ داخل کروشه (یعنی ۱) را نگه داریم تا عبارتی برای بزرگی میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی را در نقاط دوردست در صفحهٔ عمودمنصف دو بار به‌دست آوریم:

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{p}{x^۳} \quad (۲۶\text{ـ}۱۲)$$

برای محاسبهٔ میدان دوقطبی در امتداد محور آن (محور z شکل ۲۶ـ۵(ب)) و در فاصله‌های دور می‌توان عبارتی مشابه به‌دست آورد (مسئلهٔ ۱ را ببینید). می‌توان میدان دوقطبی را در هر نقطه‌ای از صفحهٔ xz نیز به‌دست آورد (مسئلهٔ ۲ را ببینید). در همهٔ موارد، میدان در فواصل دوردست و در فاصلهٔ r از دوقطبی به شکل $۱/r^۳$ رفتار می‌کند. این رفتار ویژگی میدان دوقطبی الکتریکی است. تغییرات

میدان برحسب فاصلهٔ r خیلی سریع‌تر از $۱/r^۲$ که ویژگی بار نقطه‌ای است صورت می‌گیرد.

توزیع بارهای پیچیده‌تری هم وجود دارند که منشأ میدانهای الکتریکی می‌شوند که با توانهای بالاتری از معکوس r تغییر می‌کنند. برای تغییرات $۱/r^۴$ میدان مربوط به یک چهارقطبی الکتریکی، تمرین ۱۱ و مسئلهٔ ۴ را ببینید.

۲۶ـ۴ میدان الکتریکی توزیع پیوستهٔ بار

در بخش ۲۵ـ۵ نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای ناشی از توزیعهای گوناگون و پیوستهٔ بار را مورد بررسی قرار دادیم. آن توزیعهای پیوستهٔ بار را با تصور اینکه از مجموعه‌ای از عناصر بار بینهایت کوچک تشکیل یافته‌اند، که می‌توان آنها را بار نقطه‌ای به حساب آورد، تحلیل کردیم و سپس با انجام انتگرال‌گیری روی تمام توزیع بار، نیرو را به‌دست آوردیم. در اینجا هم برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای پیوستهٔ بار از روش مشابهی استفاده می‌کنیم. در واقع، همان‌طور که خواهیم دید، می‌توانیم برای به‌دست آوردن میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای پیوستهٔ بار که در بخش ۲۵ـ۵ مورد بررسی قرار دادیم، از نتایج همان بخش استفاده کنیم.

نخست روش کلی مربوط به یافتن میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوستهٔ بار را مورد بررسی قرار می‌دهیم. توزیع بار را به عناصر بینهایت کوچک dq تقسیم می‌کنیم، و عنصر بار dq را به‌صورت $\lambda\, ds$، $\sigma\, dA$، یا $\rho\, dV$ بیان می‌کنیم، که بستگی دارد به اینکه توزیع بار روی یک خط ($\lambda =$ چگالی خطی بار یا بار بر واحد طول)، یک صفحه ($\sigma =$ چگالی سطحی بار یا بار بر واحد مساحت)، یا روی یک حجم ($\rho =$ چگالی حجمی بار یا بار بر واحد حجم) باشد. با انتخاب یک عنصر بار دلخواه، اندازهٔ سهم آن را در میدان الکتریکی در نقطهٔ مورد مشاهدهٔ P می‌نویسیم و dq را بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم؛ با استفاده از معادلهٔ (۲۶ـ۶) داریم

$$dE = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{|dq|}{r^۲} \qquad (۲۶\text{ـ}۱۳)$$

جهت بردار $d\vec{\mathbf{E}}$ به‌وسیلهٔ علامت بار dq معین می‌شود که هم‌جهت با نیرویی است که بار dq روی بار مثبت آزمون موجود در نقطهٔ P وارد می‌کند. میدان برایند کل در نقطهٔ P برای کل توزیع بار، با افزودن سهم میدان ناشی از تمام عناصر بار موجود در جسم به‌دست می‌آید، و با در نظر گرفتن راستاهای متفاوتی که تمام $d\vec{\mathbf{E}}$ها می‌توانند اختیار کنند، می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}} \qquad (۲۶\text{ـ}۱۴)$$

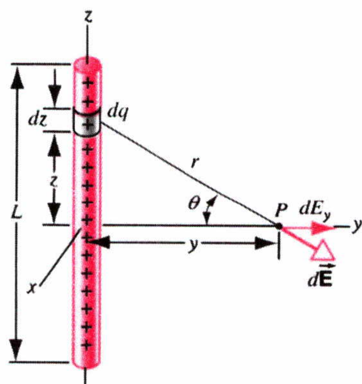
در واقع، معادلهٔ (۲۶ـ۱۴) نوعی تندنویسی برای نمایش معادلات مربوط به سه مؤلفه است؛ مثلاً در دستگاه مختصات دکارتی داریم:

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z \qquad (۲۶\text{ـ}۱۵)$$

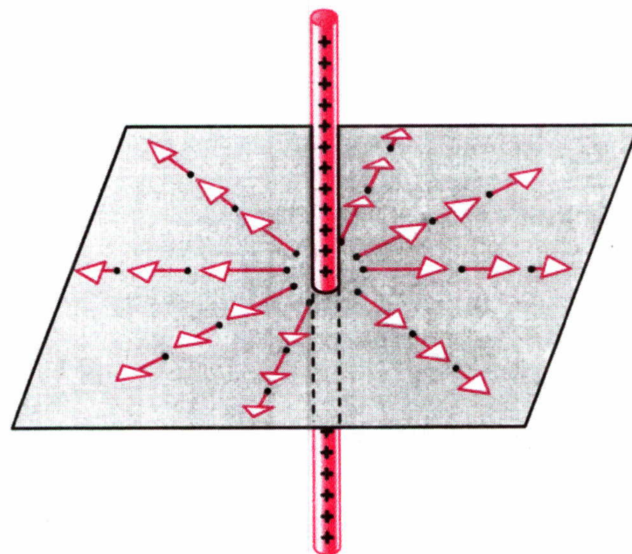
همان‌طور که خواهیم دید، اغلب می‌توان این محاسبات را ساده کرد، مثلاً با استدلال مبتنی بر تقارن می‌توان نتیجه گرفت که یک یا دو انتگرال صفر می‌شود و یا اینکه دو تا از انتگرالها مقادیر یکسانی دارند.

توزیع یکنواخت بار در امتداد یک خط

به‌عنوان مثالی از کاربرد معادله‌های (۲۶ـ۱۳) تا (۲۶ـ۱۵)، میدان الکتریکی ناشی از توزیع یکنواخت بار در امتداد یک خط (مثلاً، یک میلهٔ باریک باردار) به طول L را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم چگالی بار خطی آن مثبت یکنواخت باشد، یا به عبارتی $\lambda = q/L$، که در اینجا q کل بار حمل‌شده توسط میله است. در شکل ۲۶ـ۶ چنین آرایشی را برای محاسبه نشان داده‌ایم. می‌خواهیم میدان را در نقطهٔ P و در فاصلهٔ y از میله و در امتداد عمودمنصف آن (محور مثبت y) معین کنیم. مقدار معین الکتریکی $d\vec{\mathbf{E}}$ در نقطهٔ P که از عنصر بار dq ناشی شده با معادلهٔ (۲۶ـ۱۳) معین می‌شود. در اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $E_x = ۰$، زیرا هیچ‌کدام از عناصر بار dq روی میله یک میدان $d\vec{\mathbf{E}}$ دارای مؤلفهٔ x ایجاد نمی‌کند. همچنین می‌توانیم از تقارن موجود در شکل نتیجه بگیریم که $E_z = ۰$، زیرا به‌ازای هر



شکل ۲۶ـ۶ میله‌ای که به‌طور یکنواخت باردار شده است. میدان الکتریکی در نقطهٔ P عبارت است از حاصل جمع تمام میدانهای ایجادشده توسط عناصر باری مانند dq.



شکل ۲۶_۷ میدان الکتریکی مربوط به میله‌ای که به‌طور یکنواخت بار مثبت دارد. میدان در امتداد محور میله دارای تقارن استوانه‌ای است.

dq در z مثبت یک بار متناظر dq در z منفی وجود دارد به‌طوری که، وقتی بردارهای $d\vec{\mathbf{E}}$ مربوط به دو عنصر بار را به‌هم می‌افزاییم، مؤلفهٔ z میدان برایند برابر با صفر می‌شود. تنها مؤلفهٔ غیرصفر میدان الکتریکی در نقطهٔ P همانا E_y است. بنابراین داریم:

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dz}{y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

که در اینجا از معادلهٔ (۲۶_۱۳) برای dE استفاده کردیم و در آن $dq = \lambda dz$، $\cos\theta = y/r$، و $r^2 = y^2 + z^2$ را قرار دادیم. میدان الکتریکی کل در نقطهٔ P چنین است:

$$E_y = \int dE_y = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda y dz}{(y^2+z^2)^{3/2}}$$

با انتگرال‌گیری روی امتداد z، وقتی y را ثابت نگه داشته‌ایم، می‌رسیم به (انتگرال ۱۸ پیوست ب را ببینید):

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{y\sqrt{y^2+L^2/4}} \qquad (۲۶_۱۶)$$

این معادله میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار یکنواخت خطی را در نقطهٔ P روی محور مثبت y به‌دست می‌دهد. توجه کنید که این نتیجه را می‌توانستیم به‌طور مستقیم از معادلهٔ (۲۵_۱۵)، برای نیروی بین یک توزیع بار خطی و بار نقطه‌ای q_0 به‌دست آوریم. این کار را با جانشانی λL به‌جای q و بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۶_۳)، $E_y = F_y/q_0$ انجام می‌دهیم.

همان‌طور که در مورد گشتاور دوقطبی برقرار بود، این مسئله نیز دارای تقارن استوانه‌ای حول محور z است، و می‌توانیم محور y را در هر راستایی در صفحهٔ عمودمنصف میله اختیار کنیم. در شکل ۲۶_۷ میدان ناشی از میله‌ای که به‌طور یکنواخت با بار مثبت باردار شده است در صفحهٔ xy نمایش داده‌ایم.

همان‌طور که در فصل ۲۵ در مورد نیروی محاسبه‌شده انجام دادیم، در اینجا نیز برای بررسی محاسبات مربوط به میدان الکتریکی، مهم است که درستی مقادیر حدی را مورد تحقیق قرار دهیم. در حد $y \to \infty$، معادلهٔ (۲۶_۱۶) به سمت عبارت مربوط به میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای میل می‌کند،

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2}$$

که در اینجا $q = \lambda L$ است.

دراغلب موارد مرتبط با توزیع بار خطی، نقطهٔ مشاهده خیلی نزدیک به خط بار است، به‌طوری که y در مقایسه با L کوچک است. با استخراج حد معادلهٔ (۲۶_۱۶) وقتی که $y \ll L$ و λ ثابت باقی می‌ماند، میدان الکتریکی ناشی از میلهٔ باردار نامتناهی را به‌دست می‌آوریم:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \qquad (۲۶_۱۷)$$

این میدان شعاعی و به سمت خارج از میله است و با فاصلهٔ نقطهٔ مشاهده از میله نسبت عکس دارد.

ممکن است در مورد مفید بودن محاسبهٔ میدان ناشی از یک توزیع بار خطی نامتناهی دچار شگفتی شویم زیرا هر توزیع بار خطی واقعی باید دارای طول محدود و معینی باشد. ولی، برای نقاط نزدیک به خط و دور از دو سر آن، معادلهٔ (۲۶_۱۷) تقریب بسیار خوب و مفیدی از میدان الکتریکی را به‌دست می‌دهد. اختلاف بین مقدار تقریبی به‌دست‌آمده از معادلهٔ (۲۶_۱۷) و مقدار دقیق به‌دست‌آمده از معادلهٔ (۲۶_۱۶)، اغلب اوقات چشم‌پوشیدنی است. در این مورد، مقدار تقریبی ممکن است شناخت فیزیکی عمیق‌تری را فراهم آورد، زیرا تغییرات E برحسب فاصله از میله به‌طور بی‌واسطه‌تری قابل درک است.

توزیع یکنواخت بار الکتریکی روی یک حلقه یا یک قرص

برای مطالعهٔ میدان الکتریکی ناشی از توزیع یکنواخت بار الکتریکی روی یک حلقه یا یک قرص به شعاع R، ضرورت ندارد که محاسبهٔ این میدان را از معادلهٔ (۲۶_۱۳) آغاز کنیم. قبلاً نیروی وارد بر بار

نقطه‌ای $q_\circ$ از سوی یک حلقه یا یک قرص باردار را محاسبه کرده‌ایم. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $q_\circ$ واقع بر محور حلقه، از سوی حلقهٔ باردار با معادلهٔ (۲۵ـ۱۶) مشخص شده است. با استفاده از معادلهٔ (۲۶ـ۳)، $E_z = F_z/q_\circ$، می‌توانیم مستقیماً از معادلهٔ (۲۵ـ۱۶)، میدان الکتریکی ناشی از یک حلقهٔ باردار را در نقطه‌ای روی محور مثبت z به‌دست آوریم:

$$E_z = \frac{\lambda}{۲\epsilon_\circ}\frac{Rz}{(z^۲+R^۲)^{۳/۲}} \qquad (۲۶\text{ـ}۱۸)$$

که در اینجا از تساوی $q = \lambda(۲\pi R)$ استفاده کرده‌ایم. میدان الکتریکی در امتداد محور حلقه (محور z) و به سمت خارج است. معادلهٔ (۲۶ـ۱۸) هم برای جهت مثبت z و هم برای جهت منفی z معتبر است. اگر بار روی حلقهٔ منفی باشد، میدان الکتریکی در امتداد محور حلقه و در جهت عکس (به سمت حلقه) است.

به روشی مشابه، می‌توانیم میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار را از معادلهٔ (۲۵ـ۱۷) به‌دست آوریم:

$$E_z = \frac{\sigma}{۲\epsilon_\circ}\left(۱ - \frac{z}{\sqrt{(z^۲+R^۲)}}\right) \qquad (۲۶\text{ـ}۱۹)$$

در اینجا میدان الکتریکی را برحسب چگالی سطحی بار و با استفاده از تساوی $q = \sigma A = \sigma(\pi R^۲)$ بیان کرده‌ایم. این عبارت مقدار میدان را در نقطه‌ای روی محور z و به فاصلهٔ z از مرکز قرص به‌دست می‌دهد. اگر بار موجود روی قرص مثبت باشد جهت میدان به سمت خارج از قرص است. معادلهٔ (۲۶ـ۱۹) فقط برای $z > \circ$ معتبر است. اگر نقطهٔ P روی محور منفی z قرارگرفته باشد، این معادله را چگونه باید اصلاح کرد؟

یک برگهٔ باردار با ابعاد نامتناهی

اکنون وضعیت حدی، $R \to \infty$ را در معادلهٔ (۲۶ـ۱۹) مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت قرص باردار تبدیل به یک برگهٔ باردار با ابعاد نامتناهی می‌شود. فرض می‌کنیم که، با افزایش شعاع R، بار روی قرص نیز افزوده شود به‌طوری که چگالی سطحی بار ثابت باقی بماند. در چنین شرایطی، می‌توانیم معادلهٔ (۲۶ـ۱۹) را به‌صورت زیر تقریب بزنیم

$$E_z = \frac{\sigma}{۲\epsilon_\circ} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۰)$$

این نتیجه، بسیار سودمند است، که برای یک قرص با چگالی بار یکنواخت و در نقاط نزدیک به قرص و دور از لبه‌ها، تقریباً معتبر است.

در واقع، اگر ما به‌قدر کافی از لبه‌های توزیع بار دور باشیم، نمی‌توانیم بگوییم که توزیع بار روی یک سطح دایره‌ای، مربعی، مستطیلی، یا یک شکل نامنظم صورت گرفته است. همان‌طور که در فصل بعدی به‌دست خواهیم آورد، این نتیجه برای هر توزیع بار یکنواختی روی یک برگهٔ بزرگ معتبر است و هیچ ارتباطی با شکل آن ندارد. میدان در همه جا دارای مقدار یکسان بوده و جهت آن (برای یک برگهٔ با بار مثبت) به سمت خارج از صفحهٔ توزیع بار است.

توزیع یکنواخت بار روی یک پوستهٔ کروی

در بخش ۲۵ـ۵، دو خاصیت یک پوستهٔ کروی یکنواخت باردارشده را شناخته‌ایم. پوسته روی بار آزمونی که در داخل آن قرارگرفته است هیچ نیرویی وارد نمی‌کند، و در نقاط خارجی نیرویی که روی یک بار آزمون اعمال می‌کند برابر همان نیرویی است که اگر محل بار الکتریکی پوسته در مرکز آن متمرکز می‌شد. می‌توانیم از این دو خاصیت برای به‌دست آوردن میدان الکتریکی ناشی از یک پوستهٔ یکنواخت‌باردارشدهٔ نازک استفاده کنیم. فرض می‌کنیم که شعاع پوسته برابر با R و بار موجودی روی آن برابر با q باشد. همچنین در این مرحله فرض می‌کنیم بار q مثبت باشد. با در نظرگرفتن این فرضها نتایج زیر را برای میدان الکتریکی ناشی از یک پوستهٔ کروی، در فواصل گوناگون از مرکز پوسته، به‌دست می‌آوریم:

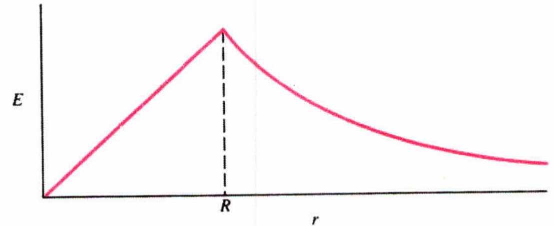
$$E = \circ \qquad (r < R) \qquad (۲۶\text{ـ}۲۱\ \text{الف})$$

$$E_r = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q}{r^۲} \qquad (r \geqslant R) \qquad (۲۶\text{ـ}۲۱\ \text{ب})$$

شاخص پایین r روی میدان الکتریکی این مطلب را یادآوری می‌کند که میدان در امتداد شعاع است. این نتایج مستقیماً از نیروی وارد بر بار آزمون در مکانهای متفاوت به‌دست می‌آید. در داخل پوسته، میدان الکتریکی صفر است. در نقاط خارجی پوسته، میدان الکتریکی شعاعی و دقیقاً همانند میدان بار نقطه‌ای است، به‌طوری که این میدان دقیقاً مشابه میدان نشان داده‌شده در شکل ۲۶ـ۳ است.

می‌توانیم از خواص پوسته‌های بار برای به‌دست آوردن میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار متقارن کروی روی کره‌ای به شعاع R استفاده کنیم. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم که بار به‌طور یکنواخت در همه جای کره توزیع شده باشد، به‌طوری که چگالی حجمی بار ثابت باشد. اگر کل بار توزیع‌شده در سرتاسر کره برابر θ باشد، در آن صورت چگالی حجمی بار برابر است با:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۲)$$



شکل ۲۶ـ۸ مقدار میدان الکتریکی ناشی از یک کرهٔ یکنواخت‌باردارشده با شعاع R.

تصور کنید که کره را به تعداد زیادی پوسته‌های نازک با شعاع r و ضخامت dr تقسیم کرده‌ایم. اگر یک بار آزمون را در فاصلهٔ r از مبدأ و در داخل پوسته قرار دهیم ($r < R$)، میدان الکتریکی در موقعیت بار آزمون فقط ناشی از پوسته‌هایی می‌شود که شعاع آنها کمتر از فاصلهٔ بار آزمون است؛ از معادلهٔ (۲۶ـ۲۱(الف)) می‌دانیم که برای تمام پوسته‌هایی که شعاع آنها بیشتر از r است، $E = ۰$. علاوه برآن، از معادلهٔ (۲۶ـ۲۱(الف)) می‌دانیم که میدان الکتریکی ناشی از تمامی پوسته‌هایی که شعاع آنها کمتر از نقطه مشاهده است برابر است با میدان مربوط به یک بار نقطه‌ای در مبدأ مختصات. مقدار آن بار نقطه‌ای برابر با کل باری است که روی تمامی پوسته‌هایی قرارگرفته که شعاع آنها کمتر از r است، یا به‌طور هم‌ارز برابر با کل بار q است که در داخل کره‌ای به شعاع r قرارگرفته است. مقدار این بار از حاصلضرب چگالی حجمی بار در حجم کره‌ای به شعاع r حاصل می‌شود:

$$q = \rho\left(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\right) = Q\frac{r^{۳}}{R^{۳}} \qquad (۲۶ـ۲۳)$$

که در اینجا از چگالی بار داده‌شده در معادلهٔ (۲۶ـ۲۲) استفاده کرده‌ایم.

با توجه به مطالب بالا، معادلهٔ (۲۶ـ۲۱(ب)) مؤلفهٔ شعاعی میدان الکتریکی را در این مکان در داخل کره به‌دست می‌دهد:

$$E_r = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_{۰}}\frac{Qr}{R^{۳}} \quad (r < R) \qquad (۲۶ـ۲۴)$$

اگر، همان‌طور که فرض کرده‌ایم، Q مثبت باشد، میدان، شعاعی و برون‌سو است؛ اگر Q منفی باشد، میدان شعاعی و درون‌سو خواهد شد. برای $r > R$، میدان همانند میدان مربوط به بار نقطه‌ای Q است که در مبدأ مختصات قرارگرفته باشد (معادلهٔ ۲۶ـ۶). توجه کنید که برای شعاعهای $r < R$، میدان به‌طور خطی با r افزایش یافته و برای شعاعهای $r > R$ به‌صورت $۱/r^{۲}$ کاهش می‌یابد. در شکل ۲۶ـ۸ مقدار میدان الکتریکی را به‌صورت تابعی از r نشان داده‌ایم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۴ یک میلهٔ پلاستیکی به طول $L = ۲۲۰\ \text{cm}$ و شعاع $R = ۳٫۶\ \text{mm}$ در نظر بگیرید که حامل بار منفی $q = ۳٫۸ \times ۱۰^{-۷}\text{C}$ است که به‌طور یکنواخت در سرتاسر سطح آن گسترده شده است. میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار در نزدیکی وسط میله و برای نقطه‌ای روی سطح میله چقدر است؟

حل. گرچه طول میله نامتناهی نیست، برای نقطه‌ای در نزدیکی وسط میله و روی سطح آن، عملاً بسیار طویل است، به‌طوری که استفاده از معادلهٔ (۲۶ـ۱۷) برای این منظور موجه است. چگالی بار خطی روی میله چنین است:

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{-۳٫۸ \times ۱۰^{-۷}\text{C}}{۲٫۲\ \text{m}} = -۱٫۷۳ \times ۱۰^{-۷}\text{C/m}$$

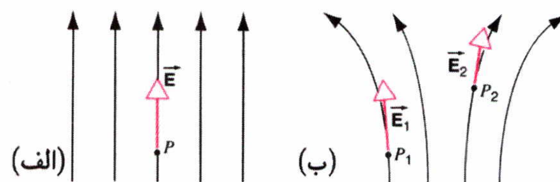
در آن صورت، از معادلهٔ (۲۶ـ۱۷)، برای $y = ۰٫۰۰۳۶\ \text{m}$ داریم

$$E_y = \frac{\lambda}{۲\pi\epsilon_{۰}y} = \frac{-۱٫۷۳ \times ۱۰^{-۷}\text{C/m}}{(۲\pi)(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{C}^{۲}/\text{N}\cdot\text{m}^{۲})(۰٫۰۰۳۶\ \text{m})} = -۸٫۶ \times ۱۰^{۵}\text{N/C}$$

علامت منفی به ما می‌گوید که، چون بار میله منفی است، جهت میدان الکتریکی، شعاعی و برون‌سو، به سمت محور میله است. جرقه‌زدن در هوای خشک و در فشار جو در یک میدان الکتریکی با شدتی در حدود $۳ \times ۱۰^{۶}\text{N/C}$ رخ می‌دهد. شدت میدانی را که در اینجا محاسبه کردیم با ضریبی در حدود ۳٫۴ از این مقدار کمتر است، به‌طوری که جرقه‌زنی نباید رخ دهد.

۲۶ـ۵ خطوط میدان الکتریکی

مفهوم میدان الکتریکی در اوایل قرن نوزدهم توسط مایکل فاراده مطرح شد. فاراده نمایش ریاضی میدان الکتریکی را به‌وجود نیاورد؛ بلکه، یک نمایش نموداری ارائه داد، که در آن نمایش، فرض کرد فضای اطراف بار الکتریکی به‌وسیلهٔ خطوط نیرو پر شده است. امروزه واقعی‌بودن خطوط نیرو را که فاراده قائل بود تأیید نمی‌کنیم، بلکه آنها را فقط به‌عنوان روشی مناسب برای به تصویر کشیدن میدان الکتریکی مورد استفاده قرار می‌دهیم. به این خطوط، خطوط میدان الکتریکی می‌گوییم.



شکل ۲۶ـ۹ (الف) خطوط میدان الکتریکی مربوط به یک میدان یکنواخت. (ب) خطوط میدان الکتریکی مربوط به یک میدان نایکنواخت.

در شکل ۲۶ـ۹(الف) خطوط میدان الکتریکی مربوط به یک میدان یکنواخت را نشان داده‌ایم. توجه کنید که در اینجا خطوط، موازی و با فاصلهٔ مساوی هستند. در شکل ۲۶ـ۹(ب) خطوط مربوط به یک میدان نایکنواخت را نشان داده‌ایم. بنابر قرارداد، خطوط میدان را با در نظرگرفتن خاصیت زیر رسم می‌کنیم:

خط مماس بر خط میدان الکتریکی که از هر نقطه‌ای از فضا می‌گذرد جهت میدان الکتریکی در آن نقطه را به‌دست می‌دهد.

مثلاً، در شکل ۲۶ـ۹(الف)، جهت میدان الکتریکی در نقطهٔ P به‌طور قائم به سمت بالا، و مماس بر خطوط میدان است. چون میدان یکنواخت است، میدان الکتریکی در تمامی نقاط موجود در این ناحیه از فضا در همین جهت است. در شکل ۲۶ـ۹(ب)، که میدان نایکنواخت را نشان داده‌ایم، میدان الکتریکی در نقطه‌های P_1 و P_2 جهتهای متفاوتی دارند، که در هر مورد مماس است بر خط میدان الکتریکی که از آن نقطه می‌گذرد.

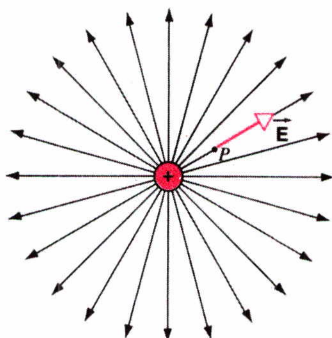
برای اینکه خطوط میدان الکتریکی این خاصیت را داشته باشند، همچنین باید به‌گونه‌ای ترسیم شوند که:

خطوط میدان الکتریکی از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم شوند.

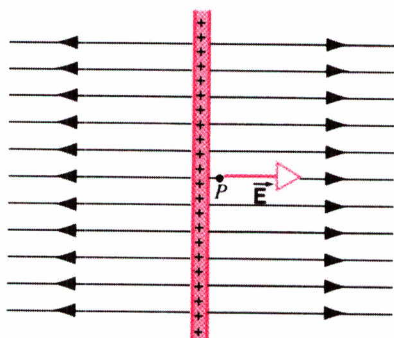
مثلاً در شکل ۲۶ـ۱۰ خطوط میدان مربوط به یک بارنقطه‌ای مثبت منزوی (یا یک گوی کوچک با بار مثبت) را نشان داده‌ایم. این خطوط، شعاعی و برون‌سو هستند، به‌طوری که در هر نقطه مانند P میدان در امتداد شعاعی است که از آن نقطه می‌گذرد. خطوط میدان از بار مثبت شروع می‌شوند و تا بینهایت ادامه می‌یابند، زیرا در این ناحیه هیچ بار منفی وجود ندارد. اگر بار الکتریکی منفی بود، جهت خطوط میدان برعکس می‌شد (یعنی شعاعی و درون‌سو).

یک خاصیت آخری خطوط میدان الکتریکی آن است که:

بزرگی میدان الکتریکی در هر نقطه با تعداد خطوط میدانی که از واحد سطح عمود بر خطوط، می‌گذرند متناسب است.



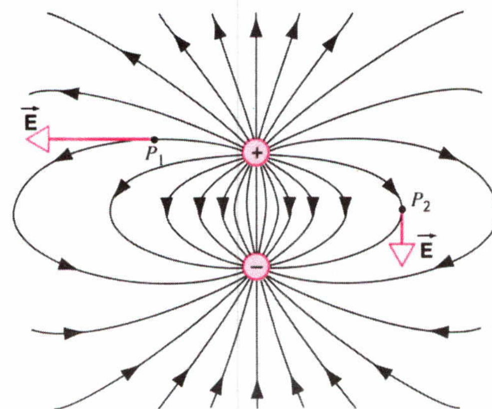
شکل ۲۶ـ۱۰ خطوط میدان الکتریکی در اطراف یک بار نقطه‌ای مثبت منزوی یا یک کره با بار یکنواخت. میدان در نقطهٔ اختیاری P نشان داده شده است.



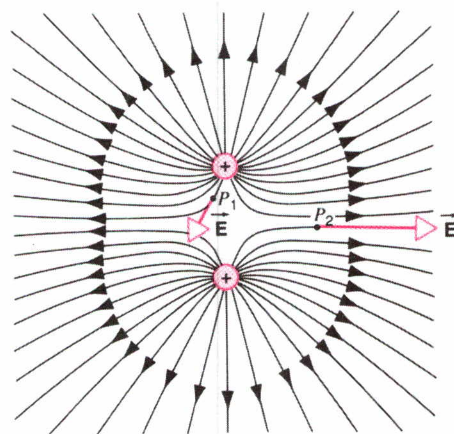
شکل ۲۶ـ۱۱ خطوط میدان الکتریکی در نزدیکی یک برگه نازک با بار یکنواخت. در اینجا به لبهٔ برگه باردار در راستای عمود بر صفحه نگاه می‌کنیم.

به‌عبارت دیگر، هر چه تعداد خطوط در نزدیکی یک نقطه بیشتر باشد، میدان در آن نقطه قویتر است. مثلاً، در شکل ۲۶ـ۹(ب)، میدان در قسمت پایینی شکل (نزدیک به نقطهٔ P_1) قویتر از میدان در قسمت بالایی شکل (نزدیک به نقطهٔ P_2) است. از طرف دیگر، در شکل ۲۶ـ۹(الف)، فاصلهٔ بین خطوط در همه جا یکسان است. این رفتار مبین آن است که مقدار میدان در همه جا یکسان است. در مورد یک بار نقطه‌ای (شکل ۲۶ـ۱۰)، خطوط میدان در نزدیکی بار خیلی نزدیک به‌هم‌اند و هر چه از بار دور شویم خطوط میدان از هم دورتر می‌شوند، و این حاکی از آن است که هر چه فاصلهٔ ما از بار دورتر شود، میدان ضعیفتر خواهد شد.

میدان یکنواخت موجود در نزدیکی یک صفحهٔ بزرگ باردار مثبت در شکل ۲۶ـ۱۱ نشان داده شده است. جهت میدان عمود است بر صفحهٔ باردار. در نزدیکی لبه‌های صفحه، میدان نایکنواخت شده و دیگر عمود بر صفحه هم نیست، ولی تا زمانی که در نزدیکی مرکز صفحه و دور از لبه‌ها قرار داشته باشیم، میدان با تقریب بسیار خوبی یکنواخت است. در اینجا هم خطوط میدان تا بینهایت ادامه می‌یابند.

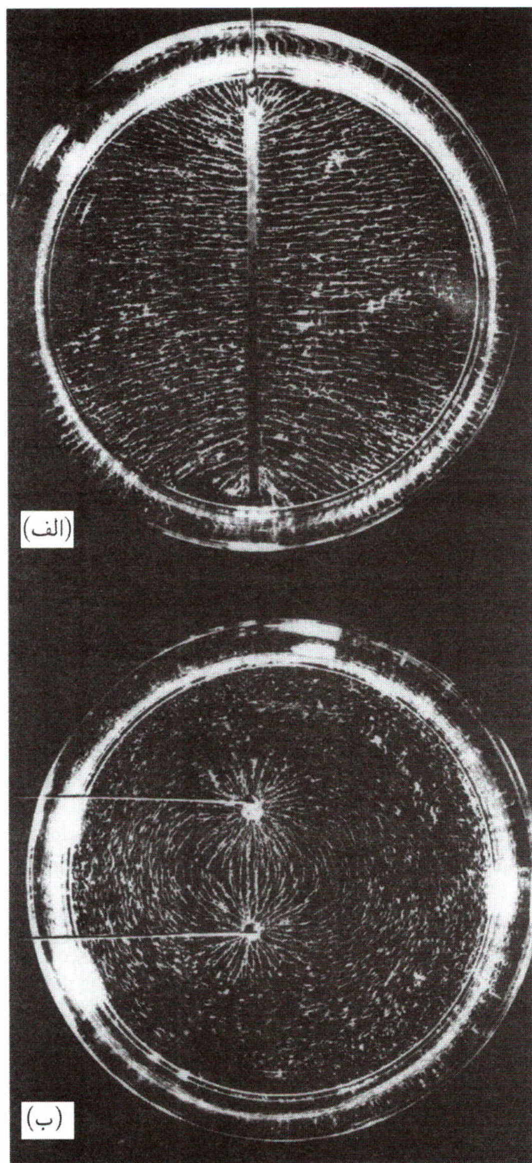


شکل ۲۶ـ۱۲ خطوط میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی.



شکل ۲۶ـ۱۳ خطوط میدان الکتریکی مربوط به دو بار مثبت مساوی.

در شکل ۲۶ـ۱۲ میدان را در نزدیکی یک دوقطبی نشان داده‌ایم (این شکل نشان می‌دهد که چگونه خطوط میدان از بار مثبت آغاز و به بار منفی منتهی می‌شوند)، و در شکل ۲۶ـ۱۳ میدان را در نزدیکی دو بار مثبت مساوی نشان داده‌ایم. به اختلاف بین این دو طرح توجه کنید. در ناحیه‌ای که مستقیماً بین دو جسم باردار قرار گرفته، چگالی خطوط میدان در شکل ۲۶ـ۱۲ بیشتر از شکل ۲۶ـ۱۳ است، که حاکی از آن است که در آن ناحیه میدان دوقطبی قویتر از میدان مربوط به دو بار مثبت است. نظر به اینکه در شکل ۲۶ـ۱۳ است، که حاکی از آن است که در آن ناحیه میدان دوقطبی قویتر از میدان مربوط به دو بار مثبت است. نظر به اینکه در شکل ۲۶ـ۱۳ در نقطهٔ وسط بین دو بار، میدان الکتریکی برابر صفر است، در آن نقطه نمی‌توان هیچ خط میدان الکتریکی ترسیم کرد. وقتی که از بارهای شکل ۲۶ـ۱۳ دور شویم، طرح توزیع خطوط میدان تغییر می‌کند و شبیه طرح مربوط به یک بار منفرد (همانند شکل ۲۶ـ۱۰) می‌شود. برای نقاط بیرونی



شکل ۲۶ـ۱۴ تصاویر مربوط به طرحهای خطوط میدان الکتریکی در نزدیکی (الف) یک صفحهٔ باردار (که خطوط میدان موازی ایجاد می‌کند) و (ب) دو میله با بارهای مساوی و ناهمنام (شبیه دوقطبی الکتریکی شکل ۲۶ـ۱۲). این طرحها با ریختن تخم چمن در یک مایع عایق قابل مشاهده شده‌اند.

در صفحهٔ عمودمنصف (صفحهٔ عمود بر صفحهٔ شکل و در نقطهٔ وسط بین دو بار)، میدان مربوط به دوقطبی الکتریکی ضعیف شده و جهت آن به سمت پایین قرار می‌گیرد، در حالی که میدان مربوط به دو بار مساوی قویتر شده و در امتداد شعاع به سمت بیرون قرار می‌گیرد، که این موضوع در شکلهای ۲۶ـ۱۲ و ۲۶ـ۱۳ در نقطهٔ P_2 نشان داده شده است.

این تصاویر در ترسیم طرح خطوط میدان الکتریکی به‌صورتی قابل مشاهده می‌توانند خیلی سودمند باشند. گرچه، باید به‌خاطر داشت که

آنها فقط یک "برش" دوبعدی را از طرحی که واقعاً سه‌بعدی است به نمایش می‌گذارند. فاصلهٔ نسبی بین خطوط میدان در دوبعد مطلقاً متناظر با فاصلهٔ این خطوط در طرح سه‌بعدی نیست و نیز اینکه فاصلهٔ بین خطوط در طرح دوبعدی ترسیم‌شده هیچ رابطهٔ ریاضی مستقیمی با مقدار میدان ندارد، جز اینکه می‌تواند حاکی از یکنواختی یا افزایشی یا کاهشی بودن مقدار میدان باشد.

طرح مربوط به خطوط میدان را می‌توان با اعمال یک میدان الکتریکی به اجسام بسیار ریز معلق در یک شارهٔ عایق، مشاهده کرد. شکل ۲۶ـ۱۴ تصاویر طرحهایی را نشان می‌دهد که به خطوط میدان الکتریکی یک برگهٔ باردارشده و یک دوقطبی الکتریکی شباهت دارند.

۲۶ـ۶ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

در بخشهای پیش، قسمت اول برهم‌کنش بار ⇆ میدان ⇆ بار را مورد بررسی قرار دادیم: میدان الکتریکی توزیع مشخصی از بارهای الکتریکی چگونه است؟ در این بخش و بخش بعد قسمت دوم برهم‌کنش را مطالعه می‌کنیم: وقتی یک ذره باردار را در یک میدان الکتریکی معلوم قرار دهیم چه روی می‌دهد؟

از معادلهٔ (۲۶ـ۴)، می‌دانیم که اگر ذره‌ای با بار q در یک میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ قرار گیرد نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ وارد بر آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$$

برای بررسی حرکت ذره در میدان الکتریکی، تنها کاری که باید انجام دهیم استفاده از قانون دوم نیوتون، $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ است، که در آن نیروی برایند وارد بر ذره شامل نیروی الکتریکی و هر نوع نیروی دیگری است که بر ذره وارد شود.

مانند مورد مطالعهٔ نخستین قوانین نیوتون، اگر موردی را در نظر بگیریم که برای آن نیرو ثابت است، می‌توانیم مسئله را ساده کنیم. بنابراین مطلب را با مطالعهٔ مواردی آغاز می‌کنیم که در آنها میدان الکتریکی و نیروی الکتریکی متناظر با آنها یکنواخت (یعنی، با تغییر موقعیت تغییر نمی‌کند) و ثابت است (یعنی برحسب زمان تغییر نمی‌کند). در عمل، چنین وضعیتی در نزدیکی یک صفحهٔ باردارشده، بزرگ حاصل می‌شود، که آن را در بخش ۲۶ـ۴ مورد بررسی قرار دادیم. حتی برای رسیدن به یکنواختی بیشتر، می‌توانیم از یک جفت صفحه باردار با علامت مخالف که در فاصلهٔ کمی از هم قرار گرفته‌اند استفاده کنیم.

برای ایجاد چنین آرایشی می‌توانیم دو پایانهٔ یک باتری را به دو صفحهٔ موازی متصل کنیم. در مثال زیر فرض می‌کنیم که میدان فقط در ناحیهٔ بین دو صفحه وجود دارد و به محض اینکه ذره فضای بین دو صفحه را ترک می‌کند، میدان سریعاً به صفر فرو می‌افتد. در واقع وقتی فاصلهٔ بین صفحات کم باشد، میدان در فاصله‌ای که در حدود فاصلهٔ بین دو صفحه است به‌سرعت افت می‌کند و در نتیجه در محاسبات مربوط به حرکت ذره اگر اثر لبه‌ای را نادیده بگیریم خطای چندانی مرتکب نشده‌ایم.

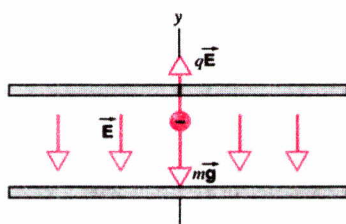
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۵ یک قطرهٔ روغن باردار به شعاع $R = ۲٫۷۶\mu\text{m}$ و چگالی $\rho = ۹۱۸\,\text{kg/m}^۳$ تحت تأثیر برایند نیروی وزن و یک میدان الکتریکی یکنواخت پایین‌سو به اندازهٔ $E = ۱٫۶۵ \times ۱۰^۶\text{N/C}$ در حالت تعادل است (شکل ۲۶ـ۱۵). (الف) بزرگی و علامت بار قطره را محاسبه کنید. جواب را برحسب بار بنیادی e بیان کنید. (ب) این قطره در معرض تابش یک چشمه پرتوزا قرار می‌گیرد که الکترون گسیل می‌کند. دو الکترون با قطره برخورد می‌کنند و در آن گیر می‌افتند و در نتیجه بار آن را به‌اندازهٔ دو واحد تغییر می‌دهند. اگر اندازهٔ میدان الکتریکی ثابت بماند، شتاب قطره را محاسبه کنید.

حل. (الف) برای اینکه قطره در حالت تعادل بماند، باید وزن آن به‌وسیلهٔ یک نیروی الکتریکی به‌اندازهٔ qE که به طرف بالا اثر می کند خنثی شود. چون میدان الکتریکی در این مسئله پایین‌سو است، پس باید بار q قطره منفی باشد تا نیروی الکتریکی در خلاف جهت میدان اثر کند. شرط تعادل چنین است

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}} + q\vec{\mathbf{E}} = ۰$$

با در نظر گرفتن مؤلفهٔ y داریم

$$-mg + q(-E) = ۰$$



شکل ۲۶ـ۱۵ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۵. قطره‌ای با بار منفی در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ قرار گرفته است. قطره تحت تأثیر ترکیب نیروی وزن $m\vec{\mathbf{g}}$ و نیروی الکتریکی $q\vec{\mathbf{E}}$ به حرکت در می‌آید.

یا از حل این معادله برای مجهول q می‌رسیم به

$$q = -\frac{mg}{E} = -\frac{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\rho g}{E}$$

$$= -\frac{\frac{۴}{۳}(۲٫۷۶\times ۱۰^{-۶}\mathrm{m})^{۳}(۹۱۸\,\mathrm{kg/m^{۳}})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^{۲}})}{۱٫۶۵\times ۱۰^{۶}\mathrm{N/C}}$$

$$= -۴٫۸۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$$

اگر q را برحسب بار الکترون $-e$ به‌صورت $q = n(-e)$ بنویسیم، که در آن n تعداد بارهای الکترونی در قطره است، در آن صورت

$$n = \frac{q}{-e} = \frac{-۴٫۸۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}}{-۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}} = ۳$$

(ب) اگر دو الکترون دیگر به قطره افزوده شود، بار قطره برابر خواهد شد با

$$q' = (n+۲)(-e) = ۵(-۱٫۶۰\times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}) = -۸٫۰۰\times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$$

در این مورد قانون دوم نیوتون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}} + q'\vec{\mathbf{E}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

و با در نظر گرفتن مؤلفهٔ y، داریم

$$-mg + q'(-E) = ma$$

حال می‌توان از این معادله برای محاسبهٔ شتاب استفاده کرد

$$a = -g - \frac{q'E}{m}$$

$$= -۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^{۲}} - \frac{(-۸٫۰۰\times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})(۱٫۶۵\times ۱۰^{۶}\mathrm{N/C})}{\frac{۴}{۳}\pi(۲٫۷۶\times ۱۰^{-۶}\mathrm{m})^{۳}(۹۱۸\,\mathrm{kg/m^{۳}})}$$

$$= -۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^{۲}} + ۱۶٫۳\,\mathrm{m/s^{۲}} = +۶٫۵\,\mathrm{m/s^{۲}}$$

به این ترتیب قطره در جهت مثبت محور y شتاب می‌گیرد.

در این محاسبات، نیروی کشش چسبندگی را که معمولاً در این موارد کاملاً حائز اهمیت‌اند نادیده گرفتیم. در واقع، شتاب قطره را در لحظه‌ای که قطره دو الکترون اضافی را می‌گیرد محاسبه کردیم. اگر قطره از حالت سکون شروع به حرکت کند نیروی کشش، که بستگی به سرعت جسم دارد، در آغاز حرکت صفر است، اما این نیرو با شروع حرکت قطره افزایش می‌یابد و در نتیجه بزرگی شتاب قطره کاهش پیدا می‌کند.

این آرایش تجربی اساس آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان را تشکیل می‌دهد، که از آن برای اندازه‌گیری بزرگی بار الکترون استفاده شد. این آزمایش را در همین بخش بررسی می‌کنیم.

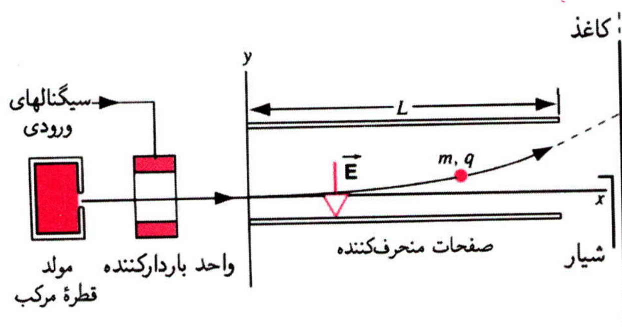
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۶ شکل ۲۶ـ۱۶ سیستم الکترودهای منحرف‌کنندهٔ باریکه را در یک چاپگر مرکب‌افشان نشان می‌دهد. یک قطرهٔ مرکب به جرم m برابر $۱٫۳ \times ۱۰^{-۱۰}\mathrm{kg}$ حامل بار q به مقدار $-۱٫۵ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{C}$ است. این قطره با سرعت $v = ۱۸\,\mathrm{m/s}$ وارد صفحات منحرف‌کننده می‌شود. طول L این صفحات $۱٫۶\,\mathrm{cm}$ و میدان الکتریکی E بین صفحات برابر $۱٫۴ \times ۱۰^{۶}\mathrm{N/C}$ است. انحراف قائم قطره در لبهٔ خروجی صفحات چقدر است؟ میدان الکتریکی متغیر در لبه‌های صفحات را نادیده بگیرید.

حل. فرض کنید که زمان عبور قطره بین صفحات منحرف‌کننده برابر t باشد. جابه‌جایی قائم و افقی قطره به ترتیب عبارت‌اند از

$$y = \frac{۱}{۲}at^{۲} \quad \text{و} \quad L = vt$$

که در اینجا a شتاب قائم قطره است.

مانند مسئلهٔ نمونهٔ پیش، می‌توان مؤلفهٔ y قانون دوم نیوتون را به‌صورت $-mg + q(-E) = ma$ نوشت. در این مورد، نیروی الکتریکی وارد بر ذره، $-qE$، خیلی بیشتر از نیروی گرانشی mg است



شکل ۲۶ـ۱۶ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۶. قسمتهای اصلی یک چاپگر مرکب‌افشان. سیگنال ورودی از یک کامپیوتر بار قطرهٔ مرکب و در نتیجه محل برخورد با کاغذ را کنترل می‌کند. نیروی عرضی وارد از طرف میدان $\vec{\mathbf{E}}$ سبب انحراف قطرهٔ مرکب می‌شود. قطره هنگامی که در فاصلهٔ بین صفحات قرار دارد یک مسیر سهمی را می‌پیماید، ولی پس از ترک صفحات در امتداد خط راست حرکت می‌کند (خط‌چین در شکل).

به‌طوری که شتاب ذره را می‌توان برابر با $-qE/m$ در نظر گرفت. از حذف t بین دو معادلهٔ بالا و جایگزین کردن مقدار a می‌رسیم به

$$y = \frac{-qEL^{۲}}{۲mv^{۲}}$$
$$= \frac{(-۱٫۵\times۱۰^{-۱۳}\mathrm{C})(۱٫۴\times۱۰^{۶}\mathrm{N/C})(۱٫۶\times۱۰^{-۲}\mathrm{m})^{۲}}{(۲)(۱٫۳\times۱۰^{-۱۰}\mathrm{kg})(۱۸\mathrm{m/s})^{۲}}$$
$$= ۶٫۴\times۱۰^{-۴}\mathrm{m} = ۰٫۶۴\mathrm{mm}$$

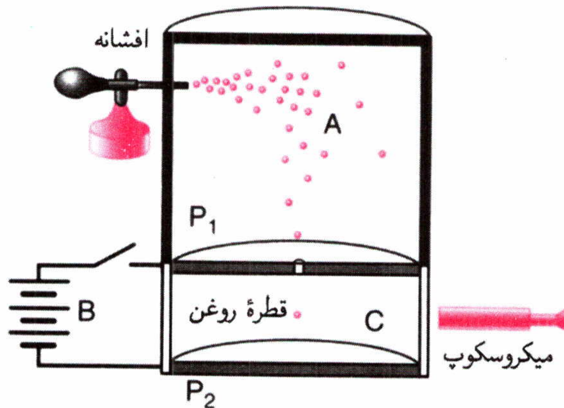
انحراف قطره در محل کاغذ بیشتر از این مقدار است زیرا قطرهٔ مرکب پس از ترک ناحیهٔ منحرف‌کننده در خط مستقیم حرکت می‌کند، که در شکل ۲۶ـ۱۶ با خط‌چین نشان داده شده است. برای اینکه قطره‌های مرکب را به‌خوبی نشانه‌گیری کنیم که حروف را به‌خوبی تشکیل دهند، باید بار قطره‌های مرکب، یعنی q، کنترل شود. چون انحراف قطره در محدودهٔ چند درصد با بار q متناسب است. در حل این مسئله، باز هم نیروهای چسبندگی وارد بر ذره را نادیده گرفتیم، این نیروها در این سرعتهای زیاد ذرات اهمیت فراوان دارند.

اندازه‌گیری بار بنیادی

امروزه می‌دانیم که بار الکتریکی کوانتیده است؛ یعنی، بار به‌صورت مضربهای درستی از یک بار بنیادی e وجود دارند، که مقدار مورد قبول امروزی آن $۱٫۶۰۲۱۷۶۴۶۲\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$ است، که عدم قطعیت تجربی این مقدار فقط در دو رقم آخر ظاهر می‌شود. این مقدار جدید، مانند تقریباً تمامی ثابتهای بنیادی فیزیک، از آزمایشهای گوناگون و مرتبط به‌هم و با دقتهای مرتباً فزاینده به‌دست آمده است.

چگونه برای اولین بار دریافتیم که بار کوانتیده است، و چگونه برای اولین بار مقدار e اندازه‌گیری شد؟ نخستین پاسخهای مشخص و قطعی به این پرسشها از آزمایشهای انجام‌شده توسط فیزیکدان امریکایی رابرت ا. میلیکان* (۱۸۶۸ تا ۱۹۵۳) به‌دست آمدند. میلیکان به‌خاطر این کشف و کارهای مرتبط با آن در سال ۱۹۲۳ موفق به دریافت جایزهٔ نوبل شد.

* برای مطالعهٔ جزییات آزمایشهای میلیکان نگاه کنید به کتاب *World of the Atoms* گردآوری‌شده توسط هنری ا. بورس و لوید موتز (ناشر Basic Books, 1966) فصل ۴۰. برای آگاهی از دیدگاه دو فیزیکدانی که دانشجویان کارشناسی ارشد میلیکان بودند رجوع کنید به "رابرت ا. میلیکان، معلم فیزیک" نوشتهٔ آلفرد روبر در مجله *Physics Teacher*، شمارهٔ فوریه ۱۹۷۸، صفحهٔ ۷۸ و "کارهای من زیر نظر میلیکان در آزمایش قطرهٔ روغن" نوشتهٔ هاروی فلچر، در مجلهٔ *Physics Today*، شماره ژوئن ۱۹۸۲ صفحهٔ ۴۳.



شکل ۲۶ـ۱۷ وسیلهٔ آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان برای اندازه‌گیری بار بنیادی e. حرکت قطره در اتاقک C مشاهده می‌شود، که در آنجا قطره تحت تأثیر گرانی، میدان الکتریکی حاصل از باتری B، اگر قطره در حال حرکت باشد، یک نیروی کشش چسبندگی قرار دارد.

در شکل ۲۶ـ۱۷ وسایل آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان را نشان داده‌ایم. قطره‌های بسیار ریزروغن توسط فشانه‌ای به داخل اتاقک A پاشیده می‌شوند. در این فرایند پاشیدن برخی از قطره‌ها دارای بار مثبت یا منفی می‌شوند. قطره‌ای را در نظر می‌گیریم که دارای بار q (به فرض منفی) است؛ این قطره از طریق سوراخ کوچکی در صفحهٔ $P_{۱}$ به اتاقک C وارد می‌شود.

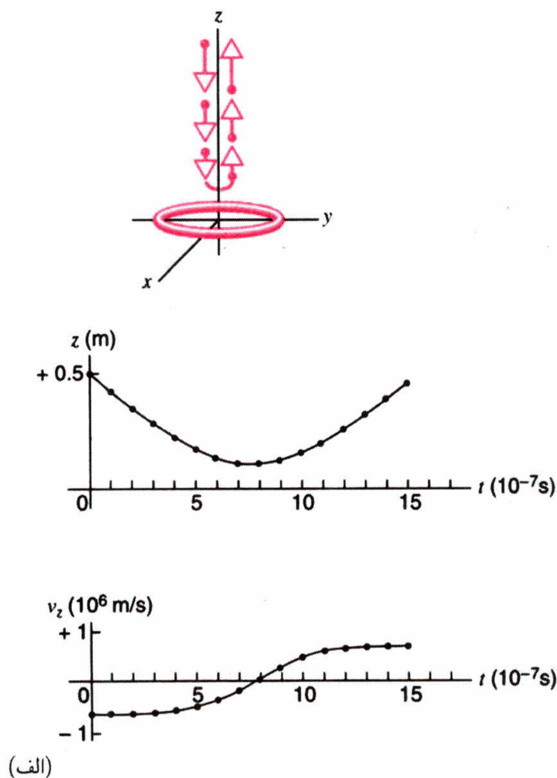
اگر در اتاقک C میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، به قطرهٔ روغن دو نیرو وارد می‌شود، نیروی وزن mg و نیروی بالاسوی کشش چسبندگی، که مقدار آن با سرعت ذرهٔ در حال سقوط متناسب است. قطره بلافاصله به‌سرعت حدی v می‌رسد که در آن سرعت دو نیرو دقیقاً با هم برابر می‌شوند.

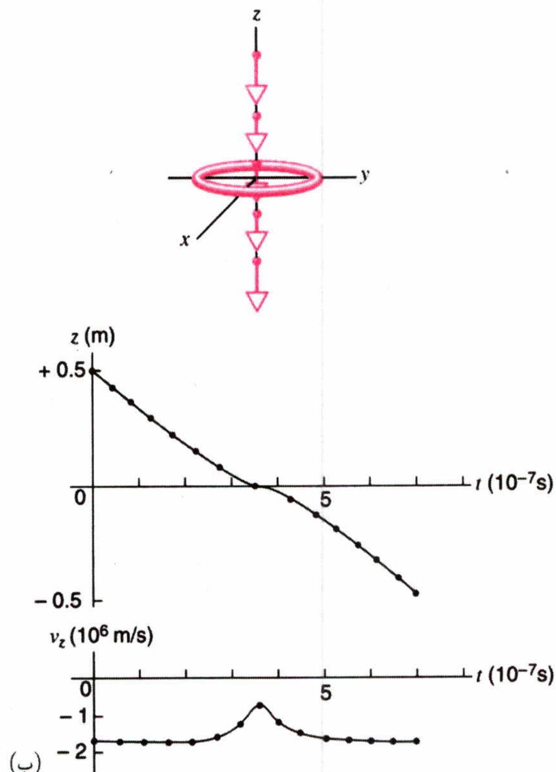
اکنون یک میدان الکتریکی پایین‌سوی $\vec{\mathbf{E}}$، با اتصال صفحات $P_{۱}$ و $P_{۲}$ به دو سر باتری B، در داخل اتاقک برقرار می‌کنیم. در این صورت نیروی سوم $q\vec{\mathbf{E}}$ بر قطره اثر می‌کند. اگر q منفی باشد، این نیرو بالاسوست، فرض می‌کنیم که در این حالت قطره با سرعت حدی جدید v' به‌طرف بالا رانده شود. در هر دو مورد، نیروی کشش در خلاف جهت حرکت قطره و اندازهٔ آن با سرعت قطره مناسب است. مقدار بار قطره، یعنی q، را می‌توان از اندازه‌گیریهای مربوط به سرعتهای v و v' به‌دست آورد.

میلیکان دریافت که مقادیر به‌دست‌آمده برای q همگی با رابطهٔ زیر سازگارند

$$q = ne, \qquad n = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, \ldots$$

یعنی، بار روی قطرهٔ روغن فقط مضربهای درستی از یک کمیت





شکل۲۶ـ۱۸ (الف) وضعیت حرکت پروتونی که در امتداد محور حلقه‌ای دارای بار مثبت یکنواخت پرتاب شده است. مکان و سرعت ذره نشان داده شده است. پروتون در زمان $۸ \times ۱۰^{-۷}\text{s}$ به‌طور لحظه‌ای به حالت سکون در می‌آید و جهت حرکتش را عوض می‌کند. نقطه‌های نشان داده‌شده در شکل حاصل محاسبات عددی هستند؛ منحنیها را از این نقطه‌ها رسم کرده‌ایم. (ب) اگر سرعت اولیه پروتون را به‌قدرکافی افزایش دهیم، این پروتون می‌تواند از حلقه عبور کند؛ سرعت پروتون به هنگام عبور را از مرکز حلقه کمترین مقدار است.

بنیادی مشخص (بار بنیادی e) هستند. میلیکان نتیجه گرفت که مقدار این بار باید $۱٫۶۴ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ باشد، که با مقدار پذیرفته‌شدهٔ امروزی همخوانی دارد. آزمایش میلیکان دلیل قانع‌کننده‌ای را برای کوانتیدگی بار الکتریکی فراهم می‌آورد.

حرکت در میدانهای الکتریکی نایکنواخت (اختیاری)

تاکنون تنها میدانهای الکتریکی یکنواخت را مورد مطالعه قرار دادیم، که در آنها میدان الکتریکی چه به لحاظ اندازه و چه از نظر جهت، در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کرد، ثابت بود. اما، اغلب با میدانهای نایکنواخت مواجه می‌شویم. مثلاً، حلقهٔ حامل بار مثبت نشان داده‌شده در شکل ۲۶ـ۱۸ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی این حلقه روی محور آن با معادلهٔ (۲۶ـ۱۸) مشخص شده است. تصور کنید که ذرهٔ بارداری را با سرعت $v_\circ$ در امتداد محور z و از فاصله‌ای بسیار دور به سمت حلقه پرتاب می‌کنیم. وقتی ذره در امتداد محور حلقه حرکت می‌کند، میدان الکتریکی (و در نتیجه نیروی الکتریکی وارد بر ذره) افزایش می‌یابد. با چشم‌پوشی از نیروی گرانشی و در نظر گرفتن نیروی الکتریکی وارد بر ذره به تنهایی، چگونه می‌توانیم حرکت این ذره را تجزیه و تحلیل کنیم؟

در این‌گونه موارد، برای نیروهای وابسته به مکان باید از روشهای تحلیلی، شبیه روشهای مورد بحث در بخش ۵ـ۵ برای نیروهای وابسته به زمان، استفاده کنیم. یک روش معادل همانا دنبال‌کردن روند ارائه‌شده در بخش ۵ـ۱۲ است زیرا، در فصل ۲۸ نشان خواهیم داد که، نیروی الکتروستاتیک یک نیروی پایستار است. به‌طور هم‌ارز، می‌توانیم برای یافتن جواب مسئله از روشهای عددی استفاده کنیم. برای این منظور زمان حرکت را به بازه‌های زمانی بسیار کوتاهی تقسیم می‌کنیم، که در این بازه‌ها می‌توانیم شتاب حرکت را تقریباً ثابت در نظر بگیریم؛ یک جواب تقریبی را می‌توانیم با استفاده از کامپیوتر به‌دست آوریم.

برای انجام این محاسبه، از حلقه‌ای به شعاع $R = ۳\,\text{cm}$ و با چگالی بار خطی $\lambda = +۲ \times ۱۰^{-۷}\,\text{C/m}$ استفاده می‌کنیم. پروتونی $(m = ۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\text{kg}, q = +۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\,\text{C})$ را از مکان اولیهٔ $z = +۰٫۵\,\text{m}$ با سرعت اولیهٔ $v_{z\circ} = -۷ \times ۱۰^{۵}\text{m/s}$ در امتداد محور حلقه پرتاب می‌کنیم. (علامت منفی سرعت اولیه به معنی

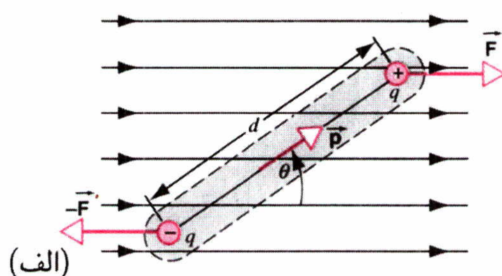
حرکت به طرف پایین و به سوی حلقه است که در صفحهٔ xy قرار دارد.) حلقهٔ دارای بار مثبت به پروتونی که بار مثبت دارد نیروی رانشی وارد کرده سرعت آن را کم می‌کند. در شکل ۲۶ـ۱۸(الف) حرکت پروتون را در حالتی رسم کرده‌ایم که انرژی جنبشی کافی برای رسیدن به صفحهٔ حلقه ندارد. پروتون در نقطه‌ای در بالای صفحهٔ حلقه به‌طور لحظه‌ای به حالت سکون در می‌آید و سپس جهت حرکتش را عوض می‌کند و از این لحظه به بعد حلقه آن را در جهت مثبت z شتاب می‌دهد. توجه کنید که به‌جز در ناحیهٔ نزدیک به حلقه، سرعت پروتون تقریباً ثابت است، زیرا میدان الکتریکی در فواصل دوردست ضعیف است.

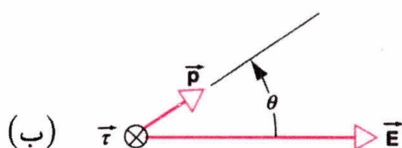
شکل ۲۶ـ۱۸(ب) حرکت پروتون را در حالتی نشان می‌دهد که انرژی جنبشی پروتون بیش از مقدارکافی برای رسیدن به صفحهٔ حلقه است. نیروی رانشی حرکت پروتون را کُند می‌کند ولی آن را متوقف نمی‌کند. پروتون با سرعتی که به هنگام عبور از حلقه کمینه است از حلقه می‌گذرد. باز هم، در نواحی دور از حلقه، پروتون با سرعت تقریباً ثابت حرکت می‌کند.

۲۶ـ۷ دوقطبی در میدان الکتریکی

وقتی یک دوقطبی الکتریکی (شکل ۲۶ـ۵(الف)) در یک میدان الکتریکی خارجی قرارگیرد، نیروی وارد بر بار مثبت در یک جهت و نیروی وارد بر بار منفی در جهت مخالف است. برای اینکه اثر برایند این نیروها را در نظر بگیریم، بهتر است که از بردارگشتاور دوقطبی $\vec{\mathbf{p}}$ استفاده کنیم، که مقدار آن برابر $p = qd$ و جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت است. نوشتن گشتاور دوقطبی به‌صورت برداری این امکان را فراهم می‌آورد که روابط بنیادی مشتمل بر دوقطبی الکتریکی را به‌صورت خلاصه بنویسیم.

در شکل ۲۶ـ۱۹(الف) یک دوقطبی الکتریکی را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ نشان داده‌ایم. (این میدان، ناشی از خود دوقطبی نیست بلکه میدانی است که به‌وسیلهٔ یک عامل خارجی ایجاد شده است که عامل آن در شکل نشان داده شده است.) گشتاور دوقطبی $\vec{\mathbf{p}}$ با جهت میدان زاویهٔ θ را می‌سازد. فرض می‌کنیم که میدان یکنواخت است، به‌طوری که $\vec{\mathbf{E}}$ در محل بارهای $+q$ و $-q$ دارای اندازه و جهت یکسان باشد. در نتیجه نیروهای وارد بر بارهای $+q$ و $-q$ دارای اندازهٔ یکسان $F = qE$ ولی دارای جهتهای مخالف هستند، که این موضوع در شکل ۲۶ـ۱۹(الف) نشان داده شد. بنابراین نیروی خالص وارد بر دوقطبی از طرف میدان خارجی یکنواخت برابر





شکل ۲۶ـ۱۹ (الف) یک دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت. (ب) رابطهٔ برداری $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{E}}$، بین گشتاور دوقطبی $\vec{\mathbf{P}}$، میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ و گشتاور نیروی برایند $\vec{\tau}$ وارد بر دوقطبی. در اینجا جهت بردار گشتاور به‌طرف داخل صفحهٔ شکل است.

صفر است، ولی یک گشتاور نیروی خالص حول مرکز جرم آن وجود دارد که می‌خواهد دوقطبی را بچرخاند تا $\vec{\mathbf{p}}$ را هم‌راستای $\vec{\mathbf{E}}$ کند. گشتاور نیروی وارد بر هر یک از دو ذره با عبارت $\tau = Fr_{\perp}$ مشخص شده است؛ در نتیجه، اندازهٔ گشتاور نیروی خالص ناشی از اثر دو نیرو حول مرکز دوقطبی برابر است با

$$\tau = F\frac{d}{۲}\sin\theta + F\frac{d}{۲}\sin\theta = Fd\sin\theta \qquad (۲۶\text{ـ}۲۵)$$

و جهت آن مطابق شکل ۲۶ـ۱۹(ب) عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل صفحه است، معادلهٔ (۲۶ـ۲۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\tau = (qE)d\sin\theta = (qd)E\sin\theta = pE\sin\theta \qquad (۲۶\text{ـ}۲۶)$$

معادلهٔ (۲۶ـ۲۶) را می‌توان به‌صورت برداری زیر نوشت

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۷)$$

که با رابطه‌های جهت‌دار برای حاصلضرب برداری، که با سه بردار در شکل ۲۶ـ۱۹(ب) نشان داده‌شده، سازگار است.

همان‌طور که در دینامیک معمول است، وقتی نیروهای پایستار (نیروی الکتروستاتیک، چنانکه در فصل ۲۸ خواهیم دید، یک نیروی پایستار است) در کارند، می‌توانیم برای نمایش سیستم از معادله‌های نیرو یا معادله‌های انرژی به‌صورت هم‌ارز استفاده کنیم. بنابراین کاری را که میدان الکتریکی E برای چرخاندن یک دوقطبی به اندازهٔ زاویهٔ θ

انجام می‌دهد در نظر می‌گیریم. با بهره‌گیری از رابطهٔ مناسب برای کار در حرکت دورانی (معادلهٔ ۱۱ـ۲۵)، کار میدان خارجی در چرخاندن دوقطبی از زاویهٔ اولیهٔ $\theta_\circ$ به زاویهٔ نهایی θ برابر است با

$$W = \int dW = \int_{\theta_\circ}^{\theta} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\theta_\circ}^{\theta} -\tau d\theta \qquad (۲۶\text{ـ}۲۸)$$

که در این رابطه $\vec{\tau}$ گشتاور نیرویی است که میدان الکتریکی خارجی اعمال می‌کند. علامت منفی در معادلهٔ (۲۶ـ۲۸) ضروری است زیرا گشتاور نیروی τ تمایل به کاهش زاویهٔ θ دارد؛ در اصطلاح برداری، $\vec{\tau}$ و $d\vec{\theta}$ در جهتهای مخالف قرار دارند، در نتیجه $\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -\tau d\theta$.

از ترکیب معادلهٔ (۲۶ـ۲۸) با معادلهٔ (۲۶ـ۲۶) نتیجه می‌گیریم

$$W = \int_{\theta_\circ}^{\theta} -pE \sin\theta d\theta = -pE \int_{\theta_\circ}^{\theta} \sin\theta d\theta$$

$$= pE(\cos\theta - \cos\theta_\circ) \qquad (۲۶\text{ـ}۲۹)$$

چون کار انجام‌شده توسط عاملی که میدان خارجی را به‌وجود می‌آورد برابر است با منفی تغییر در انرژی پتانسیل مجموعهٔ میدان + دوقطبی، بنابراین داریم

$$\Delta U \equiv U(\theta) - U(\theta_\circ) = -W = -pE(\cos\theta - \cos\theta_\circ) \qquad (۲۶\text{ـ}۳۰)$$

زاویهٔ مرجع $\theta_\circ$ را به‌صورت دلخواه برابر با ۹۰° انتخاب می‌کنیم و انرژی پتانسیل $U(\theta_\circ)$ در آن زاویه را برابر با صفر می‌گیریم. در این‌صورت، انرژی پتانسیل در هر زاویهٔ θ برابر است با

$$U = -pE\cos\theta \qquad (۲۶\text{ـ}۳۱)$$

که می‌توان آن را به‌صورت برداری زیر نوشت:

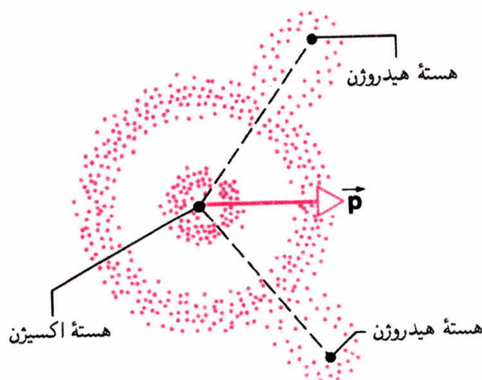
$$U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \qquad (۲۶\text{ـ}۳۲)$$

به این ترتیب وقتی $\vec{\mathbf{p}}$ و $\vec{\mathbf{E}}$ موازی باشند U کمینه است.

مولکول آب دارای یک دوقطبی الکتریکی است. در یک اجاق میکروموج، میدان الکتریکی مربوط به تابش میکروموجی تمایل دارد که گشتاور دوقطبی مولکولهای آب را با میدان هم‌راستا کند. یک مولکول آزاد آب به‌راحتی حول وضعیت تعادلش نوسان می‌کند، ولی در موارد دیگر (مانند مواد غذایی) برهم‌کنش بین مولکولهای آب مجاور هم، حرکت زاویه‌ای ناشی از گشتاور نیرو (یا به‌طور هم‌ارز، انرژی جنبشی دورانی ناشی از کاهش انرژی پتانسیل دوقطبی در میدان) را به انرژی داخلی تبدیل می‌کند. جهت میدان الکتریکی در هر ۲×۱۰^{-۱۰} ثانیه برعکس می‌شود، و چون گشتاورهای دوقطبی پیوسته تلاش می‌کنند که از میدان پیروی کنند، انرژی را به مواد غذایی منتقل می‌کنند که غذا را می‌پزد.

بنابراین حرکت دوقطبی در یک میدان خارجی را می‌توان از دیدگاه گشتاوری نیرویی که یک دوقطبی را می‌چرخاند تا با میدان هم‌خط کند (معادلهٔ ۲۶ـ۲۷) و یا از دیدگاه انرژی پتانسیلی که به هنگام همسویی دوقطبی با میدان کمینه می‌شود (معادلهٔ ۲۶ـ۳۲) تعبیر کرد. انتخاب بین این دو تعبیر معمولاً به تناسب کاربرد، در مورد مسئلهٔ خاص مورد مطالعه، وابسته است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۷ یک مولکول بخار آب (H_2O) دارای یک گشتاور دوقطبی الکتریکی به اندازهٔ $p = ۶{,}۲ \times ۱۰^{-۳۰}\,\mathrm{C \cdot m}$ است. (این گشتاور دوقطبی بزرگ عامل بسیاری از خواصی است که آب را به ماده‌ای این چنین مهم تبدیل می‌کند، مانند توانایی آن در ایفای نقش یک حلال همگانی.) شکل ۲۶ـ۲۰ این مولکول را با سه هسته و ابرهای الکترونی اطراف آنها نشان می‌دهد. گشتاور دوقطبی الکتریکی $\vec{\mathbf{p}}$ به‌وسیلهٔ یک بردار روی محور تقارن نشان داده شده است. گشتاور دوقطبی به این دلیل پدید می‌آید که مرکز مؤثر بار مثبت بر مرکز مؤثر بار منفی منطبق نیست. (یک مورد برعکس آن مولکول کربن دیوکسید، CO_2 است. در این مولکول هر سه اتم در امتداد یک خط راست قرار دارند؛ اتم کربن در وسط و اکسیژنها در دو طرف آن. مرکز بار مثبت بر مرکز بار منفی در مرکز جرم مولکول برهم منطبق‌اند و گشتاور دوقطبی الکتریکی CO_2 صفر است.) (الف) فاصلهٔ بین مرکزهای مؤثر بارهای مثبت و منفی در مولکول H_2O چقدر است؟



شکل ۲۶ـ۲۰ یک مولکول H_2O، شامل هسته‌های سه اتم و توزیع الکترونی آنها، و بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی $\vec{\mathbf{p}}$ مولکول.

(ب) بیشینهٔ گشتاور نیروی یک مولکول H_2O در میدانهای الکتریکی آزمایشگاهی نوعی با اندازه‌ای در حدود $۱٫۵ \times ۱۰^{۴} \mathrm{N/C}$ چقدر است؟ (ج) فرض کنید که گشتاور دوقطبی H_2O در آغاز در خلاف جهت میدان قرار گرفته باشد. میدان الکتریکی چقدر کار باید انجام دهد تا مولکول در جهت میدان قرار بگیرد؟

حل. (الف) در این مولکول ۱۰ الکترون و متناظر با آن ۱۰ بار مثبت وجود دارد. برای بزرگی گشتاور دوقطبی می‌توانیم بنویسیم

$$p = qd = (۱۰e)(d)$$

که در این رابطه e بار بنیادی و d فاصلهٔ بین مراکز دو مجموعه بار است که در جستجوی آن هستیم. به این ترتیب

$$d = \frac{p}{۱۰e} = \frac{۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰} \mathrm{C \cdot m}}{(۱۰)(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹} \mathrm{C})}$$
$$= ۳٫۹ \times ۱۰^{-۱۲} \mathrm{m} = ۳٫۹ \,\mathrm{pm}$$

این فاصله در حدود ۴٪ فاصلهٔ پیوند OH در این مولکول است.

(ب) همان‌طور که معادلهٔ (۲۶ـ۲۶) نشان می‌دهد، گشتاور نیرو وقتی بیشینه است که $\theta = ۹۰^\circ$ باشد. از جایگزینی این مقدار در آن معادله نتیجه می‌گیریم که

$$\tau = pE \sin\theta$$
$$= (۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰} \mathrm{C \cdot m})(۱٫۵ \times ۱۰^{۴} \mathrm{N/C})(\sin ۹۰^\circ)$$
$$= ۹٫۳ \times ۱۰^{-۲۶} \mathrm{N \cdot m}$$

(ج) کار لازم برای چرخاندن یک دوقطبی از $\theta_\circ = ۱۸۰^\circ$ تا $\theta = ۰^\circ$ از معادلهٔ (۲۶ـ۲۹) به‌دست می‌آید،

$$W = pE(\cos\theta - \cos\theta_\circ)$$
$$= pE(\cos ۰^\circ - \cos ۱۸۰^\circ)$$
$$= ۲pE = (۲)(۶٫۲ \times ۱۰^{-۳۰} \mathrm{C \cdot m})(۱٫۵ \times ۱۰^{۴} \mathrm{N/C})$$
$$= ۱٫۹ \times ۱۰^{-۲۵} \mathrm{J}$$

به‌منظور مقایسه، میانگین سهم انرژی انتقالی در انرژی داخلی (برابر با $۳/۲kT$) یک مولکول در دمای اتاق برابر $۶٫۲ \times ۱۰^{-۲۱} \mathrm{J}$ است، که این مقدار ۳۳۰۰۰ مرتبه بزرگتر است. برای شرایط این مسئله، آشفتگی گرمایی بر تمایل دوقطبیها به هم‌خط‌شدن با میدان غلبه می‌کند. یعنی اگر مجموعه‌ای از مولکولها در دمای اتاق داشته باشیم که سمتگیری گشتاورهای دوقطبی آنها کاتوره‌ای باشد، کاربرد یک میدان الکتریکی با این شدت تأثیر ناچیزی در همسوکردن گشتاورهای دوقطبی دارد، زیرا انرژیهای داخلی زیاد است. بنابراین اگر بخواهیم دوقطبیها را همسو کنیم، باید از میدانی با شدت بسیار بیشتر استفاده کنیم یا در دماهای بسیار پایینتر کار کنیم یا اینکه از هر دو مورد مطرح‌شده بهره‌مند شویم.

۲۶ـ۸ مدل هسته‌ای اتم (اختیاری)

امروزه می‌دانیم که اتم تشکیل شده است از یک هسته بسیار کوچک که حامل بار مثبت Ze است، که در اینجا Z عدد اتمی اتم است. هسته احاطه شده است با یک حجم بسیار بزرگتری که حاوی Z الکترون و هر الکترون حامل بار $-e$ است، به‌طوری که اتم به‌صورت یک مجموعهٔ کامل از لحاظ بار الکتریکی خنثی است. همچنین می‌دانیم که هسته بخش بسیار بزرگی (معمولاً بیش از ۹۹٫۹۹۵٪) از جرم اتم را تشکیل می‌دهد.

در سالهای نخستین قرن بیستم این واقعیتها شناخته نشده بودند، و تصورات بی‌شماری دربارهٔ ساختار اتم و به‌ویژه دربارهٔ چگونگی توزیع بار مثبت آن وجود داشت. بنابر یک نظریه که در آن روزها خیلی مورد توجه قرار گرفته بود، بار مثبت به‌صورت کم‌وبیش یکنواخت در سرتاسر حجم کروی اتم توزیع شده بود. این مدل برای ساختار اتم که توسط جی. جی تامسون پیشنهاد شده بود به افتخار او مدل تامسون نامیده می‌شود. (تامسون اولین کسی بود که نسبت بار به جرم الکترون را اندازه‌گیری کرد و بنابراین غالباً افتخار کشف الکترون به او نسبت داده می‌شود.) این مدل برای اتم را مدل "کیک کشمشی" نیز می‌خوانند، زیرا الکترونها در داخل بستر گستردهٔ کرهٔ بار مثبت کاشته شده‌اند درست مانند کشمشهایی که در همه جای یک کیک قرار گرفته‌اند.

یکی از راههای آزمایش اعتبار این مدل، تعیین میدان الکتریکی اتم با کاویدن آن توسط باریکه‌ای از پرتابه‌های با بار مثبت است که از نزدیکی آن عبور کنند. ذرات موجود در باریکه به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی اتم از مسیرشان منحرف یا پراکنده می‌شوند. در ادامهٔ این مبحث، فقط تأثیر یک کرهٔ با بار مثبت را روی پرتابه بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که جرم پرتابه خیلی کوچکتر از جرم اتم و خیلی بیشتر از جرم الکترون باشد. با این فرضها، الکترونها تأثیر ناچیزی در پراکنده‌کردن پرتابه دارند، و می‌توان چنین فرض کرد که به هنگام پراکندگی پرتابه اتم در جای خودش ثابت می‌ماند.

می‌توانیم انحراف پرتابه از اتم مدل تامسون را، که در آن بار مثبت

به‌طور یکنواخت در سرتاسر حجم اتم توزیع شده است، برآورد کنیم. میدان الکتریکی ناشی از یک کره با بار مثبت یکنواخت را برای نقاط خارج از کره با معادلهٔ (۲۶ـ۶) و برای نقاط داخلی کره با معادلهٔ (۲۶ـ۲۴) به‌دست دادیم. در اینجا می‌خواهیم میدان الکتریکی روی سطح کره را که، مطابق شکل ۲۶ـ۸، بزرگترین میدانی است که چنین توزیعی می‌تواند ایجاد کند، محاسبه کنیم. اتم سنگینی مانند طلا را در نظر می‌گیریم، که حاوی بار مثبت Q برابر با ۷۹e بوده و شعاع R آن در حدود $۱٫۰ \times ۱۰^{-۱۰}\text{m}$ است. با چشم‌پوشی از الکترونها، میدان الکتریکی ناشی از بارهای مثبت در $r = R$ چنین است

$$E_{\max} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{Q}{R^۲} = ۱٫۱ \times ۱۰^{۱۳}\text{N/C}$$

فرض کنید که در این آزمایش از باریکه‌ای از ذرات آلفا به‌عنوان پرتابه استفاده می‌کنیم، که دارای مثبت $q = ۲e$ و جرم m آن برابر با $۶٫۶ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$ است. ذرات آلفا هستهٔ اتمهای هلیم هستند که در فرایندهای واپاشی پرتوزای معینی گسیل می‌شوند. انرژی جنبشی نوعی برای این‌گونه ذرات ممکن است در حدود $K = ۶\,\text{MeV}$ یا $۹٫۶ \times ۱۰^{-۱۳}\text{J}$ باشد. به‌آسانی می‌توانید تحقیق کنید که در این انرژی سرعت ذره در حدود $۱٫۷ \times ۱۰^{۷}\text{m/s}$ است.

فرض کنید که ذرهٔ آلفا از نزدیکی سطح اتم می‌گذرد، که در آنجا میدان الکتریکی دارای بیشترین مقداری است که این اتم می‌تواند اعمال کند. نیروی متناظر با این میدان که بر ذره وارد می‌شود برابر است با

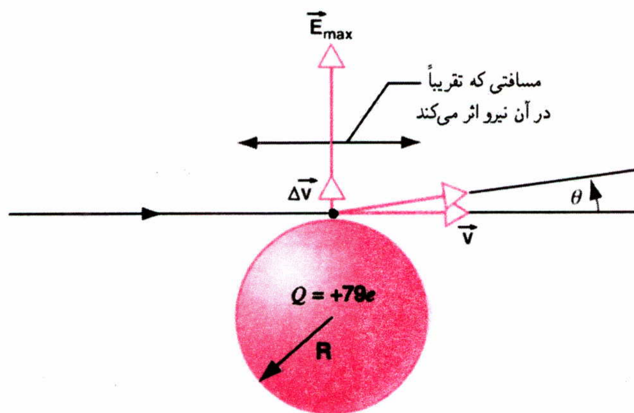
$$F = qE_{\max} = ۳٫۵ \times ۱۰^{-۶}\text{N}$$

در شکل ۲۶ـ۲۱ نمودار شمایی یک آزمایش پراکندگی را نشان داده‌ایم. محاسبات واقعی مربوط به انحراف نسبتاً پیچیده است، ولی می‌توانیم تقریبهایی را در نظر بگیریم که محاسبات را ساده و برآورد بیشینهٔ انحراف را میسر می‌کند. فرض می‌کنیم که نیروی بالا ثابت است و فقط در مدت زمان Δt اثر می‌کند. مدت Δt، زمانی است که پرتابه مسافتی برابر با قطر اتم را می‌پیماید، که این مورد در شکل ۲۶ـ۲۱ نشان داده شده است. این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\Delta t = \frac{۲R}{v} = ۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۷}\text{s}$$

نیروی وارد بر ذره به آن یک شتاب جانبی a می‌دهد، که این شتاب سبب ایجاد یک سرعت جانبی می‌شود که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = ۶٫۴ \times ۱۰^{۳}\text{m/s}$$



شکل ۲۶ـ۲۱ پراکندگی یک پرتابه با بار مثبت که از نزدیکی سطح یک اتم عبور می‌کند، اتم را به‌صورت یک کره با بار مثبت یکنواخت در نظر گرفته‌ایم. میدان الکتریکی سبب انحراف پرتابه به اندازهٔ زاویهٔ θ می‌شود.

این ذره تحت زاویهٔ کوچک θ انحراف پیدا می‌کند که مقدار آن را چنین برآورد می‌کنیم

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{\Delta v}{v} = ۰٫۰۲^\circ$$

این‌گونه آزمایشهای پراکندگی برای اولین بار توسط ارنست رادرفورد و همکارانش در دانشگاه منچستر انگلستان در سال ۱۹۱۱ انجام شد. آنها باریکه‌ای از ذرات آلفا را از یک برگهٔ نازک طلا عبور دادند و احتمال نسبی پراکندگی ذرات آلفا را در زاویه‌های گوناگون نسبت به راستای باریکهٔ اصلی معین کردند. البته، آنها نمی‌توانستند کنترل کنند که چگونه ذرات آلفا از میان هر اتم معین عبور کند؛ در واقع، به‌جای عبور مماسی نسبت به اتمها، اغلب ذرات آلفا از میان حجم اتم ترسیم‌شده در شکل ۲۶ـ۲۱، عبور می‌کردند و (بنابر مدل تامسون) باید در زاویه‌ای کمتر از زاویهٔ بیشینه‌ای که در بالا محاسبه کردیم انحراف پیدا می‌کردند.

نتایج آزمایش نشان داد که، گرچه تقریباً تمام ذرات آلفا تحت زاویه‌هایی کمتر از چندصدم درجه انحراف پیدا می‌کردند، تعداد بسیار کمی از ذرات (شاید ۱ ذره از ۱۰^۴ ذره) تحت زوایایی بیش از ۹۰° انحراف پیدا می‌کردند. این نتایج به‌طور کامل با مدل تامسون ناسازگار بود، و سبب شد که رادرفورد چنین اظهارنظر کند "این باورنکردنی‌ترین رویداد در تمام زندگی من بود. این رویداد همان‌قدر باورنکردنی بود که مثلاً یک گلولهٔ توپ ۱۵ـاینچی را به یک قطعه دستمال کاغذی شلیک کنید و گلوله بازگردد و به خود شما برخورد کند".

رادرفورد، با توجه به این‌گونه آزمایشهای پراکندگی، نتیجه گرفت که بار مثبت یک اتم در سرتاسر کره‌ای به اندازهٔ اتم پخش نشده، بلکه در ناحیهٔ بسیار کوچکی (هسته) در حوالی مرکز اتم متمرکز شده است.

برای اتم طلا، شعاع هسته در حدود $۷ \times ۱۰^{-۱۵}\mathrm{m}$ (یا ۷ fm) است که تقریباً $۱۰^{-۴}$ مرتبه کوچکتر از شعاع اتم است. یعنی، هسته فقط حدود $۱۰^{-۱۲}$ مرتبه از حجم اتم را اشغال می‌کند!

حال بیشینهٔ شدت میدان الکتریکی و نیروی مؤثر متناظر با آن را بر ذرهٔ آلفایی که از نزدیکی سطح هسته می‌گذرد محاسبه می‌کنیم. اگر هسته را یک گوی باردار با توزیع بار یکنواخت $Q = ۷۹e$ و شعاع $R = ۷\,\mathrm{fm}$ (هفت فرمی) در نظر بگیریم، بیشینهٔ شدت میدان الکتریکی برابر است با

$$E_{\mathrm{max}} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{Q}{R^۲}$$

$$= ۲{,}۳ \times ۱۰^{۲۱}\mathrm{N/C}$$

این مقدار بیش از هشت مرتبهٔ بزرگی از میدان الکتریکی وارد بر یک ذره در سطح اتم مدل کیک کشمشی بزرگتر است. نیروی متناظر با این میدان عبارت است از

$$F = qE_{\mathrm{max}} = ۷۴۰\,\mathrm{N}$$

این یک نیروی بسیار بزرگ است! دوباره همان ساده‌سازیهای محاسبات قبلی را در این مورد به‌کار می‌بندیم و فرض می‌کنیم که این نیرو ثابت است و تنها در مدتی که ذره مسافتی برابر با قطر هسته را می‌پیماید، یعنی Δt، اثر می‌کند:

$$\Delta t = \frac{۲R}{v} = ۸{,}۲ \times ۱۰^{-۲۲}\mathrm{s}$$

تغییر سرعت متناظر برای ذره را می‌توان به‌صورت زیر برآورد کرد،

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = ۹ \times ۱۰^{۷}\mathrm{m/s}$$

این مقدار با سرعت اولیهٔ ذره قابل مقایسه است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که یک اتم هسته‌ای می‌تواند یک میدان الکتریکی به اندازهٔ کافی شدید برای وارونه کردن جهت حرکت پرتابه ایجاد کند.

رادرفورد، براساس مدل هسته‌ای اتم، توانست فرمول دقیقی برای تعداد ذرات پراکنده‌شده در هر زاویهٔ معین را به‌دست آورد، و آزمایشهای پراکندگی، سازگاری کاملی را با این فرمول نشان دادند. همچنین او توانست از این فرمول برای تعیین عدد اتمی Z اتمهای هدف استفاده کند. علاوه‌بر آن، با استفاده از این روش و بهره‌گیری از ذراتی با انرژیهای خیلی زیادتر که واقعاً به داخل هسته نفوذ می‌کنند (مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۷ را ببینید) می‌توان شعاع هسته را نیز معین کرد.

این رشته آزمایشهای کلاسیک و پر دردسر و تفسیر استادانهٔ آنها پایه‌های فیزیک اتمی و هسته‌ای جدید را تشکیل دادند، و معمولاً افتخار بنیانگذاری این رشته‌ها به رادرفورد نسبت داده می‌شود.

چندگزینه‌ای

۲۶ـ۱ میدان چیست؟

۲۶ـ۲ میدان الکتریکی

۱. میدان الکتریکی در معادلهٔ (۲۶ـ۳) برحسب $q_۰$، یک بار مثبت کوچک، تعریف شده است. اگر، در عوض تعریف را برحسب یک بار منفی کوچک با همان بزرگی ارائه می‌دادیم، در آن صورت این میدان الکتریکی با تعریف جدید با میدان اصلی چگونه مقایسه می‌شد؟

(الف) این میدان در همان جهت قرار می‌گرفت، و همان بزرگی را داشت.

(ب) این میدان در جهت مخالف قرار می‌گرفت، ولی همان بزرگی را داشت.

(ج) این میدان همان جهت را داشت، ولی بزرگیش متفاوت بود.

(د) این میدان در جهت مخالف قرار می‌گرفت، و بزرگی متفاوتی داشت.

۲۶ـ۳ میدان الکتریکی بارهای نقطه‌ای

۲. بار نقطه‌ای $+q$ در مبدأ مختصات قرار گرفته، و یک بار نقطه‌ای $+۲q$ در مکان $x = a$ مستقر شده است، که در اینجا a یک عدد مثبت است.

(۱) کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) در خارج از محور x، و نزدیک به بارهای نقطه‌ای ممکن است میدان الکتریکی صفر شود.

(ب) در خارج از محور x، و نزدیک به بارهای نقطه‌ای ممکن است مقدار میدان الکتریکی یک بیشینه باشد.

(ج) ممکن است میدان الکتریکی در نقطه‌ای بین دو بار صفر شود.

(د) ممکن است میدان الکتریکی در نقاطی در فاصلهٔ محدود روی محور x و نه بین دو بار صفر شود.

(۲) در کدام‌یک از نواحی زیر ممکن است نقطه‌ای وجود داشته باشد که در آن مقدار میدان الکتریکی برابر با صفر شود؟

(الف) $-\infty < x < ۰$ (ب) $۰ < x < a$

(ج) $a < x < \infty$

(د) E در ناحیهٔ $-\infty < x < \infty$ صفر نمی‌شود.

۳. بار مثبت $+q$ در مبدأ قرارگرفته، و یک بار نقطه‌ای $-2q$ در مکان $x = a$ مستقر شده است، که در اینجا a یک عدد مثبت است.

(۱) کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) در خارج از محور x، و نزدیک به بارهای نقطه‌ای ممکن است میدان الکتریکی صفر شود.

(ب) در خارج از محور x، و نزدیک به بارهای نقطه‌ای ممکن است مقدار میدان الکتریکی بیشینه باشد.

(ج) ممکن است میدان الکتریکی در نقطه‌ای بین دو بار صفر شود.

(د) ممکن است میدان الکتریکی در نقاطی در فاصلهٔ محدود روی محور x و نه بین دو بار صفر شود.

(۲) در کدام‌یک از نواحی زیر ممکن است نقطه‌ای وجود داشته باشد که در آن مقدار میدان الکتریکی برابر با صفر شود؟

(الف) $-\infty < x < 0$ (ب) $0 < x < a$

(ج) $a < x < \infty$

(د) E در ناحیهٔ $-\infty < x < \infty$ صفر نمی‌شود.

۲۶ـ۴ میدان الکتریکی توزیع پیوسته بار

۴. بزرگی میدان الکتریکی $E(z)$، یک حلقه بار یکنواخت را روی محور آن در نظر بگیرید.

(۱) درکجا $E(z)$ بیشترین مقدارش را خواهد داشت؟

(الف) $z = 0$ (ب) $0 < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) صحیح‌اند.

(۲) درکدام موقعیت ممکن است $E(z)$ برابر با صفر شود؟

(الف) $z = 0$ (ب) $0 < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) صحیح‌اند.

۵. بزرگی میدان الکتریکی $E(z)$، یک قرص باردار یکنواخت را روی محور آن در نظر بگیرید.

(۱) درکجا $E(z)$ بیشترین مقدارش را خواهد داشت؟

(الف) $z = 0$ (ب) $0 < |z| < \infty$ (ج) $|z| = 0$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) صحیح‌اند.

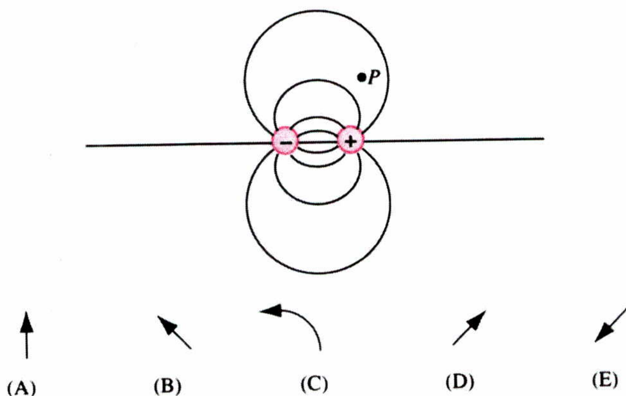
(۲) درکجا ممکن است $E(z)$ برابر با صفر شود؟

(الف) $z = 0$ (ب) $0 < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) صحیح‌اند.

۲۶ـ۵ خطوط میدان الکتریکی

۶. درشکل ۲۶ـ۲۲ خطوط میدان الکتریکی را دراطراف یک دوقطبی الکتریکی نشان داده‌ایم. کدام‌یک از پیکانهای نشان داده‌شده در شکل، میدان الکتریکی در نقطهٔ P را به بهترین وجه نمایش می‌دهد؟



شکل ۲۶ـ۲۲ پرسش چندگزینه‌ای ۶.

۷. در شکل ۲۶ـ۲۳ خطوط میدان الکتریکی را در اطراف سه بار نقطه‌ای A، B، و C نشان داده‌ایم.

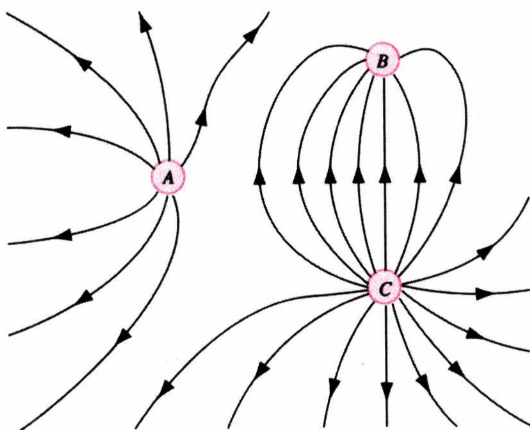
(۱) کدام‌یک از این بارها مثبت‌اند؟

(۲) کدام بار دارای بیشترین مقدار است؟

(۳) درکدام ناحیه یا کدام‌یک از نواحی این شکل، ممکن است میدان الکتریکی صفر شود؟

(الف) نزدیک A (ب) نزدیک B (ج) نزدیک C

(د) هیچ جا

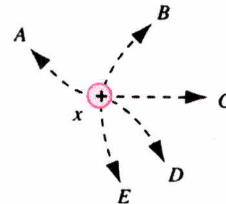


شکل ۲۶ـ۲۳ پرسش چندگزینه‌ای ۷.

۲۶ـ۶ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

۸. سه کرهٔ کوچک x، y و z حامل بارهای مساوی‌اند که علامت این بارها در شکل ۲۶ـ۲۴ نشان داده شده است. این سه بار در سه رأس یک مثلث متساوی‌الساقین قرارگرفته‌اند، که در آن فاصلهٔ بین x و z

است. کُره‌های y و z در جای خود ثابت شده‌اند ولی کُرهٔ x می‌تواند روی یک سطح بدون اصطکاک حرکت کند.
(الف) جهت نیروی الکتریکی وارد بر کرهٔ x در مکان نشان داده‌شده در شکل کدام است؟
(ب) وقتی که کُرهٔ x رها شود در کدام مسیر حرکت می‌کند؟





شکل ۲۶ـ۲۴ پرسش چندگزینه‌ای ۸.

۹. الکترونی در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار گرفته است. این میدان بین دو صفحهٔ موازی که حامل بارهای مثبت و منفی مساوی هستند ایجاد شده است. در چه مکانی الکترون تحت تأثیر بیشترین نیروی الکتروستاتیکی قرار دارد؟
(الف) وقتی الکترون به صفحهٔ مثبت نزدیکتر است.
(ب) وقتی الکترون به صفحهٔ منفی نزدیکتر است.
(ج) وقتی الکترون درست وسط دو صفحه قرار دارد.
(د) الکترون بدون توجه به مکان آن در بین صفحات همواره تحت تأثیر نیروی یکنواختی قرار دارد.

۱۰. اندازه‌گیریهای زیر روی یک مجموعه از قطره‌های کوچک باردارشده (برحسب یکای $10^{-19}C$) انجام شده است. بزرگترین یکای بنیادی ممکن برای بار که می‌توان از این داده‌ها استنتاج کرد کدام است؟

۲۸٫۸	۱۹٫۲	۴۸
۲۴	۳۸٫۴	۹٫۶

(الف) $1{,}6 \times 10^{-19}C$ (ب) $4{,}8 \times 10^{-19}C$
(ج) $9{,}6 \times 10^{-19}C$ (د) $48 \times 10^{-19}C$

۲۶ـ۷ دوقطبی در میدان الکتریکی

۱۱. در یک ناحیهٔ معین از فضا میدان الکتریکی از شرایط زیر پیروی می‌کند $E_y \neq 0$، $E_x = E_z = 0$ و $\partial\vec{E}/\partial x \neq 0$، $\partial\vec{E}/\partial y = \partial\vec{E}/\partial z = 0$.

(۱) نیروی خالص وارد بر یک دوقطبی الکتریکی که در این میدان به موازات محور x قرار گرفته
(الف) در امتداد محور x است.
(ب) در امتداد محور y است.
(ج) در امتداد محور z است.
(د) در هیچ‌کدام از راستاهای بالا نیست.

(۲) گشتاور نیروی خالص وارد بر یک دوقطبی الکتریکی که در این میدان به موازات محور x قرار گرفته
(الف) در امتداد محور x است.
(ب) در امتداد محور y است.
(ج) در امتداد محور z است.
(د) در هیچ‌کدام از راستاهای بالا نیست.

۲۶ـ۸ مدل هسته‌ای اتم

پرسشها

۱. میدانهای نرده‌ای و برداری را که می‌شناسید نام ببرید.

۲. (الف) در ربایش گرانشی بین زمین و یک قطعه سنگ، آیا می‌توانیم بگوییم که زمین در میدان گرانشی سنگ قرار دارد؟ (ب) میدان گرانشی سنگ با میدان گرانشی زمین چه ارتباطی دارد؟

۳. یک گوی دارای بار مثبت از یک رشته نخ ابریشمی بلند آویخته شده است. می‌خواهیم میدان الکتریکی E را در نقطه‌ای از صفحهٔ افقی که گوی باردار در آن قرار دارد اندازه‌گیری کنیم. برای انجام این کار، یک بار آزمون مثبت q_0 را در آن نقطه قرار می‌دهیم و نسبت F/q_0 را اندازه می‌گیریم. آیا F/q_0 کمتر، مساوی با، یا بزرگتر از E در نقطهٔ مورد نظر است؟

۴. در بررسیهای مربوط به میدانهای الکتریکی با بار آزمون، اغلب برای راحتی، فرض می‌کنیم که بار آزمون مثبت باشد. آیا این فرض واقعاً در تعیین میدان تأثیر دارد؟ این مورد را در مثال ساده‌ای که خود طرح می‌کنید نشان دهید.

۵. خطوط میدان الکتریکی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. چرا؟

۶. در شکل ۲۶ـ۱۳، چرا اگر خطوط میدان در اطراف لبه‌های شکل را به‌طرف عقب ادامه دهیم به نظر می‌رسد که به‌طور یکنواخت از مرکز شکل تابش یافته‌اند؟

۷. یک بار نقطه‌ای در یک میدان الکتریکی عمود بر خطوط میدان حرکت می‌کند. آیا هیچ نیرویی بر آن وارد می‌شود؟

۸. در شکل ۲۶ـ۱۴، چرا باید تخمهای چمن با خطوط میدان الکتریکی هم‌راستا شوند؟ تخم چمن معمولاً حامل بار الکتریکی نیست.[1]

۹. منشأ "چسبیدن استاتیکی"، پدیده‌ای که گاهی به هنگام بیرون‌آوردن لباسها از ماشین خشک‌کن بر آنها اثر می‌کند، چیست؟

۱۰. دو بار نقطه‌ای با اندازه و علامت مجهول در فاصلهٔ d از هم قرار دارند. میدان الکتریکی در یک نقطه، روی خط واصل دو بار صفر است. از این موضوع چه نتیجه‌ای در مورد این بارها می‌گیرید؟

۱۱. دو بار نقطه‌ای با بزرگی و علامت مجهول را در فاصلهٔ d از یکدیگر قرار می‌دهیم. (الف) شرط لازم برای اینکه در یک نقطه روی امتداد خط واصل دو بار که میان آنها نیست، $E = 0$ چیست و این نقطه کجا قرار دارد؟ (ب) آیا برای هیچ ترتیبی از دو بار نقطه‌ای می‌توان دو نقطه پیدا کرد (که هیچ‌کدام در بینهایت نباشند) و برای آنها $E = 0$؟ اگر چنین چیزی ممکن است، شرایط لازم کدام‌اند؟

۱۲. دو بار نقطه‌ای با بزرگی و علامت مجهول در فاصلهٔ d از یکدیگر قرارگرفته‌اند. آیا امکان دارد که برای نقاط خارج از محور داشته باشیم $E = 0$ (به‌جز در بینهایت)؟ در این‌باره توضیح دهید.

۱۳. در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۳، باری که در نقطهٔ P شکل ۲۶ـ۴ قرار بگیرد در حال تعادل است زیرا هیچ نیرویی بر آن وارد نمی‌شود. آیا این تعادل برای جابه‌جایی (الف) در امتداد خط واصل دو بار و (ب) در امتداد خط عمود بر خط واصل، تعادل پایدار است؟

۱۴. در شکل ۲۶ـ۱۲ نیروی وارد بر بار پایینی به‌طرف بالا و مقدار آن معین و محدود است. اما، تراکم خطوط میدان، حاکی از آن است که میدان E در محل این بار (نقطه‌ای) بینهایت بزرگ است. به باری که در یک میدان بینهایت بزرگ غوطه‌ور است باید نیروی بسیار بزرگی وارد شود. چارهٔ گریز از این گرفتاری چیست؟

۱۵. بار نقطه‌ای q به جرم m را از حالت سکون در یک میدان نایکنواخت رها می‌کنیم. (الف) آیا این ذره الزاماً در امتداد خط میدان الکتریکی حرکت می‌کند که از نقطهٔ رها شدن آن می‌گذرد؟ (ب) در چه شرایطی، در صورت وجود، ذرهٔ باردار، خطوط میدان الکتریکی را دنبال می‌کند؟

۱۶. دو بار مثبت و منفی با اندازهٔ مساوی روی یک خط مستقیم طویل قرار گرفته‌اند. جهت میدان $\vec{\mathbf{E}}$ برای نقاطی که روی این خط قرار گرفته‌اند در حالتهای (الف) بین دو بار (ب) خارج دو بار و در طرف بار مثبت و (ج) خارج دو بار و در طرف بار منفی کدام است؟

(د) برای نقاط خارج از این خط ولی روی صفحهٔ عمودمنصف خط واصل دو بار جهت میدان $\vec{\mathbf{E}}$ کدام است؟

۱۷. در صفحهٔ عمود منصف یک دو قطبی الکتریکی، میدان الکتریکی با گشتاور دوقطبی الکتریکی $\vec{\mathbf{p}}$ موازی است یا پادموازی؟

۱۸. چگونه معادلهٔ (۲۶ـ۱۲) در صورت حذف شرط $x \gg d$ از نمایش خطوط میدان شکل ۲۶ـ۱۲ باز می‌ماند؟

۱۹. (الف) دو دوقطبی الکتریکی دقیقاً یکسان را، مطابق شکل ۲۶ـ۲۵(الف)، روی یک خط راست قرار داده‌ایم، جهت نیروی الکتریکی وارد بر هر یک از دوقطبیها به علت حضور دوقطبی دیگر کدام است؟ (ب) فرض کنید که دوقطبیها مطابق شکل ۲۶ـ۲۵(ب) بازآرایی شوند. اکنون جهت نیرو کدام است؟





شکل ۲۶ـ۲۵ پرسش ۱۹.

۲۰. تغییرات E برحسب r را برای (الف) یک بار نقطه‌ای، (ب) یک دوقطبی، و (ج) یک چهارقطبی مقایسه کنید.

۲۱. اگر می‌خواستید میدان الکتریکی یک حلقهٔ (یا قرص) باردار نقاطی که روی محور آن قرار نداشتند محاسبه کنید از لحاظ ریاضی با چه مشکلاتی مواجه می‌شدید؟

۲۲. معادلهٔ (۲۶ـ۲۰) نشان می‌دهد که E_z در همهٔ نقاط مقابل یک صفحهٔ باردار به ابعاد بینهایت یکسان است. آیا این موضوع منطقی است؟ ممکن است تصور کنید که میدان در نزدیکی صفحهٔ باردار باید قویتر باشد زیرا این نقاط به بارها نزدیکترند.

۲۳. هدف از انجام آزمایش میلیکان را، با کلمات خود بیان کنید.

۲۴. چگونه علامت بار الکتریکی قطرهٔ روغن در طرز کار آزمایش میلیکان تأثیر می‌گذارد؟

۲۵. چرا میلیکان نکوشید در دستگاه خود به‌جای قطره‌های روغن الکترونها را متوازن کند؟

۲۶. یک دوقطبی الکتریکی را در یک میدان الکتریکی یکنواخت سروته می‌کنید. کاری که انجام می‌دهید با سمتگیری اولیهٔ دوقطبی نسبت به میدان چه ارتباطی دارد؟

۲۷. برای کدام سمتگیری یک دوقطبی الکتریکی در یک میدان الکتریکی یکنواخت انرژی پتانسیل دوقطبی (الف) بیشترین و (ب) کمترین مقدار را دارد؟

---

1. "Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying-Conductors," by O. Jefimenko, *American Journal of physics*, January 1962, p. 19.

۲۸. یک دوقطبی الکتریکی را در یک میدان الکتریکی نایکنواخت قرار داده‌ایم. آیا هیچ نیروی خالصی بر آن وارد می‌شود؟

۲۹. یک دوقطبی الکتریکی در یک میدان الکتریکی خارجی یکنواخت، مطابق شکل ۲۶ـ۱۹(الف)، در حالت سکون قرار دارد. سپس این دوقطبی رها می‌شود. حرکت آن را مورد بحث‌وبررسی قرار دهید.

۳۰. گشتاور دوقطبی $\vec{\mathbf{p}}$ یک دوقطبی الکتریکی با یک میدان الکتریکی خارجی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ هم‌جهت است. (الف) آیا این حالت یک تعادل پایدار است؟ (ب) در مورد سرشت تعادل وقتی که $\vec{\mathbf{p}}$ و $\vec{\mathbf{E}}$ در خلاف جهت یکدیگر قرار دارند بحث کنید.

۳۱. اتم معمولاً از نظر الکتریکی خنثی است. در این صورت چرا باید ذرهٔ آلفا تحت هر شرایطی توسط اتم منحرف شود؟

تمرینها

۲۶ـ۱ میدان چیست؟

۲۶ـ۲ میدان الکتریکی

۱. یک میدان الکتریکی به الکترونی شتاب $۱٫۸۴ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{m/s^۲}$ به‌طرف شرق می‌دهد. اندازه و جهت میدان الکتریکی را معین کنید.

۲. هوای مرطوب در یک میدان الکتریکی $۳٫۰ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{N/C}$ دچار فروریزش می‌شود (مولکولهای آن یونیده می‌شوند). بزرگی نیروی الکتریکی وارد بر (الف) یک الکترون و (ب) یک یون (که تنها یک الکترون از دست داده است) در این میدان چقدر است؟

۳. ذرهٔ آلفا، هستهٔ اتم هلیم، دارای جرم $۶٫۶۴ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$ و بار الکتریکی $+۲e$ است. بزرگی و جهت میدان الکتریکی که وزن آن را متوازن می‌کند چقدر است؟

۴. در یک میدان الکتریکی یکنواخت در حوالی سطح زمین، به‌ذره‌ای که دارای بار $-۲٫۰ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{C}$ است نیروی الکتریکی پایین‌سویی به اندازهٔ $۳٫۰ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{N}$ وارد می‌آید. (الف) اندازهٔ میدان الکتریکی را معین کنید. (ب) بزرگی و جهت نیروی الکتریکی وارد بر یک پروتون که در این میدان قرار گرفته است کدام است؟ (ج) نیروی گرانشی وارد بر پروتون چقدر است؟ (د) در این مورد نسبت نیروی الکتریکی به نیروی گرانشی چقدر است؟

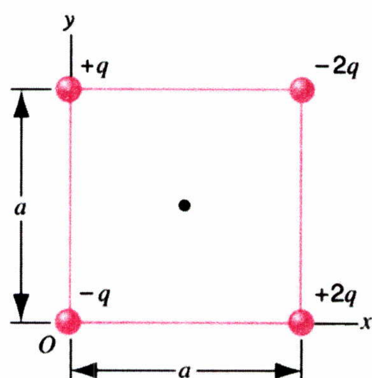
۲۶ـ۳ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای

۵. بزرگی یک بار نقطه‌ای که در فاصلهٔ $۷۵٫۰\,\mathrm{cm}$ از خود یک میدان الکتریکی با شدت $۲٫۳۰\,\mathrm{N/C}$ ایجاد می‌کند، چقدر است؟

۶. گشتاور دوقطبی حاصل از یک الکترون و یک پروتون را که در فاصلهٔ $۴٫۳۰\,\mathrm{nm}$ از هم قرار گرفته‌اند محاسبه کنید.

۷. بزرگی میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی را که گشتاور دوقطبی آن $۳٫۵۶ \times ۱۰^{-۲۹}\mathrm{C\cdot m}$ است در نقطه‌ای به فاصلهٔ $۲۵٫۴\,\mathrm{nm}$ در امتداد عمودمنصف آن محاسبه کنید.

۸. میدان الکتریکی را در مرکز مربع شکل ۲۶ـ۲۶ معین کنید. فرض کنید که $q = ۱۱٫۸\,\mathrm{nC}$ و $a = ۵٫۲۰\,\mathrm{cm}$ است.



شکل ۲۶ـ۲۶ تمرین ۸.

۹. در صفحهٔ یک ساعت بارهای منفی $-q$، $-۲q$، $-۳q$، ...، $-۱۲q$ در محل ارقام متناظر قرار گرفته‌اند. عقربه‌های ساعت میدان را مختل نمی‌کنند. در چه زمانی عقربهٔ ساعت‌شمار در جهت میدان الکتریکی در مرکز صفحهٔ ساعت قرار می‌گیرد؟ (راهنمایی: بارهایی را که در دو سر یک قطر قرار دارند با هم در نظر بگیرید.)

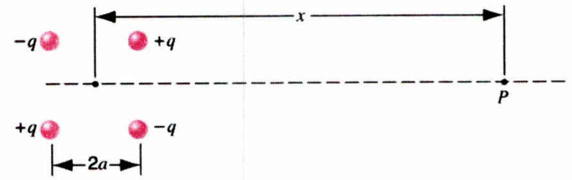
۱۰. در شکل ۲۶ـ۵ فرض کنید که هر دو بار مثبت‌اند. نشان دهید که بزرگی میدان E در نقطهٔ P آن شکل، با فرض $x \gg d$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{۲q}{x^۲}$$

۱۱. نوعی چهارقطبی الکتریکی تشکیل شده است از چهار بار که در چهار رأس مربعی به ضلع $۲a$ قرار گرفته‌اند. نقطهٔ P در فاصلهٔ x از مرکز چهارقطبی روی خطی موازی با دو ضلع مربع، مطابق شکل ۲۶ـ۲۷، واقع شده است. نشان دهید که برای $x \gg a$، میدان الکتریکی در نقطهٔ P به‌طور تقریبی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E = \frac{۳(۲qa^۲)}{۲\pi\epsilon_۰ x^۴}$$

(راهنمایی: چهارقطبی را به‌صورت دو دوقطبی در نظر بگیرید.)



شکل ۲۶ـ۲۷ تمرین ۱۱.

۲۶ـ۴ میدان الکتریکی توزیع پیوسته بار

۱۲. نشان دهید که معادلهٔ (۲۶ـ۱۹)، برای میدان الکتریکی یک قرص باردار برای نقاط روی محور آن، به‌ازای $z \gg R$ به میدان مربوط به یک بار نقطه‌ای تبدیل می‌شود.

۱۳. در چه فاصله‌ای روی محور یک قرص باردار به شعاع R شدت میدان الکتریکی برابر با نصف مقدار میدان در مرکز قرص و روی سطح آن است؟

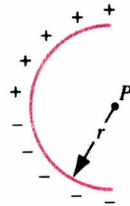
۱۴. در چه فاصله‌ای روی محور یک حلقهٔ باردار به شعاع R شدت میدان الکتریکی محوری بیشینه است؟

۱۵. (الف) مقدار کل بار q یک قرص باردار به شعاع ۲٫۵۰ cm باید چقدر باشد تا میدان الکتریکی آن روی سطح و در مرکز قرص برابر با مقداری شود که در آن، هوا از لحاظ الکتریکی فرو می‌ریزد و جرقه ایجاد می‌کند؟ جدول ۲۶ـ۱ را ببینید. (ب) فرض کنید که هر اتم در سطح قرص دارای سطح مقطع مؤثر ۰٫۰۱۵ nm^2 باشد. در سطح قرص چند اتم وجود دارد؟ (ج) بار محاسبه‌شده در قسمت (الف) ناشی از آن است که اتمهای سطح قرص یک الکترون اضافی دارند. چه کسری از اتمهای سطحی باید این‌گونه باردار شده باشند؟

z(cm)	E(10^7N/C)
۰	۲٫۰۴۳
۱	۱٫۷۳۲
۲	۱٫۴۴۲
۳	۱٫۱۸۷
۴	۰٫۹۷۲
۵	۰٫۷۹۷

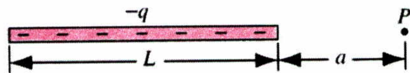
۱۶. یک میلهٔ شیشه‌ای نازک به شکل نیمدایره‌ای به شعاع r خم شده است. بار $+q$ به‌طور یکنواخت روی نیمهٔ بالایی و بار $-q$ به‌طور یکنواخت روی نیمهٔ پایینی این نیمدایره توزیع شده است (شکل ۲۶ـ۲۸). میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ را در مرکز نیمدایره، نقطهٔ P، معین کنید.

۱۷. مقادیر اندازه‌گیری‌شده برای میدان الکتریکی E در فاصلهٔ z روی محور یک قرص پلاستیکی باردار به قرار زیر است:
(الف) شعاع قرص و (ب) بار روی آن را محاسبه کنید.



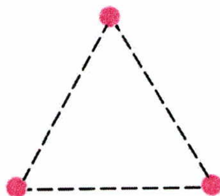
شکل ۲۶ـ۲۸ تمرین ۱۶.

۱۸. یک میلهٔ عایق به طول L دارای بار الکتریکی $-q$ است که مطابق شکل ۲۶ـ۲۹ به‌طور یکنواخت در تمام طول آن توزیع شده است. (الف) چگالی خطی بار میله چقدر است؟ (ب) میدان الکتریکی را در نقطهٔ P، که به فاصلهٔ a از انتهای میله قرار دارد، به‌دست آورید. (ج) اگر P در مقایسه با طول L از میله بسیار دور باشد، میله مانند یک بار نقطه‌ای به نظر می‌رسد. نشان دهید که به‌ازای $L \gg a$، جواب قسمت (ب) به میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای تبدیل می‌شود.



شکل ۲۶ـ۲۹ تمرین ۱۸.

۱۹. خطوط میدان وابسته به سه خط طویل موازی بار را به‌صورت کیفی در صفحهٔ عمود بر آنها را رسم کنید. فرض کنید که محل تلاقی خطوط بار با این صفحه یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهد (شکل ۲۶ـ۳۰) و چگالی خطی بار λ برای هر کدام از سه خط بار یکسان است.

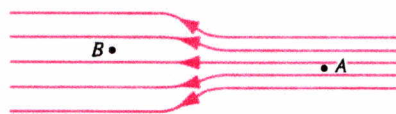


شکل ۲۶ـ۳۰ تمرین ۱۹.

۲۶ـ۵ خطوط میدان الکتریکی

۲۰. شکل ۲۶ـ۳۱ خطوط میدان یک میدان الکتریکی را نشان می‌دهد؛ فاصلهٔ بین خطوط در صفحهٔ عمود بر صفحهٔ کاغذ همه جا

یکسان است. (الف) اگر شدت میدان در نقطهٔ A برابر با $۴۰\ N/C$ باشد، نیروی وارد بر یک الکترون در آن نقطه چقدر است؟ (ب) شدت میدان در نقطهٔ B چقدر است؟

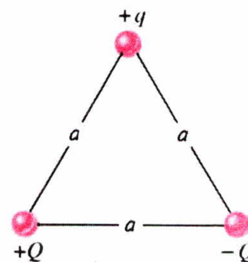


شکل ۲۶ـ۳۱ تمرین ۲۰.

۲۱. خطوط میدان مربوط به یک قرص دایره‌ای نازک به شعاع R را که به‌طور یکنواخت باردار شده است به‌طور کیفی رسم کنید. (راهنمایی: حالتهای حدی برای نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که به قرص بسیار نزدیک و در آنجا میدان الکتریکی عمود بر سطح است و نقاطی که از قرص بسیار دور هستند و میدان الکتریکی مانند میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه‌ای است.)

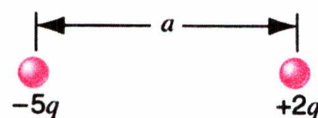
۲۲. به‌طور کیفی خطوط میدان مربوط به دو بار نقطه‌ای جدا از هم $+q$ و $-۲q$ را رسم کنید.

۲۳. سه بار مطابق شکل ۲۶ـ۳۲ در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی قرار گرفته‌اند. خطوط میدان ناشی از بارهای $+Q$ و $-Q$ را در نظر بگیرید و از آنجا جهت نیروی وارد بر بار $+q$ را به واسطهٔ حضور دو بار دیگر معین کنید. (راهنمایی: نگاه کنید به شکل ۲۶ـ۱۲.)



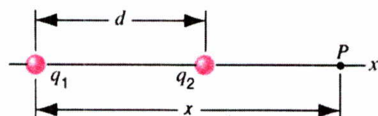
شکل ۲۶ـ۳۲ تمرین ۲۳.

۲۴. (الف) در شکل ۲۶ـ۳۳، نقطه (یا نقاطی) را مشخص کنید که در آنجا میدان الکتریکی صفر است. (ب) خطوط میدان را به‌طور کیفی ترسیم کنید.



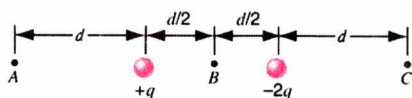
شکل ۲۶ـ۳۳ تمرین ۲۴.

۲۵. دو بار نقطه‌ای روی محور x در فاصلهٔ ثابت d از یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۲۶ـ۳۴). با فرض اینکه بار سمت چپ در $x = ۰$ قرار گرفته باشد، میدان $E_x(x)$ را رسم کنید. مقادیر مثبت و منفی x را در این محاسبات در نظر بگیرید. اگر جهت $\vec{E}$ به سمت راست بود E_x را مثبت و اگر جهت $\vec{E}$ به سمت چپ بود آن را منفی ترسیم کنید. فرض کنید که $q_۱ = +۱٫۰ \times ۱۰^{-۶}C$، $q_۲ = +۳٫۰ \times ۱۰^{-۶}C$ و $d = ۱۰\,cm$ باشد.



شکل ۲۶ـ۳۴ تمرین ۲۵.

۲۶. بارهای $+q$ و $-۲q$، مطابق شکل ۲۶ـ۳۵، در فاصلهٔ ثابت d از یکدیگر قرارگرفته‌اند. (الف) میدان $\vec{E}$ را در نقاط A، B، و C مشخص کنید. (ب) خطوط میدان الکتریکی را به‌طور تقریبی رسم کنید.



شکل ۲۶ـ۳۵ تمرین ۲۶.

۲۶ـ۶ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

۲۷. الکترونی با سرعت $۴٫۸۶ \times ۱۰^{۶} m/s$ به موازات یک میدان الکتریکی به شدت $۱۰۳۰\ N/C$ که برای کندکردن حرکت آن تنظیم شده است شلیک می‌شود. (الف) الکترون قبل از اینکه (به‌طور لحظه‌ای) متوقف شود چه مسافتی را طی می‌کند و (ب) این حرکت چقدر طول می‌کشد؟ (ج) اگر میدان الکتریکی پس از مسافت $۷٫۸۸\ mm$ ناگهان قطع شود، الکترون در پیمودن این مسافت چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ خودش را از دست می‌دهد؟

۲۸. یک سلاح تدافعی به‌عنوان ضدموشک می‌تواند از باریکه‌ای از ذرات استفاده کند. مثلاً، برخورد باریکهٔ پروتون به یک موشک دشمن می‌تواند آن را بی‌خطر کند. این باریکه‌ها را می‌توان در "تفنگهایی" تولید کرد که با بهره‌گیری از میدانهای الکتریکی، ذرات باردار را شتاب می‌دهند. (الف) اگر میدان الکتریکی برابر $۲٫۱۶ \times ۱۰^{۴}\ N/C$ باشد پروتون چه شتابی پیدا می‌کند؟ (ب) اگر میدان در فاصلهٔ $۱٫۲۲\ cm$ روی پروتون اثر کند پروتون به چه سرعتی می‌رسد؟

۲۹. دو بار مساوی و با علامتهای مخالف با اندازهٔ $۱٫۸۸ \times ۱۰^{-۷}C$ در فاصلهٔ $۱۵٫۲\ cm$ از هم قرارگرفته‌اند. (الف) مقدار و جهت میدان

$\vec{\mathbf{E}}$ در نقطهٔ وسط دو بار چقدر است؟ (ب) به الکترونی که در آنجا قرارگرفته چه نیرویی (اندازه و جهت) وارد می‌شود؟

۳۰. میدان الکتریکی یکنواختی در ناحیهٔ بین دو صفحهٔ باردار با علامت مخالف وجود دارد. الکترونی که از حالت سکون از سطح صفحهٔ باردار منفی رها می‌شود، پس از طی مسافت ۱٫۹۵ cm و پس از زمان ۱۴٫۷ ns به صفحهٔ مقابل برخورد می‌کند. (الف) سرعت الکترون در زمان برخورد با صفحهٔ دوم چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است؟

۳۱. در آزمایش میلیکان، قطره‌ای به شعاع ۱٫۶۴μm و چگالی ۰٫۸۵۱ g/cm^3، با اعمال میدانی به‌شدت ۱٫۹۲ × ۱۰^{5}N/C به حال تعادل در می‌آید. بار قطره را برحسب e به‌دست آورید.

۳۲. دو بار نقطه‌ای به مقدار $q_1 =$ ۲٫۱۶μC و $q_2 =$ ۸۵٫۳ nC در فاصلهٔ ۱۱٫۷ cm از هم قرارگرفته‌اند. (الف) اندازهٔ میدان الکتریکی هر یک از این دو بار را در محل بار دیگر تعیین کنید. (ب) نیرویی را که به هرکدام از این دو بار وارد می‌شود محاسبه کنید.

۳۳. میلیکان در یکی از آزمایشهای اولیه (در سال ۱۹۱۱)، مشاهده کرد که، علاوه‌بر بارهای دیگر، بارهای اندازه‌گیری‌شدهٔ زیر در موارد مختلف روی یک تک‌قطره پدیدار می‌شوند:

۱۹٫۷۱ × ۱۰$^{-19}$C	۱۳٫۱۳ × ۱۰$^{-19}$C	۶٫۵۶۳ × ۱۰$^{-19}$C
۲۲٫۸۹ × ۱۰$^{-19}$C	۱۶٫۴۸ × ۱۰$^{-19}$C	۸٫۲۰۴ × ۱۰$^{-19}$C
۲۶٫۱۳ × ۱۰$^{-19}$C	۱۸٫۰۸ × ۱۰$^{-19}$C	۱۱٫۵۰ × ۱۰$^{-19}$C

از این داده‌ها چه مقداری برای کوانتوم بار الکتریکی e می‌توان استنتاج کرد؟

۳۴. میدان یکنواخت قائم $\vec{\mathbf{E}}$ در فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی بزرگ برقرار است. یک کرهٔ کوچک رسانا به جرم m از ریسمانی به طول L در این میدان آویخته شده است. دورهٔ تناوب این آونگ را وقتی که به کره، بار $q+$ داده شده است و صفحهٔ پایینی حامل بار (الف) مثبت و (ب) منفی است تعیین کنید.

۳۵. در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶ـ۶، انحراف کل قطرهٔ جوهر را هنگام برخورد با کاغذ که در فاصلهٔ ۶٫۸ mm از انتهای صفحات منحرف‌کننده قرار دارد معین کنید؛ نگاه کنید به شکل ۲۶ـ۱۶.

۲۶ـ۷ دوقطبی در میدان الکتریکی

۳۶. یک دوقطبی الکتریکی، متشکل از بارهایی به‌اندازهٔ ۱٫۴۸ nC و به فاصلهٔ ۶٫۲۳μm از هم، در یک میدان الکتریکی به‌شدت ۱۱۰۰ N/C قرار دارد. (الف) اندازهٔ گشتاور دوقطبی الکتریکی چقدر است؟ (ب) اختلاف انرژی پتانسیل مربوط به سمتگیریهای موازی و پادموازی دوقطبی با میدان چیست؟

۳۷. یک دوقطبی الکتریکی متشکل از بارهای $2e+$ و $2e-$ است که در فاصلهٔ ۰٫۷۸ nm از یکدیگر واقع‌اند. این دوقطبی در میدانی به‌شدت ۳٫۴ × ۱۰^{6}N/C قرار دارد. اندازهٔ گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی را وقتی که گشتارو دوقطبی (الف) موازی با، (ب) عمود بر و (ج) پادموازی با میدان الکتریکی است محاسبه کنید.

۳۸. بار $q =$ ۳٫۱۶μC در فاصلهٔ ۲۸٫۵ cm از یک دوقطبی کوچک روی عمودمنصف آن قرار دارد. نیروی وارد بر این بار الکتریکی ۵٫۲۲ × ۱۰$^{-16}$N است. روی یک نمودار (الف) جهت نیروی وارد بر بار و (ب) جهت نیروی وارد بر دوقطبی را نشان دهید. (ج) مقدار نیروی وارد بر دوقطبی و (د) گشتاور دوقطبی این دوقطبی را تعیین کنید.

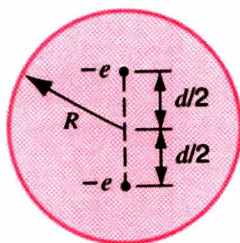
۲۶ـ۸ مدل هسته‌ای اتم

۳۹. ارنست رادرفورد در سال ۱۹۱۱ در مقاله‌ای، چنین گفت: به‌منظور دستیابی به تصویری از نیروهای لازم برای انحراف ذرات آلفا در زاویه‌های بزرگ، اتم را به‌صورت یک بار مثبت نقطه‌ای Ze در مرکز در نظر بگیرید که با یک توزیع یکنواخت بار منفی $Ze-$ در سرتاسر کره‌ای به شعاع R، احاطه شده است. میدان الکتریکی E در فاصلهٔ r از مرکز کره، برای نقاط داخلی اتم عبارت است از

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

درستی این معادله را تحقیق کنید.

۴۰. شکل ۲۶ـ۳۶ اتم هلیم ($Z = 2$) را براساس مدل اتمی تامسون نشان می‌دهد. دو الکترون ساکن، در یک توزیع بار کروی یکنواخت مثبت به مقدار $2e$ قرارگرفته‌اند. فاصلهٔ d بین دو الکترون را طوری تعیین کنید که این پیکربندی در حالت تعادل ایستایی باشد.



شکل ۲۶ـ۳۶ تمرین ۴۰.

مسئله‌ها

۱. در شکل ۲۶ـ۵، نقطه‌ای را به فاصلهٔ z از مرکز یک دوقطبی و در امتداد محور آن در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید، که برای مقادیر بزرگ z، میدان الکتریکی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

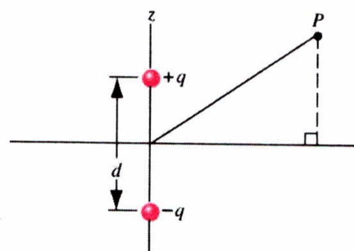
$$E = \frac{۱}{۲\pi\epsilon_۰}\frac{p}{z^۳}$$

(این مقدار را با میدان مربوط به یک نقطه روی صفحهٔ عمودمنصف مقایسه کنید.) (ب) جهت $\vec{\mathbf{E}}$ کدام است؟

۲. نشان دهید که مؤلفه‌های $\vec{\mathbf{E}}$ ناشی از یک دوقطبی، در نقاط دوردست، با رابطه‌های زیر مشخص می‌شود:

$$E_x = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{۳pxz}{(x^۲+z^۲)^{۵/۲}}\,,\quad E_z = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{p(۲z^۲-x^۲)}{(x^۲+z^۲)^{۵/۲}}$$

که در اینجا x و z مختصات نقطهٔ P در شکل ۲۶ـ۳۷ است. نشان دهید که این نتیجهٔ کلی شامل نتایج خاص معادلهٔ (۲۶ـ۱۲) و مسئلهٔ ۱ نیز می‌شود.



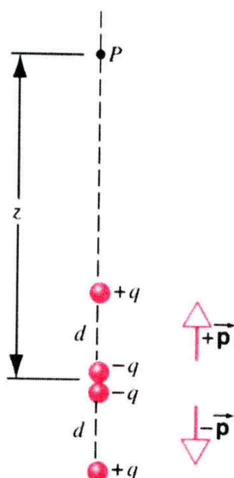
شکل ۲۶ـ۳۷ مسئلهٔ ۲.

۳. حلقهٔ باردار بخش ۲۶ـ۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید که بار q به‌صورت یکنواخت روی حلقه توزیع نشده باشد، بلکه بار $q_۱$ روی یک نصف محیط حلقه و بار $q_۲$ روی نصف دیگر محیط حلقه به‌صورت یکنواخت توزیع شده باشد. فرض کنید $q_۱ + q_۲ = q$. (الف) مؤلفهٔ میدان الکتریکی را در هر نقطه‌ای از محور حلقه و در امتداد محور به‌دست آورید و آن را با حالت توزیع یکنواخت مقایسه کنید. (ب) مؤلفهٔ میدان الکتریکی را در هر نقطه‌ای از محور حلقه و عمود بر محور معین کنید و آن را با حالت توزیع یکنواخت مقایسه کنید.

۴. شکل ۲۶ـ۳۸ نوعی چهارقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. این چهارقطبی متشکل از دو دوقطبی است که آثار آنها در نقاط خارجی کاملاً یکدیگر را خنثی نمی‌کنند. نشان دهید که مقدار E روی محور چهارقطبی برای نقاطی که در فاصلهٔ z از مرکز چهارقطبی قرارگرفته‌اند (با فرض $z \gg d$) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E = \frac{۳Q}{۴\pi\epsilon_۰ z^۴}$$

که در رابطهٔ بالا Q (مساوی با $۲qd^۲$) را گشتاور چهارقطبی توزیع بار می‌خوانیم.



شکل ۲۶ـ۳۸ مسئلهٔ ۴.

۵. توزیعی از بارهای نقطه‌ای را در امتداد محور x در نظر بگیرید به‌طوری که، در فاصله‌های بسیار دور از این بارها، میدان الکتریکی E به‌صورت $۱/r^۶$ کاهش پیدا کند.

۶. یک میلهٔ عایق "نیم‌نامتناهی" (شکل ۲۶ـ۳۹) حامل بار ثابت λ به‌ازای واحد طول است. نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطهٔ P با امتداد میله زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و این نتیجه مستقل از فاصلهٔ R است.



شکل ۲۶ـ۳۹ مسئلهٔ ۶.

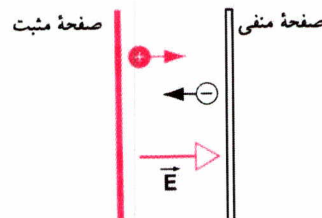
۷. یک میلهٔ باریک نارسانا به طول محدود L حامل چگالی بار خطی یکنواخت $+\lambda$ در نیمهٔ بالایی و چگالی بار خطی یکنواخت $-\lambda$ در نیمهٔ پایینی است؛ به شکل ۲۶ـ۶ توجه کنید. (الف) با استفاده از یک استدلال مبتنی بر تقارن، جهت میدان الکتریکی ناشی از میله را در نقطهٔ P معین کنید. (ب) میدان $\vec{\mathbf{E}}$ را در نقطهٔ P مشخص کنید. (ج) حد این عبارت را برای yهای بزرگ به‌دست آورید. وابستگی

این عبارت به y چگونه است؟ این عبارت چه چیزی را به یاد شما می‌آورد؟

۸. یک فنجان نارسانا به شکل نیم‌کره‌ای به شعاع R دارای بار کل q است که به‌طور یکنواخت روی سطح داخلی آن توزیع شده است. میدان الکتریکی را در مرکز انحنای آن معین کنید. (راهنمایی: فنجان را به‌صورت تعداد زیادی حلقه در نظر بگیرید.)

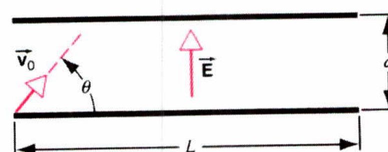
۹. فرض کنید که نمای موجود در فرمول قانون کولن ۲ نیست بلکه n است. نشان دهید که برای $n \neq ۲$ نمی‌توان خطوطی رسم کرد که خواص مندرج در بخش ۲۶ـ۵ برای خطوط میدان الکتریکی را داشته باشند. برای سادگی، مورد مربوط به بار نقطه‌ای منزوی را بررسی کنید.

۱۰. دو صفحهٔ مسی بزرگ موازی در فاصلهٔ $۵٫۰۰\ \text{cm}$ از هم قرار گرفته‌اند و همان‌طورکه شکل ۲۶ـ۴۰ نشان می‌دهد، بین آنها میدان الکتریکی یکنواختی وجود دارد. یک الکترون از صفحهٔ منفی و همزمان با آن یک پروتون از صفحهٔ مثبت رها می‌شوند. نیرویی را که ذرات برهم وارد می‌کنند نادیده بگیرید و فاصلهٔ آنها را از صفحهٔ مثبت هنگام عبور از کنار هم تعیین کنید. آیا اینکه برای حل این مسئله نیاز به دانستن میدان الکتریکی ندارید شما را متعجب نمی‌کند؟



شکل ۲۶ـ۴۰ مسئلهٔ ۱۰.

۱۱. الکترونی مطابق شکل ۲۶ـ۴۱ با سرعت $v_۰ = ۵٫۸۳ \times ۱۰^۶ \text{m/s}$ و با زاویهٔ $\theta = ۳۹^\circ$ به داخل میدان $E = ۱۸۷۰\ \text{N/C}$ (میدان بالاسو) پرتاب شده است. می‌دانیم که $d = ۱٫۹۷\ \text{cm}$ و $L = ۶٫۲۰\ \text{cm}$ است. آیا این الکترون به هیچ‌کدام از دو صفحه برخورد می‌کند؟ درصورت برخورد الکترون با صفحات، این برخورد با کدام صفحه و در چه فاصله‌ای از لبهٔ سمت چپ صورت می‌گیرد؟



شکل ۲۶ـ۴۱ مسئلهٔ ۱۱.

۱۲. الکترونی مقید به حرکت در امتداد محور حلقهٔ بار مورد بحث در بخش ۲۶ـ۴ است. نشان دهید که این الکترون می‌تواند با گذر از مرکز حلقه، نوسانهای کوچکی با بسامد زیر انجام دهد

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{۴\pi\epsilon_۰ mR^۳}}$$

۱۳. کار لازم برای سروته‌کردن یک دوقطبی الکتریکی در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ را برحسب گشتاور دوقطبی $\vec{\mathbf{p}}$ و زاویهٔ اولیهٔ $\theta_۰$ بین $\vec{\mathbf{p}}$ و $\vec{\mathbf{E}}$ تعیین کنید.

۱۴. بسامد نوسان یک دوقطبی الکتریکی، با گشتاور p و لختی دورانی I، را برای نوسانهای کم‌دامنه حول وضعیت تعادل در یک میدان الکتریکی یکنواخت E معین کنید.

۱۵. دو بار نقطه‌ای مثبت و مساوی $+q$ را در نظر بگیرید که در موقعیتهای $z = +a/۲$ و $z = -a/۲$ قرارگرفته‌اند. (الف) عبارتی را برای dE_z/dz در نقاط روی محور z به‌دست آورید، و این عبارت را در حالت حدی $z \ll a/۲$ محاسبه کنید. (ب) نشان دهید که نیروی وارد بر یک دوقطبی کوچک که در این مکان قرارگرفته و محور آن در امتداد خط واسط بین دو بار است، از رابطهٔ $F = p(dE_z/dz)$ به‌دست می‌آید، که در اینجا p گشتاور دوقطبی و dE_z/dz مقدار حدی مشخص‌شده در قسمت (الف) است.

مسئله‌های کامپیوتری

۱. حلقه‌ای به شعاع $r = ۱٫۰\ \text{m}$ در اختیار داریم که حامل چگالی بار نایکنواختی است که با عبارت $\lambda = (۲٫۰ \mu\text{C/m})(۲ + \sin\theta)$ مشخص شده است. به‌صورت عددی مختصات نقطه‌ای را بیابید که در آن میدان الکتریکی صفر می‌شود.

۲. چگالی بار روی میله‌ای به طول L که در امتداد محور x قرار گرفته، به‌طوری که وسط آن بر مبدأ مختصات منطبق است با عبارت $\lambda = (۱٫۰ \mu\text{C/m}) \sin^۲(\pi x/L)$ داده شده است. به‌صورت عددی نموداری ایجاد کنید که خطوط میدان الکتریکی را در صفحهٔ xy به‌دست دهد.

۳. دو ذره در نظر بگیرید که بر یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. هر کدام از این دو ذره در پاسخ به میدان الکتریکی ناشی از ذرهٔ دیگر شتاب می‌گیرد و با تغییر مکان آنها، نیروهایی که بر یکدیگر وارد می‌کنند نیز تغییر می‌کند. این دو ذرهٔ یکسان، که بار هر کدام $q = +۱٫۹ \times ۱۰^{-۹}\text{C}$ و جرم هر یک $m = ۶٫۱ \times ۱۰^{-۱۵}\text{kg}$ است، با سرعت یکسان $۳٫۰ \times ۱۰^۴ \text{m/s}$ در جهت مثبت x شروع به حرکت می‌کنند. یکی از

این دو ذره در آغاز حرکت در نقطهٔ $x = ۰$، $y = ۶٫۷ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m}$ و ذرهٔ دیگر در نقطهٔ $x = ۰$، $y = -۶٫۷ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m}$ قرار گرفته است. این دو ذره در صفحهٔ xy قرار دارند و به حرکت خودشان در صفحه ادامه می‌دهند. فقط نیروهای الکتریکی را که این دو ذره به‌هم وارد می‌کنند در نظر بگیرید. (الف) از یک برنامهٔ کامپیوتری به‌منظور ترسیم مسیر حرکت این دو ذره از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۱٫۰ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{s}$ استفاده کنید.

چون وضعیت متقارن است، کافی است که مکان و سرعت یکی از این دو ذرهٔ باردار را محاسبه کنید. با بهره‌گیری از تقارن مسئله، مکان و سرعت ذرهٔ دیگر را در آغاز هر بازهٔ انتگرال‌گیری معین کنید. برای بازهٔ انتگرال‌گیری از $\Delta t = ۱ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{s}$ استفاده کنید. (ب) اکنون فرض کنید که بار یکی از این دو ذره برابر $q = -۱٫۹ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{C}$، ولی بقیهٔ شرایط مانند قسمت (الف) باشد. در این حالت مسیر ذرات را در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۵٫۰ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{s}$ رسم کنید.

۲۷

قانون گاؤس

همواره می‌توان از قانون کولن برای محاسبهٔ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ مربوط به هر توزیع گسسته یا پیوسته‌ای از بارهای در حال سکون استفاده کرد. جمع‌بندی یا انتگرال‌گیری ممکن است پیچیده و دشوار باشد (و احتمال دارد که برای انجام محاسبات عددی آنها به یک کامپیوتر نیاز باشد)، ولی همواره می‌توان میدان الکتریکی برایند را محاسبه کرد.

در فصل قبل با بهره‌گیری از استدلالهای ساده‌کنندهٔ مسئله، مبتنی بر تقارن وضعیت فیزیکی، مواردی را بررسی کردیم. به‌عنوان مثال، برای محاسبهٔ میدان الکتریکی در یک نقطه روی محور یک حلقهٔ باردار دایره‌ای، با استفاده از بحثهای تقارن نتیجه گرفتیم که مؤلفه‌های $\vec{\mathbf{E}}$ عمود بر محور حلقه باید صفر شوند. در این فصل جایگزینی را برای قانون کولن، به نام قانون گاؤس، مطالعه می‌کنیم، که برای وضعیت با تقارنهای خاص، رهیافت مفید و آموزنده‌تری برای محاسبه میدان الکتریکی است.

تعداد حالتهایی که می‌توان با استفاده از قانون گاؤس مستقیماً تحلیل کرد کم است، اما آنها را می‌توان با سهولتی باورنکردنی انجام داد. گرچه در مواردی که هر دو قانون گاؤس و قانون کولن را می‌توان به‌کار برد نتیجه‌های کاملاً یکسانی به‌دست می‌آید، قانون گاؤس، معادلهٔ بنیادیتری از قانون کولن است. می‌توان گفت در حالی‌که قانون کولن اسب بارکش الکتروستاتیک است، قانون گاؤس بینش لازم را فراهم می‌آورد.

۲۷ـ۱ قانون گاؤس دربارهٔ چیست؟

تا به اینجا، هر آنچه که در الکتروستاتیک انجام داده‌ایم بر قانون کولن، معادلهٔ (۲۵ـ۴)، پایه‌گذاری شده است، که نیروی الکتریکی بین بارهای نقطه‌ای را به‌دست می‌دهد. با شروع از قانون کولن، که اساساً یک نمایش ریاضی از مشاهدات تجربی است، میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه‌ای q را تعریف کردیم، به‌طوری که $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}/q_0$، که در اینجا $\vec{\mathbf{F}}$ نیروی وارد بر بار q_0 از طرف بار q است. با تعمیم این موضوع به توزیع بارهایی که می‌توان آنها را به‌صورت مجموعه‌هایی از تعداد بسیار زیادی بارهای نقطه‌ای بسیار کوچک در نظر گرفت، توانستیم میدان الکتریکی مربوط به چندین توزیع بار متفاوت، مانند توزیع خطی یا قرص را معین کنیم.

قانون گاؤس روش دیگری را برای محاسبهٔ میدانهای الکتریکی فراهم می‌آورد. این قانون برای بارهای نقطه‌ای هم‌ارز قانون کولن است، یعنی هر آنچه را که تاکنون با بهره‌گیری از قانون کولن انجام داده‌ایم می‌توانیم با شروع و استفاده از قانون گاؤس انجام دهیم.

اگر قانون کولن برای محاسبهٔ میدانهای الکتریکی مربوط به هر توزیع بار ساکنی کافی است، چه نیازی به قانون گاؤس داریم؟ یک پاسخ به این پرسش آن است که قانون گاؤس در مواردی که تقارن

مرتبهٔ بالایی در مسئله وجود دارد، مانند توزیع کروی بار، روش بسیار ساده‌تری را برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ارائه می‌دهد. پاسخ دیگر آن است که با نوشتن قانون گاؤس به‌جای قانون کولن به‌عنوان یک قانون بنیادی الکتروستاتیک می‌توانیم دستگاه معادلاتی را برای پدیده‌های الکترومغناطیس ایجاد کنیم که ارتباط بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را با شفافیت بیشتری به نمایش می‌گذارند. پاسخ سوم این کار آن است که قانون گاؤس برای بارهای سریعاً متحرک معتبر است، ولی قانون کولن را فقط می‌توان در مورد بارهای ساکن یا بارهایی که به آرامی حرکت می‌کنند به‌کار برد. سرانجام، همان‌طورکه در قسمتهای بعدی همین فصل نشان خواهیم داد، قانون کولن را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از قانون گاؤس به‌دست آورد، و از آن‌رو قانون گاؤس خیلی کلیتر از قانون کولن است. به خاطر همین دلایل، قانون گاؤس را خیلی بنیادیتر از قانون کولن می‌پنداریم و آن را یکی از چهار معادلهٔ اساسی الکترومغناطیس منظور می‌کنیم (معادله‌های ماکسول، که آنها را در فصل ۳۸ بررسی خواهیم کرد).

قبل از معرفی قانون گاؤس، ابتدا نیاز داریم که کمیت جدیدی را تعریف کنیم و مورد بررسی قرار دهیم، این کمیت جدید شار میدان الکتریکی است. شار یک خاصیت ریاضی هر میدانی است که به‌وسیلهٔ بردار نمایش داده شود و از طریق انتگرال روی سطح بردار میدان روی یک سطح مشخص تعیین می‌شود. برای شار یک تعبیر هندسی نیز وجود دارد و آن تعبیر مبتنی است بر تعداد خطهای میدانی که از یک سطح عبور می‌کند.

۲۷ـ۲ شار میدان برداری

واژهٔ شار معادل واژه‌ای است که از زبان لاتین سرچشمه می‌گیرد و به معنی "جاری شدن" است. می‌توانیم تصور کنیم که شار یک میدان برداری معیاری است از میزان "شارش" یا نفوذ بردارهای میدان از یک سطح فرضی ثابت در داخل میدان. بعداً شار میدان الکتریکی را مورد بررسی قرار خواهیم داد، ولی اکنون به مثال شناخته‌شده‌تر، میدان سرعت یک شارهٔ جاری می‌پردازیم.

جویباری از یک شاره را در یک جریان پایا در نظر بگیرید، که در آن جریان را با مشخص‌کردن بردار سرعت در هر نقطه نمایش می‌دهیم. شکل ۲۷ـ۱ یک جریان یکنواخت را نشان می‌دهد؛ بردارهای سرعت در همه جای شاره با هم موازی‌اند. فرض کنید که سیمی را به‌صورت یک حلقهٔ مربعی به مساحت A درآورده‌ایم و آن را در داخل جویبار قرار داده‌ایم. در شکل ۲۷ـ۱ (الف)، این مربع طوری قرار گرفته که صفحه‌اش عمود بر جهت جریان است. شار Φ میدان سرعت را چنان تعریف می‌کنیم که مقدارش از عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\Phi| = vA \qquad (۲۷ـ۱)$$

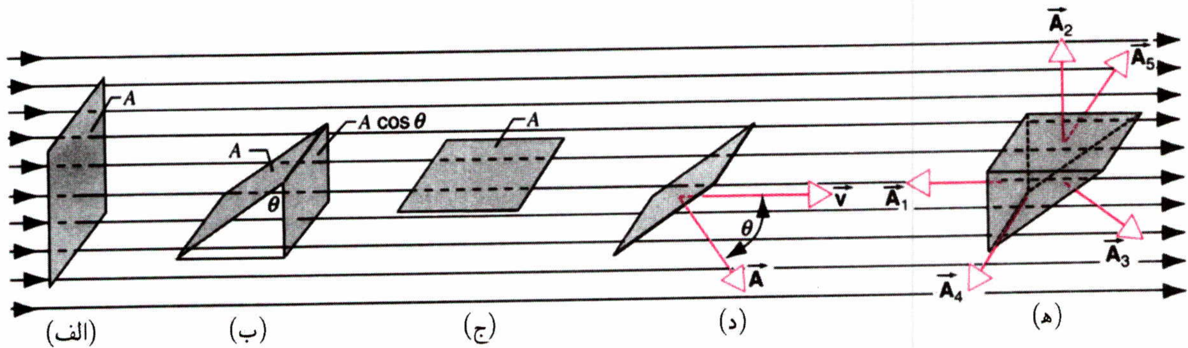
که در اینجا v بزرگی سرعت در محل حلقه است. در اینجا شار دارای یکای $\mathrm{m^3/s}$ است و می‌توان آن را نشان‌دهندهٔ آهنگ عبور شاره از حلقه در نظر گرفت؛ ولی، در مفهوم میدان (و به خاطر معرفی قانون گاؤس) مناسبتر است که شار را به‌صورت معیاری از تعداد خطهای میدان که از حلقه می‌گذرند مورد توجه قرار داد.

در شکل ۲۷ـ۱ (ب) حلقه را چرخانده‌ایم به‌طوری که سطح آن دیگر بر جهت سرعت عمود نیست. توجه کنید که تعداد خطهای میدان سرعت که از حلقه می‌گذرد در شکل ۲۷ـ۱ (ب) کمتر از ۲۷ـ۱ (الف) است. مساحت تصویر حلقه در امتداد عمود بر جهت جریان $A\cos\theta$ است، و با بررسی شکل ۲۷ـ۱ (ب) باید خود را متقاعد کنید که تعداد خطهای میدانی که از این حلقه مایل به مساحت A می‌گذرد برابر همان تعداد خطهای میدانی است که از حلقهٔ کوچکتر با مساحت $A\cos\theta$ و عمود بر جهت جریان می‌گذرد. به این ترتیب اندازهٔ شار در وضعیت شکل ۲۷ـ۱ (ب) برابر است با

$$|\Phi| = vA\cos\theta \qquad (۲۷ـ۲)$$

اگر حلقه را بچرخانیم تا سرعت شاره مطابق شکل ۲۷ـ۱ (ج) موازی با سطح آن شود، شار عبوری از حلقه صفر خواهد شد، که متناظر با $\theta = 90^\circ$ در معادلهٔ (۲۷ـ۲) است. توجه داشته باشید که در این مورد هیچ خط میدانی از حلقه نمی‌گذرد.

همان‌طورکه خواهیم دید، قانون گاؤس دربارهٔ شار خالصی است که از یک سطح بسته می‌گذرد. بنابراین باید بین شار مثبت و منفی که به یک سطح نفوذ می‌کند فرق بگذاریم. طرف راست معادلهٔ (۲۷ـ۲) را می‌توان برحسب حاصلضرب داخلی بردار $\mathbf{\vec{v}}$ در بردار $\vec{\mathbf{A}}$، که اندازهٔ آن برابر مساحت سطح و جهت آن عمود بر سطح است، در نظر گرفت (شکل ۲۷ـ۱ (د)). ولی، چون عمود بر یک سطح می‌تواند در جهت نشان داده‌شده در شکل ۲۷ـ۱ (د) یا در جهت عکس آن باشد، باید راهی برای مشخص‌کردن جهت داشته باشیم؛ در غیر این‌صورت علامت Φ به روشنی مشخص نمی‌شود. بنابر قرارداد، جهت $\vec{\mathbf{A}}$ را همان جهت عمود بر سطح و به طرف خارج از یک سطح بسته اختیار می‌کنیم. بنابراین شار خروجی از سطح یک حجم محصور را مثبت و شار ورودی به آن را منفی در نظر می‌گیریم. با این گزینش،



شکل ۲۷ـ۱ یک حلقه سیم به مساحت A در جویباری غوطه‌ور است، که آن را به‌صورت یک میدان سرعت نمایش می‌دهیم. (الف) حلقه عمود بر جهت جریان است. (ب) حلقه را به اندازهٔ زاویهٔ θ چرخانده‌ایم؛ تصویر مساحت حلقه در راستای عمود بر جهت جریان $A\cos\theta$ است. (ج) وقتی $\theta = ۹۰^\circ$، دیگر هیچ‌یک از خطهای جریان از صفحهٔ حلقه نمی‌گذرند. (د) مساحت حلقه با بردار $\vec{\mathbf{A}}$ عمود بر صفحه حلقه نشان داده شده است. زاویهٔ بین $\vec{\mathbf{A}}$ و سرعت جریان $\vec{\mathbf{v}}$ برابر با θ است. (هـ) یک سطح بسته متشکل از پنج سطح تخت. مساحت $\vec{\mathbf{A}}$ هرکدام از این سطحها را با یک بردار عمود بر سطح به طرف خارج نشان داده‌ایم.

می‌توان شار مربوط به یک سطح بستهٔ متشکل از چند سطح (مانند شکل ۱ـ۲۷ (هـ)) را به‌صورت زیر نوشت

$$\Phi = \sum \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \qquad (۳ـ۲۷)$$

که در اینجا $\vec{\mathbf{v}}$ بردار سرعت در موقعیت سطح است. این جمع را باید روی تمام سطوح منفردی که سطح بسته را تشکیل می‌دهند انجام داد. شار، یک کمیت نرده‌ای است، زیرا به‌صورت حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار تعریف می‌شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۱ سطح بستهٔ شکل ۲۷ـ۱ (هـ) را در نظر بگیرید، که حجم محصور به‌وسیلهٔ پنج سطح را نشان می‌دهد (سطحهای ۱، ۲، و ۳ که به‌ترتیب موازی با سطحهای شکلهای ۲۷ـ۱ (الف)، ۲۷ـ۱ (ب)، ۲۷ـ۱ (ج) هستند، همراه با سطحهای ۴ و ۵ که موازی با خطهای جریان‌اند). با فرض اینکه میدان سرعت یکنواخت است، به‌طوری که اندازه و جهت آن در همه جا یکسان است، شار کل گذرنده از این سطح بسته را معین کنید.

حل. با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۷ـ۳) می‌توانیم شار کل گذرنده از این سطح بسته را به‌صورت حاصل‌جمع شارهای گذرنده از هر پنج سطح در نظر بگیریم:

$$\Phi = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_۱ + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_۲ + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_۳ + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_۴ + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_۵$$

توجه کنید که برای سطح ۱ زاویهٔ بین عمود بر سطح به طرف خارج $\vec{\mathbf{A}}$ و بردار سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ برابر ۱۸۰° است، به‌طوری که حاصلضرب نقطه‌ای $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}_۱$ را می‌توان به‌صورت $-vA_۱$ نوشت. سهم مربوط به سطحهای ۲، ۴، و ۵ همگی صفرند، زیرا در هر یک از این موارد (همان‌طور که در شکل ۲۷ـ۱ (هـ) نشان داده شده است) بردار $\vec{\mathbf{A}}$ بر بردار $\vec{\mathbf{v}}$ عمود است. برای سطح ۳، شار را می‌توانیم به‌صورت $vA_۳\cos\theta$ بنویسیم، و در نتیجه شار کل برابر است با

$$\Phi = -vA_۱ + ۰ + vA_۳\cos\theta + ۰ + ۰ = -vA_۱ + vA_۳\cos\theta$$

ولی، از هندسهٔ شکل ۲۷ـ۱ (هـ) نتیجه می‌گیریم که $A_۳\cos\theta = A_۱$ و سرانجام می‌رسیم به

$$\Phi = ۰$$

یعنی، شار کلی که از یک سطح بسته می‌گذرد صفر است.

اگر به‌خاطر بیاوریم که میدان سرعت روش معادلی برای نمایش جریان واقعی ذرات مادی در جویبار است نتیجهٔ مثال بالا نباید شگفت‌انگیز باشد. هر خط میدان که از سطح ۱ در شکل ۲۷ـ۱ (هـ) به سطح بسته وارد می‌شود از سطح ۳ خارج می‌شود. همین‌طور، می‌توان گفت که، برای سطح بستهٔ شکل ۲۷ـ۱ (هـ)، مقدار شاره‌ای که به حجم محصور در سطح بسته وارد می‌شود برابر مقدار شاره‌ای است که آن سطح بسته را ترک می‌کند. برای هر سطح بسته‌ای که در حجم آن هیچ چشمه یا چاهکی وجود ندارد، یعنی محلی که در آن شارهٔ جدید به‌وجود آید یا شارهٔ جاری در آن به دام افتد، چنین رفتاری را انتظار داریم. اگر در حجم محصور چشمه‌ای وجود داشت (مانند قطعه یخ در حال آب‌شدنی که مقداری شاره به درون جویبار می‌ریزد)، در آن

صورت مقدار شاره‌ای که از سطح خارج می‌شد بیشتر از مقدار ورودی بود و در این حالت شار کل مثبت می‌شد. اگر در حجم محصور چاهکی وجود داشت، در آن صورت مقدار شاره‌ای که به سطح بسته وارد می‌شد بیشتر از مقدار خروجی بود، و در این حالت شار خالص سطح بسته منفی می‌شد. شار خالص مثبت یا منفی عبورکرده از یک سطح بسته به قدرت چشمه یا چاهک بستگی دارد (یعنی، به آهنگ حجمی مقدار شاره‌ای که چشمه را ترک می‌کند یا به چاهک وارد می‌شود). مثلاً، اگر یک جامد در حال ذوب در داخل سطح بسته در هر ثانیه یک سانتی‌مترمکعب شاره به داخل جویبار بریزد، برای این سطح بسته شار خالص گذرنده را برابر با $+1\,\mathrm{cm^3/s}$ به‌دست می‌آوریم.

شکل ۲۷ـ۱ حالت خاص یک میدان یکنواخت و سطحهای تخت را نشان می‌دهد. به آسانی می‌توان این مفاهیم را به میدان غیریکنواخت و سطحهایی به شکلها و سمتگیریهای دلخواه و متفاوت تعمیم داد. هر سطح دلخواهی را می‌توان به اجزای بینهایت کوچک به مساحت dA تقسیم کرد که صفحه‌هایی تقریباً تخت هستند. جهت بردار $d\vec{\mathbf{A}}$ همان جهت عمود بر سطح و به سوی خارج از این جزء بینهایت کوچک است. میدان در محل این جزء دارای مقدار $\vec{\mathbf{v}}$ است و شار خالص گذرنده از سطح را می‌توان با جمع‌کردن سهم همهٔ این اجزا معین کرد، یعنی با انتگرال‌گیری روی تمام سطح، شار مشخص می‌شود:

$$\Phi = \int \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (۲۷\text{ـ}۴)$$

نتیجه‌گیری بالا در این حالت کلی هم معتبر است: اگر معادلهٔ (۲۷ـ۴) را روی یک سطح بسته محاسبه کنیم، در این‌صورت شارگذرنده (۱) صفر است اگر سطح بسته شامل هیچ چشمه یا چاهکی نباشد، (۲) مثبت و بزرگی آن برابر با قدرت چشمه‌هاست اگر سطح بسته فقط شامل چشمه باشد، یا (۳) منفی است و بزرگی آن برابر با قدرت چاهکهاست اگر سطح بسته فقط شامل چاهک باشد. اگر سطح بسته هم چشمه داشته باشد و هم چاهک، در این‌صورت شارگذرندهٔ خالص ممکن است با توجه به قدرت نسبی چشمه‌ها و چاهکها صفر، مثبت یا منفی باشد.

در بخش بعد همین ملاحظات را برای شار میدان برداری دیگری، به نام میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ به‌کار می‌بریم. همان‌طور که انتظار دارید، وقتی دربارهٔ الکتروستاتیک صحبت می‌کنیم چشمه‌ها یا چاهکهای میدان همان بارهای مثبت یا منفی هستند و قدرت چشمه‌ها یا چاهکها متناسب است با بزرگی بارها. قانون گاؤس شار میدان الکتریکی را که از یک سطح بسته می‌گذرد، و از معادله‌ای مشابه معادلهٔ (۲۷ـ۴) محاسبه می‌شود، به مقدار بار الکتریکی خالص موجود در آن سطح بسته ارتباط می‌دهد.

۲۷ـ۳ شار میدان الکتریکی

تصور کنید که خطهای میدان شکل ۲۷ـ۱ به‌جای یک میدان سرعت نشان‌دهنده یک میدان الکتریکی بارهای ساکن باشند. گرچه در الکتروستاتیک هیچ چیزی جاری نمی‌شود، اما باز هم از مفهوم شار استفاده می‌کنیم. تعریف شار الکتریکی مانند تعریف شار سرعت است و هر جا که $\vec{\mathbf{v}}$ ظاهر می‌شود به‌جای آن $\vec{\mathbf{E}}$ می‌گذاریم. در مقایسه با معادلهٔ (۲۷ـ۳)، شار میدان الکتریکی Φ_E را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

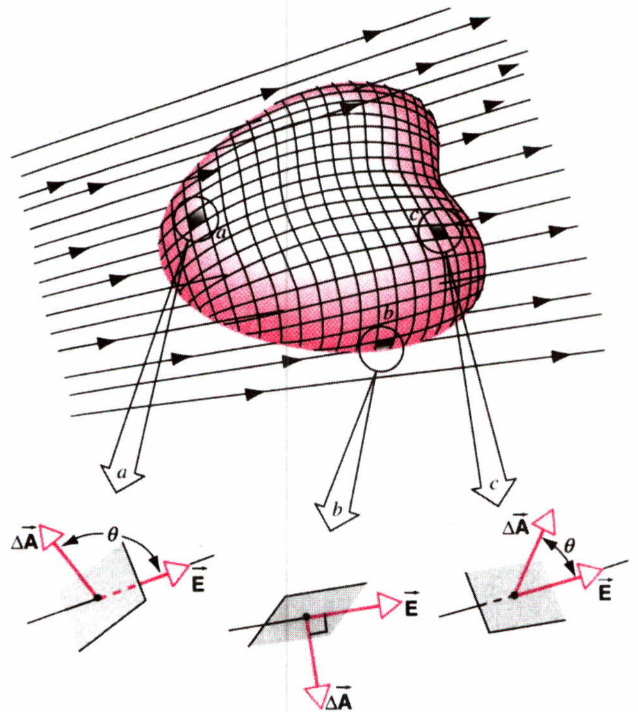
$$\Phi_E = \sum \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \qquad (۲۷\text{ـ}۵)$$

مانند مورد شار سرعت، شار Φ_E را می‌توان معیاری از تعداد خطهای میدان الکتریکی که از سطح می‌گذرند در نظر گرفت. زیرنویس E در Φ_E یادآور می‌شود که دربارهٔ شار الکتریکی صحبت می‌کنیم و شار الکتریکی را از شار مغناطیسی، که در فصل ۳۴ بررسی می‌کنیم، متمایز می‌سازد. معادلهٔ (۲۷ـ۵) مانند معادلهٔ (۲۷ـ۳)، تنها در مواردی به‌کار می‌رود که میدان $\vec{\mathbf{E}}$ هم از لحاظ بزرگی و هم از نظر جهت روی سطح $\vec{\mathbf{A}}$، مشخص‌شده در زیر علامت جمع، ثابت باشد.

همانند شار سرعت، شار میدان الکتریکی یک کمیت نرده‌ای است. یکای آن، با استفاده از معادلهٔ (۲۷ـ۵)، $\mathrm{N\cdot m^2/C}$ است.

قانون گاؤس با شار میدان الکتریکی که از یک سطح بسته می‌گذرد سروکار دارد. برای تعریف Φ_E به‌صورت کلیتر، به‌ویژه در مواردی که $\vec{\mathbf{E}}$ یکنواخت نیست، شکل ۲۷ـ۲ را در نظر بگیرید، که یک سطح بستهٔ اختیاری غوطه‌ور در یک میدان الکتریکی نایکنواخت را نشان می‌دهد. این سطح را به مربعهای کوچکی به مساحت ΔA تقسیم می‌کنیم، به‌طوری که هر یک از آنها به‌قدری کوچک باشند که بتوان آنها را تخت پنداشت. هر جزء سطح را می‌توان با یک بردار $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ نمایش داد که اندازهٔ آن برابر مساحت ΔA است. جهت بردار $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ را مانند شکل ۲۷ـ۱، عمود و به طرف خارج سطح بسته اختیار می‌کنیم. چون مربعها را بسیار کوچک در نظر گرفته‌ایم، می‌توان $\vec{\mathbf{E}}$ را در همهٔ نقاط یک مربع معین ثابت فرض کرد.

بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ که هر مربع را مشخص می‌کنند با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند. شکل ۲۷ـ۲ نمای بزرگ‌شدهٔ سه مربع روی سطح، که با حروف a، b و c نشانه‌گذاری شده‌اند، را نشان می‌دهد. توجه



شکل ۲۷ـ۲ سطحی به شکل دلخواه در میدان الکتریکی نایکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ غوطه‌ور است. این سطح را به اجزای کوچکی به مساحت $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ تقسیم کرده‌ایم. ارتباط بین بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ را برای سه جزء سطح متفاوت (a، b و c) نشان داده‌ایم.

کنید که در نقطهٔ a، $\theta > ۹۰^\circ$ ($\vec{\mathbf{E}}$ به طرف داخل است)؛ در نقطهٔ b، $\theta = ۹۰^\circ$ ($\vec{\mathbf{E}}$ موازی با سطح است)؛ و در نقطهٔ c، $\theta < ۹۰^\circ$ ($\vec{\mathbf{E}}$ به طرف خارج است).

از مقایسه با معادلهٔ (۲۷ـ۵)، تعریف موقت شار کل میدان الکتریکی روی سطح به‌صورت زیر است

$$\Phi_E = \sum \vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}} \qquad (۲۷ـ۶)$$

این رابطه نشان می‌دهد که باید کمیت نرده‌ای $\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$ را برای همهٔ اجزای مساحت سطح مورد نظر با هم جمع کرد. سهم نقطه‌هایی مانند a در شکل ۲۷ـ۲ در شار منفی؛ برای b صفر؛ و برای c مثبت است. به این ترتیب اگر $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا به طرف خارج سطح باشد ($\theta < ۹۰^\circ$)، هر یک از $\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$ها مثبت است و Φ_E برای کل سطح مثبت خواهد شد. اگر $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا به طرف داخل سطح باشد ($\theta > ۹۰^\circ$)، هر یک از $\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$ها منفی و Φ_E برای کل سطح منفی است. هرگاه $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا موازی با سطح باشد ($\theta = ۹۰^\circ$)، هر یک از $\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$ها صفر و Φ_E برای کل سطح صفر است.

تعریف دقیق شار الکتریکی از حد دیفرانسیلی معادلهٔ (۲۷ـ۶) حاصل می‌شود، که در آن به‌جای جمع‌زنی روی سطح انتگرال‌گیری روی سطح را قرار می‌دهیم و می‌رسیم به

$$\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (۲۷ـ۷)$$

این انتگرال سطحی نشان می‌دهد که سطح مورد نظر را باید به اجزای بینهایت کوچک $d\vec{\mathbf{A}}$ تقسیم و کمیت نرده‌ای $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ را برای هر کدام از این اجزا محاسبه کرد، سپس آنها را روی کل سطح جمع زد. در قانون گاؤس، فقط به محاسبهٔ این انتگرال روی یک سطح بسته علاقه‌مندیم. در این مورد علامت انتگرال را همراه با یک دایرهٔ کوچک به‌صورت $\oint$ می‌نویسیم که یادآور بسته‌بودن سطح باشد.

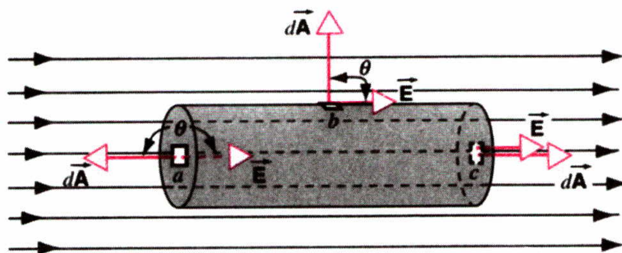
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۲ شکل ۲۷ـ۳ یک استوانهٔ بستهٔ فرضی به شعاع R را نشان می‌دهد که در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ غوطه‌ور است. محور استوانه با میدان موازی است. شار Φ_E برای این سطح بسته چقدر است؟

حل. شار Φ_E را می‌توان به‌صورت جمع سه جمله نوشت، انتگرالی روی (الف) قاعدهٔ سمت چپ، (ب) سطح جانبی، و (ج) قاعدهٔ سمت راست استوانه. به این ترتیب از معادلهٔ (۲۷ـ۲) برای یک سطح بسته داریم

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$
$$= \int_a \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_c \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

برای قاعدهٔ سمت چپ، زاویهٔ θ برای تمام نقاط برابر با ۱۸۰° است، $\vec{\mathbf{E}}$ مقدار ثابتی دارد و همهٔ بردارهای $d\vec{\mathbf{A}}$ موازی‌اند. به‌این‌ترتیب

$$\int_a \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int E\,dA \cos ۱۸۰^\circ = -E \int dA = -EA$$



شکل ۲۷ـ۳ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۲. استوانهٔ بسته‌ای در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$، موازی با محور آن، غوطه‌ور است.

که در اینجا A $(=\pi R^{۲})$ مساحت قاعدهٔ سمت چپ است. به همین ترتیب، برای قاعدهٔ سمت راست داریم

$$\int_c \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = +EA$$

در اینجا زاویهٔ θ برابر تمام نقاط برابر با °۰ است. سرانجام شاری که از سطح جانبی یا جدارهٔ استوانه می‌گذرد عبارت است از

$$\int_b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = ۰$$

چون $\theta = ۹۰^\circ$ است؛ بنابراین، برای تمام نقاط روی جدارهٔ استوانه $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = ۰$. به این ترتیب شار کل برابر است با

$$\Phi_E = -EA + ۰ + EA = ۰$$

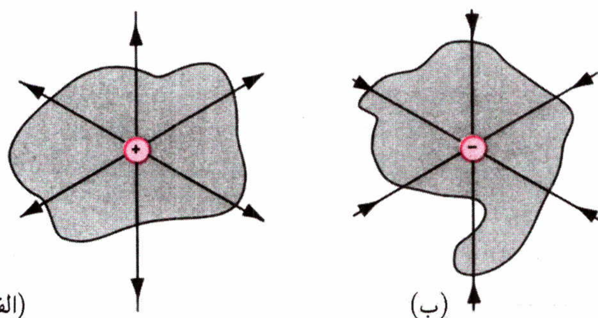
انتظار همین نتیجه را داشتیم، زیرا در محدودهٔ سطح بستهٔ شکل ۲۷ـ۳ هیچ‌گونه بار الکتریکی وجود نداشت. خطهای $\vec{\mathbf{E}}$ (ثابت) از سمت چپ وارد و از سمت راست خارج می‌شوند، درست مانند شکل ۲۷ـ۱ (هـ).

شار و خطهای میدان

برای نشان‌دادن ارتباط بین شار و تعداد خطهای میدانی که از یک سطح بسته می‌گذرند، فرض می‌کنیم که هر یکای بار q به‌وسیلهٔ تعداد مشخصی خط میدان، مثلاً شش خط، مانند شکل ۲۷ـ۴، نمایش داده شود.* شش خط میدان از بار $+q$ خارج می‌شوند و شش خط میدان روی بار $-q$ پایان می‌یابد. اگر هر بار به‌وسیلهٔ یک سطح بسته احاطه شود، در آن صورت شار الکتریکی گذرنده از سطحی که بار مثبت را احاطه کرده ۶+ واحد و شار الکتریکی گذرنده از سطحی که بار منفی را احاطه کرده ۶− واحد است. (ما یکای دلخواه ۱+ را برای شار مربوط به خطهای میدانی که از سطح به سمت خارج می‌گذرد و یکای ۱− را برای خطهای میدانی که از سطح به سمت داخل می‌گذرد در نظر می‌گیریم.) بزرگی و کوچکی سطحی که هر کدام از بارها را احاطه می‌کند اصلاً اهمیتی ندارد، همواره شش خط میدان از سطح نفوذ می‌کند و شار دارای شش واحد است.

* برای سادگی، نمودارهای خط میدان را به‌جای سه بعد در دو بعد نمایش می‌دهیم. در فضای سه‌بعدی، نمودارها اغلب پیچیده‌ترند و باید مراقب باشیم تا طرح‌وارهٔ میدان وابسته به بارها را نمایش دهیم. برای بحث دربارهٔ این موضوع نگاه کنید به:

"Electric Field Line Diagrams Don't Work," by A. Wolf, S. J. Van Hook, and E. R. Weeks, *American Journal of Physics*, June 1996, p. 714.



شکل ۲۷ـ۴ (الف) شش خط میدان از یک سطح بسته با شکل دلخواه که بار مثبت $+q$ را در برگرفته است می‌گذرد. (ب) شش خط میدان به سطح بسته‌ای که بار $-q$ را در برگرفته است وارد می‌شود.

در شکل ۲۷ـ۴(ب) خط میدانی که در پایین شکل رسم‌شده سه‌مرتبه از سطح می‌گذرد. اگر از طرف بیرون سطح به سمت بار حرکت کنیم، اولین بار که خط میدان وارد سطح می‌شود آن را به‌صورت ۱− شمارش می‌کنیم؛ چون از بیرون سطح بسته به درون نفوذ می‌کند؛ دومین بار را ۱+ شمارش می‌کنیم چون در این وضعیت خط میدان از داخل به خارج می‌رود، و سومین بار که خط میدان مجدداً وارد سطح می‌شود شمارش خطهای میدان، یک ۱− دیگر نتیجه می‌دهد. در نتیجه سهم خالص این خط میدان به شار گذرنده از سطح برابر با ۱− است، و شار خالص مربوط به کل سطح بسته برابر با ۶− واحد است. بدون توجه به اینکه شکل سطح بسته چیست یا چگونه کشیده شده است یا در شکل آن چه اختلالی به‌وجود آمده است، شار خالصی که از سطح بسته می‌گذرد همواره ثابت است و فقط به‌وسیلهٔ میزان باری که در داخل سطح محصور شده است معین می‌شود.

در شکل ۲۷ـ۵ سطح بسته‌ای را نشان داده‌ایم که بارهای مثبت و منفی $+q$ و $-q$ را دربرگرفته است. شار خالص گذرنده از این سطح بسته صفر است، زیرا به‌ازای هر خط میدانی که از بار مثبت از درون سطح به بیرون نفوذ می‌کند، خط میدانی به دلیل وجود بار منفی از بیرون به درون سطح وارد می‌شود. چون هر دو بار دارای مقدار یکسان هستند، تعداد کل خطهای میدان صفر است، و بنابراین شار خالص گذرنده از این سطح صفر است.

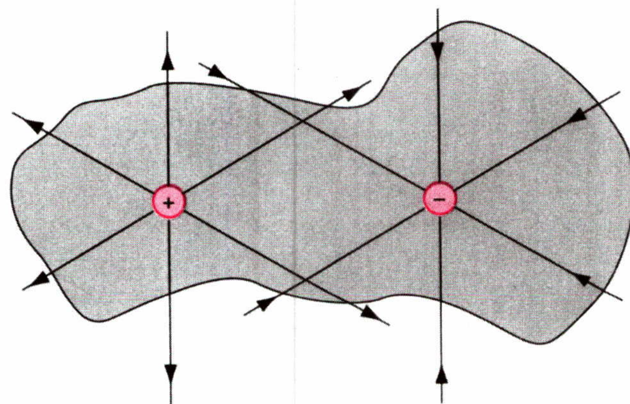
حالا تصور کنید به شما گفته‌اند که ۳۰+ خط میدان (یا ۳۰ یکای شار) از سطح بسته‌ای با شکل دلخواه می‌گذرد. آیا می‌توانید معین کنید که چه مقدار بار در داخل این سطح بسته قرار دارد و این بارها در چه موقعیتی در داخل سطح قرار گرفته‌اند؟ می‌دانیم که بار خالص موجود در درون این سطح بسته $+5q$ است، ولی

نمی‌دانیم که آیا یک ذره است که حاوی بار کامل $+5q$ است، یا اینکه دو ذره با بارهای $+6q$ و $-q$، یا سه ذره با بارهای $+8q$، $+4q$، و $-7q$، یا هر ترکیب دیگری از بینهایت راه ممکن. همچنین، بار یا بارها می‌توانند در هر مکانی در داخل سطح بسته قرار گیرند و باز هم همان ۳۰+ یکای شار را پدید آورند. اگر فقط شار را بدانیم، مقدار بار خالص موجود در داخل سطح بسته را هم می‌دانیم، ولی نمی‌توانیم هیچ‌گونه اطلاعاتی دربارهٔ اندازه و موقعیت بارها به‌دست آوریم، و بنابراین نمی‌توانیم هیچ‌گونه اطلاعاتی دربارهٔ میدان الکتریکی روی سطح بسته یا هیچ جای دیگری در فضا به‌دست آوریم.

ولی، اگر یک سطح کروی ترسیم کنیم، و اگر بدانیم که شار به‌طور یکنواخت روی سطح توزیع شده است، در آن صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که تمامی بار در موقعیت مرکز کره در تک‌ذره‌ای با بار $+5q$ مستقر شده است، و چنانچه بزرگی و مکان این ذرهٔ باردار را بدانیم می‌توانیم میدان الکتریکی را در هر مکانی از فضا به‌دست آوریم. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

> رابطهٔ بین شار کل گذرنده از یک سطح بسته و بار خالص در برگرفته‌شده به‌وسیلهٔ سطح همواره معتبر است، ولی تنها در صورتی می‌توانیم از این رابطه برای به‌دست آوردن میدان الکتریکی در نقاطی از فضا استفاده کنیم که هندسهٔ مربوط به بار و هندسهٔ مربوط به سطح دارای مرتبه بالایی از تقارن باشد.

قانون گاؤس رابطهٔ بین شار گذرنده از یک سطح بسته و بار خالص در برگرفته‌شده به‌وسیلهٔ آن سطح را به‌دست می‌دهد.



شکل ۲۷ـ۵ اگر بار خالص در برگرفته به‌وسیلهٔ یک سطح بسته صفر باشد، در آن صورت تعداد خطهای میدان (و شار الکتریکی کل) که از این سطح می‌گذرد نیز برابر با صفر است.

۲۷ـ۴ قانون گاؤس*

اکنون که شار میدان برداری الکتریکی را که از یک سطح بسته می‌گذرد تعریف کردیم، آماده‌ایم که قانون گاؤس را بنویسیم. فرض کنید که مجموعه‌ای از بارهای مثبت و منفی داریم، که میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ را در ناحیه‌ای از فضا به‌وجود می‌آورند. در آن فضا یک سطح بستهٔ فرضی در نظر می‌گیریم و این سطح را سطح گاؤسی می‌خوانیم، که ممکن است حاوی برخی از بارها باشد یا نباشد. قانون گاؤس که شار کل عبوری از این سطح یعنی Φ_E را به بار خالص محصور در آن ارتباط می‌دهد می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\epsilon_\circ \Phi_E = q \qquad (۲۷ـ۸)$$

یا

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q \qquad (۲۷ـ۹)$$

در معادلهٔ اخیر، دایرهٔ روی علامت انتگرال حاکی از انتگرال‌گیری روی یک سطح بسته است. می‌بینیم که قانون گاؤس برای سطح مورد نظر در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۲، Φ_E را صفر پیش‌بینی می‌کند، زیرا این سطح هیچ باری در برندارد.

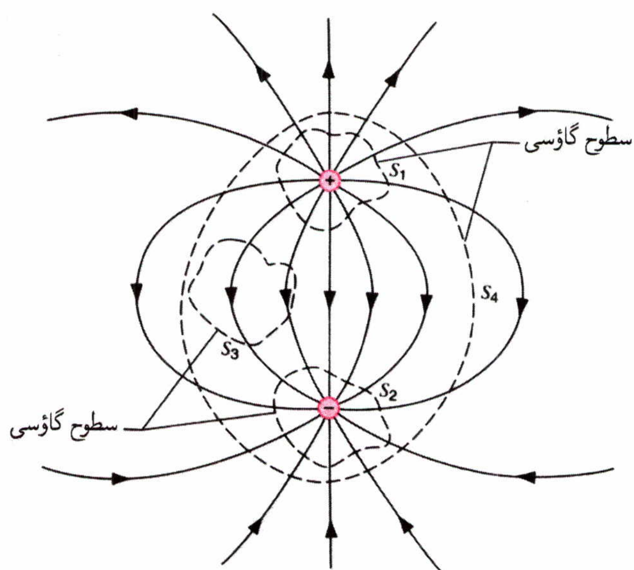
همان‌طور که در بخش ۲۶ـ۵ گفتیم، اندازهٔ میدان الکتریکی با تعداد خطهای میدانی که از یک جزء مساحت و عمود بر راستای میدان می‌گذرند متناسب است. انتگرال معادلهٔ (۲۷ـ۹) اساساً تعداد خطهای میدانی را می‌شمارد که از سطح می‌گذرند. کاملاً منطقی است که تعداد خطهایی که از یک سطح می‌گذرند با بار خالصی که آن سطح در برمی‌گیرد متناسب باشد. معادلهٔ (۲۷ـ۹) مبین این مطلب است.

انتخاب سطح گاؤس اختیاری است. این سطح معمولاً چنان برگزیده می‌شود که تقارن توزیع، لااقل روی بخشی از سطح بسته، یک میدان الکتریکی ثابت به‌دست دهد، که بتوان آن را از زیر علامت انتگرال معادلهٔ (۲۷ـ۹) به‌صورت یک ضریب خارج کرد. در چنین مواردی، می‌توان از قانون گاؤس برای محاسبهٔ میدان الکتریکی استفاده کرد.

شکل ۲۷ـ۶ خطوط نیرو (و از آن‌رو خطهای میدان الکتریکی) یک دوقطبی را نشان می‌دهد. چهار سطح بستهٔ گاؤسی در نظر گرفته‌ایم

* کارل فردریش گاؤس (۱۷۷۷ تا ۱۸۵۵) ریاضیدان آلمانی که کشفیات بسیار مهمی در نظریهٔ اعداد، هندسه، و احتمالات دارد. او همچنین در پیشبرد اخترشناسی و اندازه‌گیری ابعاد و شکل زمین سهیم است. برای اندک آشنایی با جلوه‌های شگفت‌آور زندگی این ریاضیدان عالی‌قدر نگاه کنید به:

"Gauss", by Ian Stewart, *Scientific American*, July 1977, p. 122.

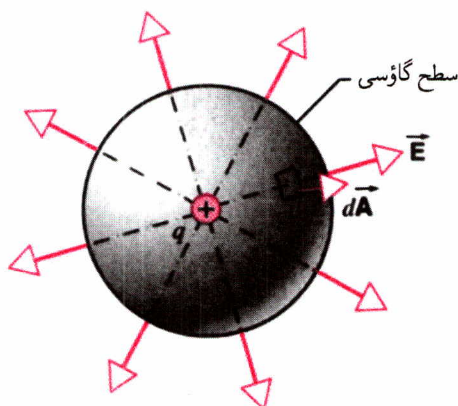


شکل ۲۷ـ۶ دو بار مساوی و با علامت مختلف و خطهایی که میدان الکتریکی را در حوالی این دو بار نشان می‌دهند. در اینجا مقطع چهار سطح بستهٔ گاؤسی را نشان داده‌ایم.

و سطح مقطع آنها را در شکل نشان داده‌ایم. روی سطح $S_۱$، میدان الکتریکی در همه جا به طرف خارج از سطح است و از آن‌رو، همان‌طور که در مورد جزء سطح E شکل ۲۷ـ۲ دیدیم، $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}$ در همه جا روی سطح $S_۱$ مثبت است. وقتی انتگرال معادلهٔ (۲۷ـ۹) را روی تمام سطح بسته محاسبه کنیم، یک مقدار مثبت به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت معادلهٔ (۲۷ـ۹) ایجاب می‌کند که این سطح یک بار مثبت را در برداشته باشد، که همین‌طور هم هست. به بیان فاراده، تعداد خطهای نیرویی که از سطح خارج می‌شود بیشتر از خطهایی است که وارد آن می‌شود، بنابراین سطح باید حاوی یک بار مثبت خالص باشد.

از طرف دیگر، روی سطح $S_۲$ شکل ۲۷ـ۶، میدان الکتریکی در همه جا به سطح وارد می‌شود. مانند جزء سطح a در شکل ۲۷ـ۲، کمیت $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}$ برای هر کدام از اجزای این سطح منفی است و در نتیجه انتگرال معادلهٔ (۲۷ـ۹) یک مقدار منفی به‌دست می‌دهد، که نشان می‌دهد سطح حاوی یک بار خالص منفی است (که همین‌طور هم هست). تعداد خطهای نیرویی که به سطح وارد می‌شود بیشتر از تعدادی است که از سطح خارج می‌شود.

سطح $S_۳$ حاوی هیچ‌گونه باری نیست، بنابراین طبق قانون گاؤس شار کل عبوری از آن باید صفر باشد. این مطلب با شکل ۲۷ـ۶ هم‌سازگاری دارد، که نشان می‌دهد همان تعداد خط نیرو که از بالای شکل به سطح وارد می‌شود از پایین شکل از سطح خارج می‌شود.



شکل ۲۷ـ۷ یک سطح گاؤسی کروی که یک بار نقطه‌ای مثبت q را احاطه کرده است.

این رفتار تصادفی نیست، می‌توانید در شکل ۲۷ـ۶ یک سطح با هر شکل نامنظمی که بخواهید رسم کنید، و تا زمانی که هیچ‌یک از بارها را در برنگیرد، تعداد خطهای میدانی که به آن وارد می‌شود برابر با تعداد خطهایی است که از آن خارج می‌شود.

سطح $S_۴$ نیز حاوی هیچ بار خالصی نیست، و زیرا فرض کرده‌ایم که بارها از لحاظ اندازه با هم برابر باشند. در اینجا هم، کل شاری که از این سطح می‌گذرد باید برابر با صفر باشد. برخی از خطهای میدان کاملاً در داخل سطح بسته قرار دارند و در نتیجه در شاری که از سطح می‌گذرد سهمی ندارند. ولی، چون هر خط میدانی که بار مثبت را ترک می‌کند سرانجام به بار منفی ختم می‌شود، به‌ازای هر خطی که از بار مثبت به خارج سطح می‌رود یک خط متناظر وجود دارد که در جستجوی بار منفی به سطح وارد می‌شود. بنابراین شار کل برای هر سطح بسته صفر است.

قانون گاؤس و قانون کولن

قانون کولن را می‌توان از قانون گاؤس و ملاحظات مربوط به تقارن استنتاج کرد. برای این کار، قانون گاؤس را در مورد یک بار مثبت نقطه‌ای منزوی q مانند شکل ۲۷ـ۷، به‌کار می‌بندیم. با آنکه قانون گاؤس برای هر سطحی صادق است، یک سطح کروی به شعاع r را که مرکزش بر بار مثبت قرار دارد انتخاب می‌کنیم. مزیت این سطح آن است که، به علت تقارن، $\vec{\mathbf{E}}$ باید بر سطح عمود باشد، به‌طوری که زاویهٔ بین $\vec{\mathbf{E}}$ و $d\vec{\mathbf{A}}$، یعنی θ، همه جا روی سطح برابر صفر است. علاوه بر آن $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا روی سطح ثابت است. درنظرگرفتن یک سطح گاؤسی که از چنین تقارنی بهره‌مند باشد، در کاربرد قانون گاؤس از اهمیتی اساسی برخوردار است.

در شکل ۲۷ـ۷ هم $\vec{\mathbf{E}}$ و هم $d\vec{\mathbf{A}}$ در هر نقطه‌ای از سطح گاؤسی به‌صورت شعاعی و به طرف خارج‌اند، به‌طوری که کمیت $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}$ به‌سادگی به $E\,dA$ تبدیل می‌شود. به این ترتیب قانون گاؤس (معادلهٔ ۲۷ـ۹) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_\circ \oint E\,dA = q$$

چون E برای تمام نقاط روی سطح کره ثابت است، می‌توان آن را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد، که نتیجه می‌دهد

$$\epsilon_\circ E \oint dA = q$$

بخش انتگرال عبارت بالا در واقع مساحت کل رویهٔ کروی، یعنی $۴\pi r^۲$، است. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\epsilon_\circ E(۴\pi r^۲) = q$$

یا

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_\circ}\frac{q}{r^۲} \qquad (۲۷\text{ـ}۱۰)$$

معادلهٔ (۲۷ـ۱۰) بزرگی میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ را در هر نقطه‌ای به فاصلهٔ r از یک بار نقطه‌ای منزوی q به‌دست می‌دهد و با معادلهٔ (۲۷ـ۶)، که از قانون کولن به‌دست آمده، یکسان است. به این ترتیب، با انتخاب یک سطح گاؤسی با تقارن مناسب، قانون کولن را از قانون گاؤس به‌دست می‌آوریم. برای کاربردهای مورد نظر ما، می‌توانیم این دو قانون را هم‌ارز در نظر بگیریم، ولی (همان‌طور که در بخش ۲۷ـ۱ مطرح کردیم) قانون گاؤس کاربردی عمومیتر دارد و در نتیجه آن را به‌عنوان معادلهٔ بنیادی‌تر نظریهٔ الکترومغناطیس مورد توجه قرار می‌دهیم.

توجه به این نکته که نوشتن ضریب تناسب قانون کولن به‌صورت $(۱/۴\pi\epsilon_\circ)$ شکل ساده‌تری از قانون گاؤس را ارائه می‌دهد، جالب است. اگر ثابت قانون کولن را فقط به‌صورت K نوشته بودیم، قانون گاؤس را باید به‌صورت $(۱/۴\pi K)\Phi_E = q$ می‌نوشتیم. ترجیح می‌دهیم که از ضریب ۴π در قانون کولن استفاده کنیم، تا این ضریب در قانون گاؤس یا در دیگر روابطی که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرند و بعداً آنها را به‌دست می‌آوریم ظاهر نشود.

۲۷ـ۵ کاربردهای قانون گاؤس

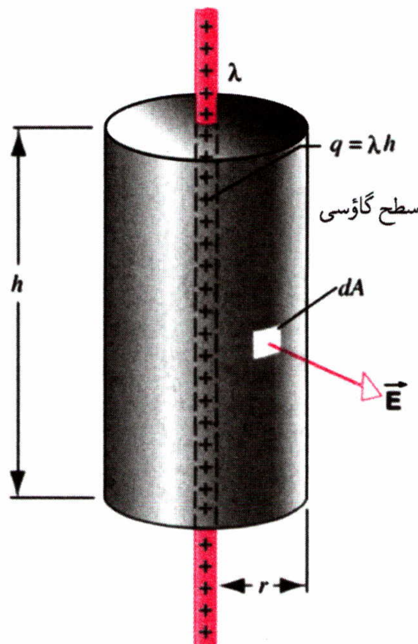
اگر تقارن توزیع بار الکتریکی بسیار زیاد باشد می‌توانیم از قانون گاؤس برای محاسبهٔ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ استفاده کنیم. مثالی از این نوع محاسبات را قبلاً در ارتباط با معادلهٔ (۲۷ـ۱۰)، برای میدان یک بار نقطه‌ای بررسی کردیم. در اینجا مثالهای دیگری را ارائه می‌دهیم.

خط نامتناهی بار

شکل ۲۷ـ۸ بخشی از یک خط نامتناهی بار با چگالی خطی بار ثابت (بار بر واحد طول) λ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در فاصلهٔ r از این خط معین کنیم.

در بخش ۲۶ـ۴ استدلالهای مبتنی بر تقارن به این نتیجه انجامید که در این مورد میدان الکتریکی فقط می‌تواند مؤلفهٔ شعاعی داشته باشد. بنابراین مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است و به همین دلیل یک استوانه با قاعدهٔ دایره‌ای به شعاع r و ارتفاع h را، که دو قاعدهٔ آن با دو کلاهک تخت عمود بر محور بسته شده است، به‌عنوان سطح گاؤسی اختیار می‌کنیم. بزرگی میدان E روی این سطح استوانه‌ای ثابت و جهتش عمود بر سطح جانبی است. شار $\vec{\mathbf{E}}$ که از این سطح می‌گذرد برابر است با $E(۲\pi rh)$، که در اینجا $۲\pi rh$ مساحت سطح جانبی استوانه است. از دو قاعدهٔ دایره‌ای هیچ شاری عبور نمی‌کند زیرا در اینجا $\vec{\mathbf{E}}$ در تمام نقاط با دو سطح موازی است، به‌طوری که برای همهٔ نقاط روی دو قاعده $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = ۰$ است.

بار q که سطح گاؤسی شکل ۲۷ـ۸ را در برمی‌گیرد برابر λh است. در نتیجه، از قانون گاؤس (معادلهٔ ۲۷ـ۹) داریم



شکل ۲۷ـ۸ یک سطح گاؤسی به شکل یک استوانهٔ بسته بخشی از یک خط بار نامتناهی با بار مثبت را در برگرفته است.

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q$$

$$\epsilon_\circ E(\text{۲}\pi rh) = \lambda h$$

یا

$$E = \frac{\lambda}{\text{۲}\pi\epsilon_\circ r} \qquad (\text{۱۱ـ۲۷})$$

که این نتیجه با معادلهٔ (۲۶ـ۱۷) سازگار است.

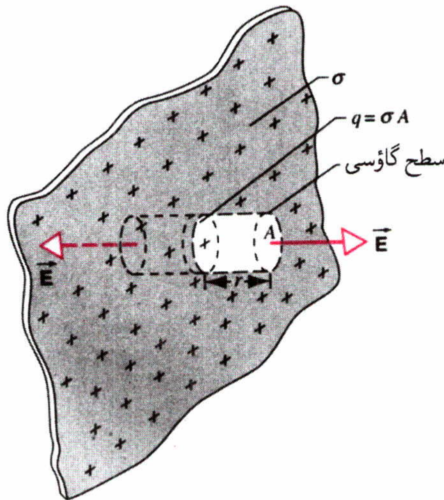
توجه کنید که با استفاده از قانون گاؤس حل مسئله چقدر نسبت به کاربرد روشهای انتگرال‌گیری فصل ۲۶ ساده‌تر می‌شود. همچنین توجه کنید که کاربرد قانون گاؤس تنها درصورتی امکان‌پذیر است که سطح گاؤسی را چنان انتخاب کنیم که از تقارن استوانه‌ای میدان الکتریکی حاصل از یک خط طویل بار حداکثر استفاده بشود. ما در انتخاب هر سطح بسته‌ای، مانند مکعب یا کره، به‌عنوان یک سطح گاؤسی آزادیم (نگاه کنید به تمرین ۲۴). ولی با آنکه قانون گاؤس برای این سطوح معتبر است، آنها در حل مسئلهٔ مورد نظر ما مفید و مؤثر نیستند؛ تنها سطح استوانه‌ای شکل ۲۷ـ۸ برای این مورد خاص مناسب است.

قانون گاؤس دارای این ویژگی است که روش مؤثری را برای محاسبهٔ میدان در مسئله‌هایی که دارای درجه‌های معینی از تقارن هستند فراهم می‌آورد. در این مسئله‌ها راه‌حلها خیلی ساده می‌شوند.

برگهٔ نامتناهی از بار

شکل ۲۷ـ۹ بخشی از یک برگهٔ نازک نارسانا و نامتناهی با بار مثبت را نشان می‌دهد، که در آن چگالی سطحی بار σ (بار بر واحد سطح) ثابت و مثبت است. میدان الکتریکی را در نقاطی نزدیک به این برگه محاسبه می‌کنیم.

یک سطح گاؤسی مناسب برای این حالت یک استوانهٔ بسته با سطح مقطع A است و طوری قرارگرفته است که این برگه را به‌صورتی که در شکل نشان داده‌ایم سوراخ می‌کند. از تقارن، نتیجه می‌گیریم که میدان $\vec{\mathbf{E}}$ باید بر سطح دو قاعدهٔ استوانه عمود و جهت آن به سمت خارج از برگه باشد. چون میدان $\vec{\mathbf{E}}$ دیوارهٔ جانبی استوانه را سوراخ نمی‌کند، در نتیجه سطح جانبی استوانه هیچ سهمی در شار الکتریکی عبوری از این سطح گاؤسی ندارد. فرض می‌کنیم که دو کلاهک استوانه در فاصلهٔ مساوی از برگهٔ باردار قرار داشته باشند و باز هم با توجه به تقارن درمی‌یابیم که میدان در موقعیت دو کلاهک استوانه باید اندازهٔ یکسانی داشته باشد. شاری که از هر یک از دو کلاهک می‌گذرد برابر



شکل ۲۷ـ۹ یک سطح گاؤسی به شکل یک استوانهٔ بستهٔ کوچک با بخش کوچکی از یک برگهٔ دارای بار مثبت تلاقی می‌کند. میدان الکتریکی بر برگهٔ باردار عمود است و در نتیجه تنها کلاهکهای این سطح گاؤسی در شار عبوری سهیم‌اند.

با EA است و برای هر دو کلاهک مثبت است. از قانون گاؤس داریم

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q$$

$$\epsilon_\circ (EA + EA) = \sigma A$$

که در این رابطه σA مقدار بار احاطه‌شده توسط این سطح گاؤسی است. از حل معادله برحسب E، می‌رسیم به

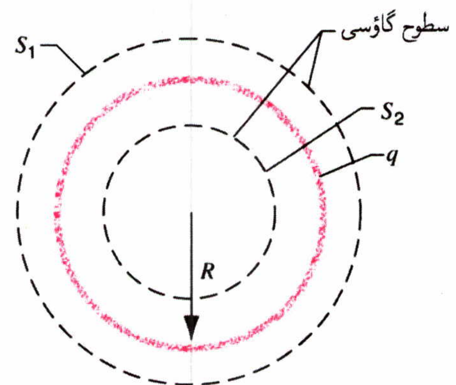
$$E = \frac{\sigma}{\text{۲}\epsilon_\circ} \qquad (\text{۱۲ـ۲۷})$$

توجه کنید که E برای تمام نقاط واقع در دو طرف برگهٔ باردار یکسان است.

گرچه، به لحاظ فیزیکی یک برگهٔ باردار نامتناهی نمی‌تواند وجود داشته باشد، این نتیجه‌گیری هنوز هم مفید است، چرا که معادلهٔ (۲۷ـ۱۲) به‌طور تقریبی نتیجه‌های درستی را برای یک برگهٔ باردار واقعی (نه نامتناهی) به‌دست می‌دهد، تنها باید توجه داشت که نقاط مورد نظر از لبه‌ها خیلی دور باشند و فاصلهٔ آنها تا برگهٔ باردار در قیاس با ابعاد برگه کوچک باشد. در واقع، معادلهٔ (۲۷ـ۱۲) با معادلهٔ (۲۶ـ۲۰)، که برای نقاط نزدیک به یک قرص باردار دایره‌ای به‌دست آورده بودیم، همخوانی دارد.

پوستهٔ کروی بار

در بخش ۲۵ـ۵ از شباهت بین نیروهای الکتروستاتیک و گرانش استفاده کردیم تا دو ویژگی نیروهای اعمال‌شده توسط پوسته‌های یکنواخت باردارشده کروی را معین کنیم. سپس، در بخش ۲۶ـ۴ از آن ویژگیهای



شکل ۲۷ـ۱۰ مقطع یک پوستهٔ نازک با توزیع بار یکنواخت و بار کل q. پوستهٔ باردار را با دو سطح گاؤسی کروی بسته احاطه کرده‌ایم، یکی از این دو سطح در داخل پوسته و سطح دیگر در خارج پوسته قرار دارد.

نیروی الکتروستاتیک برای به‌دست‌آوردن میدان الکتریکی ناشی از یک پوستهٔ یکنواخت باردارشدهٔ کروی، در نقاط داخلی و خارجی پوسته استفاده کردیم.

می‌توانیم دو قضیهٔ پوسته را برای میدانهای الکتریکی به شرح زیر خلاصه کنیم:

۱. برای نقاط خارجی، یک پوستهٔ کروی با توزیع بار یکنواخت چنان عمل می‌کند که گویی تمام بار آن در مرکزش متمرکز شده است.

۲. یک پوستهٔ کروی با توزیع بار یکنواخت هیچ نیروی الکتروستاتیکی به ذرهٔ بارداری که در داخل پوسته قرار گرفته است وارد نمی‌کند.

بررسی می‌کنیم که چگونه قانون گاؤس محاسبهٔ میدان الکتریکی و اثبات دو قضیه را در این حالت بسیار متقارن ساده می‌کند. شکل ۲۷ـ۱۰ یک پوستهٔ نازک کروی را نشان می‌دهد که بار q به‌طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. پوسته به‌وسیلهٔ دو سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز S_1 و S_2 احاطه شده است. از استدلال مبتنی بر تقارن، نتیجه می‌گیریم که میدان تنها می‌تواند مؤلفه‌های شعاعی، E_r، داشته باشد. (فرض می‌کنیم که مؤلفه‌های غیرشعاعی نیز وجود داشته باشند و تصور می‌کنیم که وقتی سرتان را برگرداندید شخصی این پوسته را حول یکی از قطرهایش تحت زاویه‌ای چرخانده است. وقتی دوباره به پوسته نگاه کنید، با یک کاوهٔ میدان الکتریکی، مثلاً یک بار آزمون، می‌توانید بفهمید که میدان الکتریکی تغییر جهت داده است، با آنکه توزیع بار همانند قبل از چرخش است. بدیهی است که در اینجا تناقضی وجود دارد. آیا اگر توزیع بار روی سطح یکنواخت نبود این استدلال مبتنی بر تقارن معتبر بود؟) قانون گاؤس را برای سطح S_1 به‌کار می‌بریم، که برای آن $r > R$ و داریم

$$\epsilon_0 E_r (4\pi r^2) = q$$

یا

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (\text{پوستهٔ کروی، } r > R) \qquad (۲۷\text{ـ}۱۳)$$

که درست مانند مورد مربوط به شکل ۲۷ـ۷ است. به این ترتیب یک پوستهٔ باردار یکنواخت برای تمام نقاط خارجی پوسته همانند یک بار نقطه‌ای رفتار می‌کند. به این ترتیب قضیهٔ اول پوسته اثبات می‌شود.

استفاده از قانون گاؤس برای سطح S_2، که برای آن $r < R$ است، مستقیماً نتیجه می‌دهد که

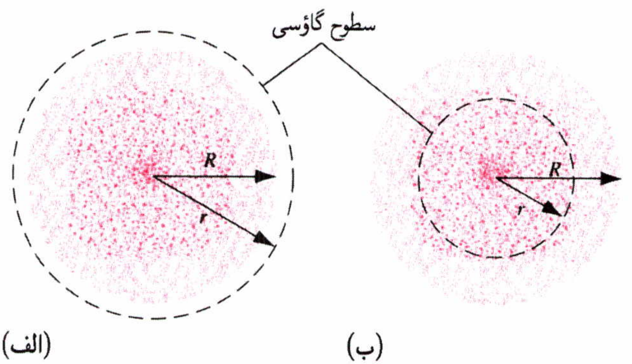
$$E_r = 0 \qquad (\text{پوستهٔ کروی، } r < R) \qquad (۲۷\text{ـ}۱۴)$$

زیرا سطح گاؤسی حاوی هیچ‌گونه باری نیست و E_r (بنابر یک استدلال مبتنی بر تقارن دیگر) در همه جا روی این سطح مقدار یکسانی دارد. بنابراین میدان الکتریکی در داخل یک پوستهٔ باردار یکنواخت در همه جا صفر است؛ بر بار آزمونی که در هر جای داخل یک پوستهٔ باردار قرارگیرد هیچ نیروی الکتریکی وارد نمی‌شود. به این ترتیب قضیهٔ دوم پوسته نیز اثبات می‌شود.

این دو قضیه فقط در مورد یک پوسته که به‌طور یکنواخت باردار شده است به‌کار می‌رود. اگر بارها به‌صورت نایکنواخت روی پوسته پاشیده شوند، به‌طوری که چگالی بار روی سطح ثابت نباشد، این دو قضیه صادق نیستند. تقارن از بین می‌رود و در نتیجه نمی‌توان $\vec{\mathbf{E}}$ را در قانون گاؤس از زیر علامت انتگرال بیرون آورد. باز هم شار برای نقطه‌های خارجی برابر با q/ϵ_0 و برای نقطه‌های داخلی برابر با صفر باقی می‌ماند، ولی نمی‌توان ارتباط مستقیمی بین شار و $\vec{\mathbf{E}}$، مانند آنچه در مورد توزیع یکنواخت وجود دارد، برقرار کرد. برخلاف مورد پوستهٔ باردار یکنواخت، میدان در تمام نقاط داخلی صفر نخواهد بود.

توزیع بار با تقارن کروی

شکل ۲۷ـ۱۱ مقطع یک توزیع بار کروی به شعاع R را نشان می‌دهد. در اینجا بار در سرتاسر حجم کره توزیع شده است. فرض نمی‌کنیم که چگالی حجمی بار ρ (مقدار بار بر واحد حجم) ثابت است؛ ولی این محدودیت



شکل ۲۷ـ۱۱ مقطع یک توزیع بار با تقارن کروی، که با فرض نارسانا بودن ماده، چگالی حجمی بار می‌تواند برحسب شعاع r تغییر کند. در این شکل سطوح گاؤسی کروی بسته (الف) در خارج از توزیع بار و (ب) در داخل توزیع بار رسم شده است.

را قائل می‌شویم که ρ در هر نقطه تنها به فاصلهٔ آن نقطه از مرکز کره بستگی دارد، حالتی که آن را تقارن کروی می‌خوانیم. یعنی، ρ می‌تواند تابع r باشد، ولی تابع هیچ مختصهٔ زاویه‌ای نیست. اکنون می‌خواهیم برای میدان الکتریکی E در نقاط خارجی (شکل ۲۷ـ۱۱(الف)) و داخلی (شکل ۲۷ـ۱۱(ب)) عبارتی برای توزیع بار به‌دست آوریم.

هر توزیع بار متقارن کروی، مانند شکل ۲۷ـ۱۱ را می‌توان، به‌صورت مجموعه‌ای از پوسته‌های نازک هم‌مرکز در نظر گرفت. چگالی حجمی ρ ممکن است از یک پوسته به پوستهٔ دیگر تغییر کند، ولی پوسته‌ها را چنان نازک انتخاب می‌کنیم که بتوانیم روی هر پوسته مشخص، چگالی ρ را یکنواخت فرض کنیم. می‌توانیم با استفاده از نتیجه‌های زیربخش قبلی سهم هر پوسته را در میدان الکتریکی کل به‌دست آوریم. میدان الکتریکی هر یک از این پوسته‌های نازک تنها دارای مؤلفهٔ شعاعی است و به این ترتیب میدان الکتریکی کل کره تنها می‌تواند مؤلفهٔ شعاعی داشته باشد. (این نتیجه را می‌شد از استدلال مبتنی بر تقارن هم به‌دست آورد ولی اگر توزیع بار فاقد تقارن کروی باشد، یعنی اگر ρ تابع جهت باشد، این استدلال معتبر نیست.)

می‌خواهیم مؤلفهٔ شعاعی میدان الکتریکی را در نقطه‌هایی محاسبه کنیم که در فاصلهٔ r بزرگتر از شعاع کرهٔ R، در شکل ۲۷ـ۱۱(الف)، قرار دارند. هر پوستهٔ هم‌مرکز با بار dq، به اندازهٔ dE_r در مؤلفهٔ شعاعی میدان الکتریکی طبق معادلهٔ (۲۷ـ۱۳) سهیم است. میدان الکتریکی کل مجموع تمام این مؤلفه‌هاست و چون همهٔ مؤلفه‌های میدان شعاعی هستند، تنها باید جمع جبری و نه جمع برداری این مؤلفه‌ها را محاسبه کنیم. در این‌صورت جمع روی همهٔ پوسته‌ها نتیجه می‌دهد

$$E_r = \int dE_r = \int \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \frac{dq}{r^۲}$$

یا، چون r ثابت است انتگرال روی q انجام می‌شود

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \frac{q}{r^۲} \qquad (۲۷\text{ـ}۱۵)$$

که در آن q کل بار موجود در کره است. به این ترتیب برای نقطه‌هایی که خارج از یک توزیع بار متقارن کروی قرار گرفته‌اند، میدان الکتریکی E دارای مقداری است که گویی تمام بار در مرکز کره متمرکز شده است. این نتیجه مانند نتیجه‌ای است که در بخش ۱۴ـ۵ برای میدان گرانشی به‌دست آوردیم. هر دو نتیجه پیامد سرشت عکس مجذوری قانونهای نیروی مربوط به آنهاست.

اکنون میدان الکتریکی را در نقاط داخلی این توزیع بار بررسی می‌کنیم. شکل ۲۷ـ۱۱(ب) یک سطح گاؤسی کروی به شعاع $r < R$ را نشان می‌دهد. از قانون گاؤس می‌دانیم

$$\epsilon_۰ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_۰ E_r(۴\pi r^۲) = q'$$

یا

$$E_r = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰} \frac{q'}{r^۲} \qquad (۲۷\text{ـ}۱۶)$$

که در این رابطه q' بخشی از بار q است که در داخل کره به شعاع r قرار دارد. بنابر قضیهٔ دوم پوسته، آن بخش از بار q که خارج از این کره قرار می‌گیرد هیچ سهمی در میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در شعاع r ندارد.

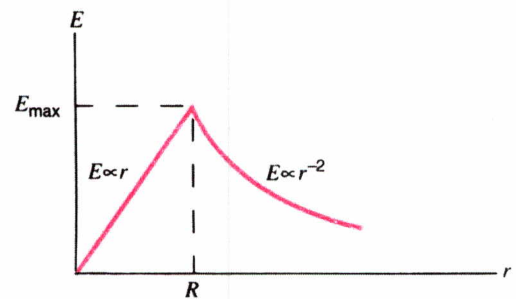
برای ادامهٔ این محاسبه، باید مقدار بار q' را که در داخل شعاع r قرار دارد بدانیم؛ یعنی باید چگالی $\rho(r)$ را بدانیم. مورد ویژه‌ای را درنظر می‌گیریم که در آن کره به‌طور یکنواخت باردار شده است؛ به‌طوری که چگالی بار ρ برای تمام نقاط واقع در داخل کره به شعاع R یکسان، و برای نقاط خارج از این کره صفر است. برای نقاط واقع در داخل این کرهٔ یکنواخت‌باردارشده، کسری از بار که در داخل شعاع r قرارگرفته برابر کسر حجمی است که در داخل شعاع r قرار دارد و در نتیجه

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}$$

یا

$$q' = q\left(\frac{r}{R}\right)^۳$$

که در معادلهٔ بالا $(۴/۳)\pi R^۳$ حجم کره‌ای است که بار الکتریکی در آن توزیع شده است. در این حالت عبارت مربوط به میدان الکتریکی



شکل ۲۷ـ۱۲ تغییرات میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار کروی یکنواخت به شعاع R برحسب فاصله. تغییرات مربوط به ناحیهٔ $r > R$ در مورد هر توزیع بار متقارن کروی به‌کار می‌رود، در حالی‌که تغییرات مربوط به ناحیهٔ $r < R$ فقط برای توزیع یکنواخت بار صادق است.

E_r چنین می‌شود

$$E_r = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{qr}{R^۳} \quad (r < R \text{، کره با بار یکنواخت}) \qquad (۲۷\text{ـ}۱۷)$$

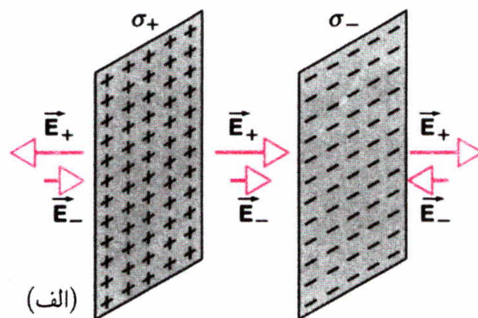
که با معادلهٔ (۲۶ـ۲۴) سازگار است. این معادله همان‌طور که باید، به‌ازای $r = ۰$ برابر صفر می‌شود. معادلهٔ (۲۷ـ۱۷) فقط در صورتی به‌کار می‌رود که چگالی بار یکنواخت و مستقل از r باشد. توجه کنید که معادله‌های (۲۷ـ۱۵) و (۲۷ـ۱۷)، همان‌طور که باید، برای نقاط واقع بر سطح کره‌ای که بار در آن توزیع شده است (یعنی، برای $r = R$) نتیجه‌های یکسانی را به‌دست می‌دهند. شکل ۲۷ـ۱۲ میدان الکتریکی را برای نقاطی که در آنها $r < R$ معادلهٔ (۲۷ـ۱۷) و برای نقطه‌هایی که در آنها $r > R$ معادلهٔ (۲۷ـ۱۵) است، نشان می‌دهد.

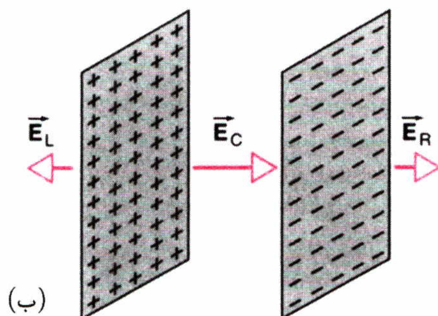
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ شکل ۲۷ـ۱۳ (الف) بخشهایی از دو برگهٔ بزرگ حامل بار با چگالی سطحی بار یکنواخت $\sigma_+ = +۶{,}۸\mu\text{C/m}^۲$ و $\sigma_- = -۴{,}۳\mu\text{C/m}^۲$ را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ را در طرف چپ برگه‌ها، بین دو برگه، و در طرف راست برگه‌ها محاسبه کنید.

حل. راهبرد ما این است که هر برگه را جداگانه در نظر بگیریم و سپس با افزودن میدانهای الکتریکی حاصل از هر کدام از برگه‌ها با استفاده از اصل برهم‌نهی، میدان الکتریکی کل را به‌دست آوریم. از معادلهٔ (۲۷ـ۱۲)، برای برگهٔ با بار مثبت، داریم

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{۲\epsilon_۰} = \frac{۶{,}۸ \times ۱۰^{-۶}\text{C/m}^۲}{(۲)(۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)}$$

$$= ۳{,}۸۴ \times ۱۰^۵\text{N/C}$$





شکل ۲۷ـ۱۳ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳. (الف) دو برگهٔ بزرگ موازی که حامل توزیع بارهای متفاوت σ_+ و σ_- هستند. اگر هر کدام از این دو برگه وجود نداشت، برگهٔ دیگر میدانهای $\vec{\mathbf{E}}_+$ و $\vec{\mathbf{E}}_-$ را ایجاد می‌کرد. (ب) میدان کل در نواحی نزدیک به چپ (L)، مرکز (C)، و راست (R) برگه‌های موازی، از جمع برداری $\vec{\mathbf{E}}_+$ و $\vec{\mathbf{E}}_-$ در این نواحی محاسبه شده است.

به‌طور مشابه، شدت میدان برای برگهٔ با بار منفی برابر است با

$$E_- = \frac{|\sigma_-|}{۲\epsilon_۰} = \frac{۴{,}۳ \times ۱۰^{-۶}\text{C/m}^۲}{(۲)(۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)}$$

$$= ۲{,}۴۳ \times ۱۰^۵\text{N/C}$$

شکل ۲۷ـ۱۳ (الف) میدانهای محاسبه‌شده در بالا را در طرف چپ، وسط، و طرف راست دو برگه نشان می‌دهد.

میدانهای برایند در این سه ناحیه از جمع برداری $\vec{\mathbf{E}}_+$ و $\vec{\mathbf{E}}_-$ به‌دست می‌آیند. در طرف چپ این برگه‌ها (با این فرض که مؤلفه‌های $\vec{\mathbf{E}}$ در شکل ۲۷ـ۱۳، اگر جهت $\vec{\mathbf{E}}$ به سمت راست باشد مثبت، و هرگاه به طرف چپ باشد منفی است)، داریم

$$E_\text{L} = -E_+ + E_- = -۳{,}۸۴ \times ۱۰^۵\text{N/C} + ۲{,}۴۳ \times ۱۰^۵\text{N/C}$$

$$= -۱{,}۴ \times ۱۰^۵\text{N/C}$$

در اینجا، همان‌طور که شکل ۲۷ـ۱۳ (ب) نشان می‌دهد، میدان الکتریکی برایند (منفی) به طرف چپ است. در طرف راست دو

برگه، میدان الکتریکی برایند دارای همین بزرگی است و جهت آن در شکل ۲۷ـ۱۳(ب) به طرف راست است.

بین این دو برگه، میدانهای ناشی از دو برگه با هم جمع می‌شوند و نتیجه می‌دهند

$$E_C = -E_+ + E_- = ۳٫۸۴ \times ۱۰^۵ \mathrm{N/C} + ۲٫۴۳ \times ۱۰^۵ \mathrm{N/C}$$
$$= ۶٫۳ \times ۱۰^۵ \mathrm{N/C}$$

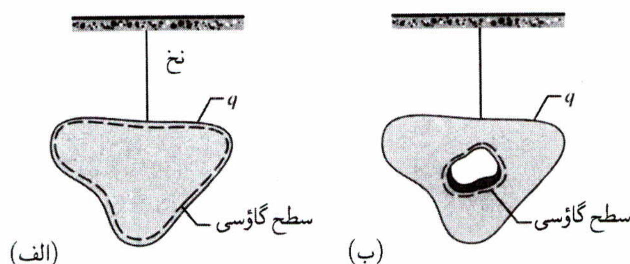
خارج از این دو برگه، میدان الکتریکی رفتاری چون میدان الکتریکی ناشی از یک برگهٔ باردار با چگالی بار سطحی $\sigma_+ + \sigma_-$ یا $+۲٫۵ \times ۱۰^{-۶} \mathrm{C/m^۲}$ دارد. طرح میدان شکل ۲۷ـ۱۳(ب) این موضوع را نشان می‌دهد. در تمرینهای ۱۴ و ۱۵ می‌توانید مواردی را بررسی کنید که در آنها چگالی بارهای سطحی از لحاظ مقداری برابر ولی از نظر علامت متفاوت‌اند و نیز مواردی که هم از لحاظ علامت و هم از نظر مقدار با هم برابرند.

۲۷ـ۶ قانون گاؤس و رساناها

دیدیم که با استفاده از قانون گاؤس می‌توانیم میدان الکتریکی مربوط به چندین توزیع بار بسیار متقارن را پیدا کنیم. همچنین می‌توانیم از قانون گاؤس در تعیین خواص رساناهایی که حامل بار الکتریکی خالصی هستند استفاده کنیم. یکی از این خاصیتها چنین است:

> هر بار اضافی که روی یک رسانای منزوی قرار داده شود به‌طور کامل به سطح خارجی رسانا می‌رود. هیچ بار اضافی را نمی‌توان در داخل جسم رسانا یافت.

در اینجا وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن مقداری بار الکتریکی روی یک رسانای منزوی قرار داده‌ایم. می‌خواهیم ببینیم چه اتفاقی خواهد افتاد. به‌طور اصولی این بارها را می‌توان در هر جایی از رسانا تخلیه کرد، حتی خیلی عمیق در داخل آن جسم. در ابتدا، به علت وجود بارهای اضافی، در داخل رسانا میدان الکتریکی ایجاد می‌شود. این میدان الکتریکی سبب اعمال نیروهایی بر بارها می‌شود که در نتیجهٔ آن بارهای الکتریکی توزیع دوباره‌ای به خود می‌گیرند. خیلی سریع (در محدودهٔ $۱۰^{-۹}$ ثانیه) میدان الکتریکی صفر می‌شود، و بارها از حرکت می‌ایستند. این وضعیت را تعادل الکتروستاتیکی می‌خوانیم. اگر میدان در داخل رسانا غیرصفر بود، الکترونهای رسانش در داخل فلز تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گرفتند، و حرکت بارها (به‌صورت جریان الکتریکی)



شکل ۲۷ـ۱۴ (الف) یک رسانای منزوی فلزی که حامل بار q است از یک رشته نخ آویخته شده است. یک سطح گاؤسی درست زیر سطح خارجی رسانا رسم کرده‌ایم. (ب) یک کاواک داخلی در رسانا را سطح گاؤسی دیگری در برگرفته است.

مشاهده می‌شد. چون چنین جریانهایی را مشاهده نمی‌کنیم، نتیجه می‌گیریم که میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است.

توجه داشته باشید که در اینجا فقط یک رسانای "منزوی" را در نظر گرفته‌ایم، یعنی رسانایی که تحت تأثیر هیچ عامل خارجی قرار ندارد. یک سیم حامل جریان را نمی‌توان رسانای منزوی پنداشت، زیرا باید به یک چشمهٔ خارجی مثل باتری متصل باشد. میدان الکتریکی در چنین سیمی صفر نیست، سیم در تعادل الکتروستاتیکی قرار ندارد، و نتیجه‌های این بخش در مورد آن صادق نیست.

اگر بپذیریم که در شرایط الکتروستاتیکی میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، آنگاه قانون گاؤس مستقیماً نتیجه می‌دهد که بارهای موجود در رسانا باید روی سطح خارجی آن مستقر شوند. شکل ۲۷ـ۱۴(الف) رسانایی با یک شکل دلخواه را نشان می‌دهد، شاید یک کلوخهٔ مسی، که حامل بار خالص q است و از یک رشته نخ نارسانا آویخته شده است. یک سطح گاؤسی را درست در زیر سطح خارجی رسانا رسم کرده‌ایم.

اگر میدان الکتریکی در همه جا در داخل رسانا صفر باشد، این میدان در همه جا روی سطح گاؤسی مورد نظر ما، که به‌طور کامل در داخل رسانا قرار گرفته است، نیز صفر خواهد بود. این عبارت به آن معنی است که شار گذرنده از سطوح گاؤسی صفر است. از قانون گاؤس چنین نتیجه می‌گیریم که بار خالص در برگرفته‌شده به‌وسیلهٔ سطح گاؤسی باید صفر باشد. اگر هیچ باری در داخل سطح گاؤسی وجود ندارد، پس باید در خارج آن قرار داشته باشد، یعنی اینکه بار باید روی سطح واقعاً خارجی رسانا قرار داشته باشد.

چرا باید میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر باشد؟ تصور کنید که می‌توانستیم بارها را به‌گونه‌ای روی سطح رسانا "ثابت" نگه داریم، شاید با کاشتن آنها در داخل یک اندود پلاستیکی نازک، سپس این رسانا را به‌طور کامل از داخل اندود خارج می‌کردیم، و فقط پوستهٔ

نازک باردار را به‌جا می‌گذاشتیم. میدان الکتریکی به هیچ‌وجه تغییر نمی‌کرد ـــ در همه جا در داخل پوسته همچنان صفر باقی می‌ماند. این نشان می‌دهد که میدان الکتریکی به‌وسیلهٔ بارها ایجاد می‌شود و نه به‌وسیلهٔ رسانا. رسانا تنها مسیری را فراهم می‌آورد که بارها بتوانند به‌آسانی حرکت کنند و در مکانهایی قرار گیرند به‌طوری که در داخل رسانا میدان الکتریکی خالص صفر را ایجاد کنند.

بار الکتریکی روی سطحهای داخلی

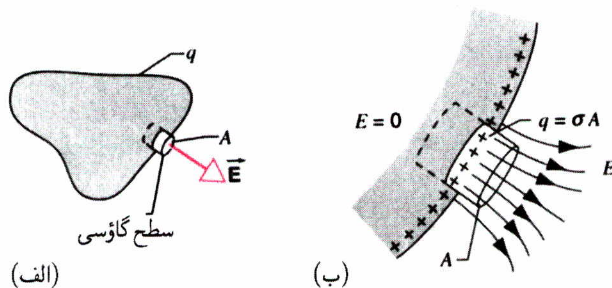
تا اینجا بار الکتریکی موجود روی سطح خارجی یک رسانای توپر را مورد بررسی قرار دادیم. تصور کنید رسانا دارای یک کاواک داخلی است (شکل ۲۷ـ۱۴(ب)). آیا بار روی سطح این کاواک نیز پدیدار می‌شود؟ منطقی است تصور کنیم که در آوردن یک مادهٔ به لحاظ الکتریکی خنثی برای ایجاد کاواک نباید توزیع بار روی سطح خارجی یا میدان الکتریکی داخل رسانا را تغییر دهد. برای اثبات کمّی این موضوع می‌توانیم از قانون گاؤس استفاده کنیم.

یک سطح گاؤسی که کاواک را احاطه کند، خیلی نزدیک به دیوارهٔ کاواک ولی در داخل جسم رسانا، مطابق شکل ۲۷ـ۱۴(ب)، رسم می‌کنیم. چون در داخل جسم رسانا در همه جا $\vec{\mathbf{E}} = 0$، هیچ شار الکتریکی از این سطح گاؤسی نمی‌گذرد، بنابراین، از قانون گاؤس، نتیجه می‌گیریم که این سطح حاوی هیچ بار خالصی نیست، و از آن‌رو هیچ بار خالصی نمی‌تواند روی دیوارهٔ کاواک داخلی یک رسانای منزوی وجود داشته باشد.

اگر جسمی با بار الکتریکی q' در داخل کاواک قرار داده شود (به‌طوری که دیگر نتوان رسانا را یک رسانای منزوی در نظر گرفت)، باز هم قانون گاؤس ایجاب می‌کند که بار خالص موجود در داخل سطح گاؤسی صفر باشد. در این حالت، باید بار $-q'$ به سطح کاواک جذب شود تا باز هم بار خالص موجود در داخل سطح گاؤسی برابر با صفر شود. اگر رسانای خارجی در آغاز حامل بار خالص q باشد، در این‌صورت بار $q + q'$ روی سطح خارجی آن پدیدار می‌شود، به‌طوری که بار خالص موجود در جسم تغییر نکند.

میدان الکتریکی در خارج رسانا

گرچه بار اضافی روی رسانای منزوی به‌طور کامل به سطح می‌رود، این بار ـــ به‌جز برای رسانای کروی منزوی ـــ در حالت کلی به‌طور یکنواخت روی سطح توزیع نمی‌شود. به عبارت دیگر، چگالی سطحی بار σ (مساوی dq/dA) روی سطح از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند.



شکل ۲۷ـ۱۵ (الف) یک سطح گاؤسی کوچک روی سطح یک رسانای باردار قرار داده شده است. (ب) نمای بزرگ‌شده‌ای از این سطح گاؤسی، که حاوی بار q برابر با σA است.

می‌توان از قانون گاؤس برای یافتن رابطه‌ای بین چگالی سطحی بار σ در هر نقطه از سطح و میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ درست خارج از سطح در همان نقطه استفاده کرد. در شکل ۲۷ـ۱۵(الف) یک سطح گاؤسی استوانه‌ای‌شکل را نشان داده‌ایم که مساحت (کوچک) سطح دو قاعدهٔ آن برابر A است. هر دو قاعدهٔ استوانه موازی سطح خارجی جسم رسانا هستند، که یکی به‌طور کامل در داخل جسم رسانا قرار دارد و دیگری کاملاً در خارج آن است. دیواره‌های کوتاه استوانه بر سطح رسانا عمودند. نمای بزرگ‌شده‌ای از این سطح گاؤسی را در شکل ۲۷ـ۱۵(ب) نشان داده‌ایم.

میدان الکتریکی درست در بیرون یک رسانای باردار منزوی در حالت تعادل الکتروستاتیکی باید بر سطح رسانا عمود باشد. اگر چنین نباشد، میدان $\vec{\mathbf{E}}$ باید مؤلفه‌ای روی سطح رسانا داشته باشد و این مؤلفه جریانهای سطحی را ایجاد می‌کند که سبب توزیع مجدد بارهای سطحی می‌شود و در نتیجه فرض وجود تعادل الکتروستاتیکی را نقض می‌کند. بنابراین $\vec{\mathbf{E}}$ بر سطح رسانا عمود است و شاری که از قاعدهٔ بیرونی سطح گاؤسی شکل ۲۷ـ۱۵(ب) می‌گذرد برابر با EA است. شاری که از قاعدهٔ داخلی همین سطح گاؤسی می‌گذرد صفر است، زیرا برای تمام نقاط داخلی رسانا $\vec{\mathbf{E}} = 0$. شار عبوری از دیوارهٔ استوانه‌ای نیز صفر است زیرا خطوط $\vec{\mathbf{E}}$ با این قسمت از سطح گاؤسی موازی‌اند و در نتیجه نمی‌توانند در آن نفوذ کنند. بار احاطه‌شده توسط سطح گاؤسی یعنی q برابر با σA است.

در این حالت می‌توان شار کل را به‌صورت زیر محاسبه کرد

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

$$= \int_{\text{قاعدهٔ بیرونی}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_{\text{قاعدهٔ داخلی}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

$$+\int_{\text{سطح جانبی}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

$$= EA + \circ + \circ = EA$$

اکنون می‌توان با استفاده از قانون گاؤس میدان الکتریکی را معین کرد:

$$\epsilon_\circ \Phi_E = q$$

و با جایگزین‌کردن مقدارهای مربوط به شار و بار احاطه‌شدهٔ q (مساوی σA) می‌رسیم به

$$\epsilon_\circ EA = \sigma A$$

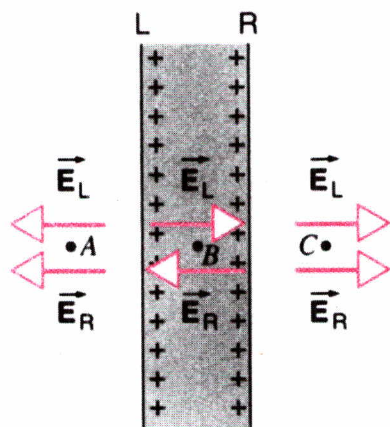
یا

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_\circ} \quad (۲۷\text{–}۱۸)$$

این نتیجه را با معادلهٔ (۲۷ـ۱۲) برای میدان الکتریکی در نزدیکی یک صفحهٔ باردار یعنی $E = \sigma/۲\epsilon_\circ$ مقایسه کنید. میدان الکتریکی در نزدیکی یک رسانا دو برابر میدانی است که برای رسانای به شکل یک برگهٔ باردار انتظار داریم، این مطلب حتی برای نقاط بسیار نزدیک به سطح رسانا، که محدودهٔ بلافصل آنها واقعاً مانند برگهٔ باردار به نظر می‌رسد واقعیت دارد. چگونه می‌توان تفاوت بین این دو مورد را فهمید؟

یک برگهٔ باردار می‌توان با افشاندن بار الکتریکی در یک طرف لایهٔ نازکی از پلاستیک تهیه کرد. بارها در محل فرود می‌چسبند و دیگر نمی‌توانند حرکت کنند. یک جسم رسانا را نمی‌توانیم به همین ترتیب باردار کنیم. می‌توانیم تصور کنیم که سطح رسانا به دو قسمت تقسیم شده باشد: ناحیهٔ نزدیک به محلی که می‌خواهیم میدان الکتریکی را در آنجا تعیین کنیم و بقیهٔ رسانا. اگر به‌قدرکافی به رسانا نزدیک باشیم (شکل ۲۷ـ۱۵)، ناحیهٔ نزدیک به سطح گاؤسی را می‌توانیم با یک برگهٔ باردار تقریب بزنیم، و سهم آن در میدان الکتریکی برابر با $E = \sigma/۲\epsilon_\circ$ است. ولی، می‌توان نشان داد که بار موجود روی بقیه رسانا هم به مقدار دقیقاً یکسانی در میدان الکتریکی سهیم است. در نتیجه، میدان الکتریکی کل برابر است با حاصل‌جمع دو سهم، یعنی $\sigma/\epsilon_\circ$.

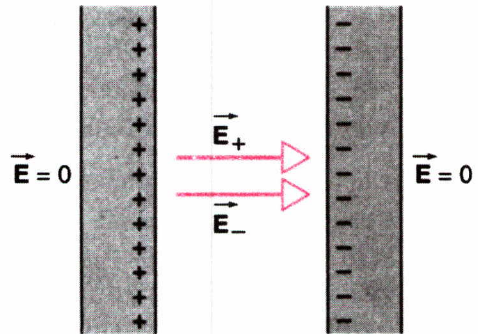
این موضوع را به مستقیم‌ترین وجه می‌توانیم در مورد یک ورق نازک رسانا مشاهده کنیم. ورقی به مساحت A را در نظر بگیرید. اگر بار q را در هر جای ورق بیفشانیم، بار خودش را روی هر دو سطح این ورق توزیع می‌کند (شکل ۲۷ـ۱۶). بنابراین انتظار داریم که روی هر کدام از دو سطح بار $q/۲$ داشته باشیم و از آن‌رو چگالی سطحی بار روی هر کدام از دو رویهٔ ورق برابر با $\sigma = q/۲A$ است. می‌توانیم هر کدام از دو رویهٔ



شکل ۲۷ـ۱۶ میدان الکتریکی در نزدیکی یک برگهٔ نازک رسانا. توجه کنید که بار روی هر دو سطح رسانا قرار گرفته است. میدانهای $\vec{\mathbf{E}}_L$ و $\vec{\mathbf{E}}_R$ که، به‌ترتیب، ناشی از بارهای رویهٔ سمت چپ و رویهٔ سمت راست رسانا هستند در نقاط A و C یکدیگر را تقویت ولی در نقاط داخل رسانا مانند B یکدیگر را خنثی می‌کنند.

ورق را به‌عنوان یک برگهٔ باردار در نظر بگیریم، که (بنابر معادلهٔ ۲۷ـ۱۲) میدان الکتریکی $E = \sigma/۲\epsilon_\circ = q/۴A\epsilon_\circ$ ایجاد می‌کنند. در نزدیکی برگه (در نقاط A یا C در شکل ۲۷ـ۱۶) میدانهای ناشی از رویه‌های راست و چپ با هم برابرند و به‌هم افزوده می‌شوند تا میدان الکتریکی کل $E = q/۴A\epsilon_\circ + q/۴A\epsilon_\circ = q/۲A\epsilon_\circ = \sigma/\epsilon_\circ$ را به‌دست دهند. در داخل ورق (نقطهٔ B) میدانها در خلاف جهت همدیگرند، و همان‌طور که برای ناحیه داخلی یک رسانا انتظار داریم حاصل‌جمع آنها به صفر منجر می‌شود.

اکنون در نظر بگیرید ورق دیگری را، که حامل بار $-q$ است، به نزدیکی ورق اولیه بیاوریم. در این حالت دیگر نمی‌توانیم رسانای اول را به‌عنوان یک رسانای "منزوی" در نظر بگیریم و در نتیجه بار روی سطح خارجی آن نمی‌تواند به‌طور یکنواخت توزیع شود. بین بارهای مثبت و منفی موجود روی دو ورق نیروی ربایشی وجود دارد و این عامل سبب می‌شود که بارها به رویه‌های مقابل هم کشیده شوند (شکل ۲۷ـ۱۷). در این حالت هر کدام از دو رویه حامل بار q (به جای $q/۲$) خواهند بود و چگالی بار هم در این حالت $\sigma = q/A$. اگر هر کدام از این صفحه‌ها را به‌صورت یک برگهٔ بار در نظر بگیریم، هر رویه یک میدان الکتریکی $E = \sigma/۲\epsilon_\circ = q/AE_\circ$، بنابر معادلهٔ (۲۷ـ۱۲)، ایجاد می‌کند. در ناحیهٔ بین دو ورق، ورقهای مثبت و منفی سهم یکسانی از نظر مقدار و جهت در میدان الکتریکی دارند، و در نتیجه میدان الکتریکی خالص آنها برابر $E = \sigma/\epsilon = q/A\epsilon_\circ$ است. این مقدار میدان الکتریکی مربوط به یک خازن با صفحات موازی است. این میدان را در شکل ۲۷ـ۱۷ نشان داده‌ایم.



شکل ۲۷ـ۱۷ دو ورق رسانای نازک حامل بارهای مساوی با علامت مخالف. $\vec{E}_+$ میدان ناشی از ورق حامل بار مثبت است، و $\vec{E}_-$ میدانی است که ورق با بار منفی ایجاد می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۴ مقدار میدان الکتریکی E درست در روی سطح جانبی استوانهٔ باردار یک دستگاه فتوکپی برابر $۲٫۳ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/C}$ است. اگر استوانه رسانا باشد چگالی سطحی بار آن چقدر است؟

حل. از معادلهٔ (۲۷ـ۱۸) داریم،

$$\sigma = \epsilon_0 E = (۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C^۲/N \cdot m^۲})(۲٫۳ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N/C})$$
$$= ۲٫۰ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{C/m^۲} = ۲٫۰\,\mu\mathrm{C/m^۲}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۵ اندازهٔ میدان الکتریکی متوسطی که در جوّ زمین و درست روی سطح زمین معمولاً وجود دارد در حدود $۱۵۰\ \mathrm{N/C}$ و رو به پایین است. بار خالص سطحی زمین چقدر است؟ فرض کنید زمین رساناست.

حل. خطهای نیرو به بارهای منفی ختم می‌شوند، بنابراین اگر میدان الکتریکی زمین پایین‌سو است، میانگین چگالی سطحی بار آن یعنی σ باید منفی باشد. از معادلهٔ (۲۷ـ۱۸) می‌دانیم که

$$\sigma = \epsilon_0 E = (۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\,\mathrm{C/N \cdot m^۲})(-۱۵۰\ \mathrm{N/C})$$
$$= -۱٫۳۳ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C/m^۲}$$

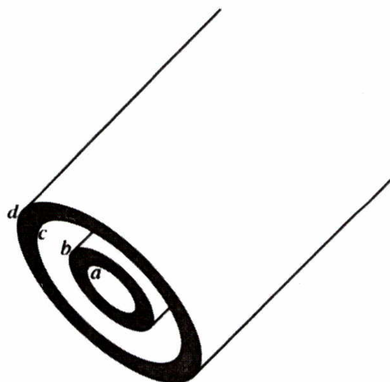
بار الکتریکی کل زمین، q، برابر است با چگالی سطحی بار ضربدر مساحت سطح زمین (که کروی فرض می‌شود)، یعنی $۴\pi R^۲$. به این ترتیب

$$q = \sigma ۴\pi R^۲$$
$$= (-۱٫۳۳ \times ۱۰^{-۹}\,\mathrm{C/m^۲})(۴\pi)(۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m})^۲$$
$$= -۶٫۸ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{C} = -۶۸۰\ \mathrm{kC}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۶ یک استوانهٔ رسانای توخالی طویل (با شعاع داخلی a، و شعاع خارجی b) به‌وسیلهٔ یک استوانهٔ رسانای طویل هم‌محور (با شعاع داخلی c، و شعاع خارجی d) مطابق شکل ۲۷ـ۱۸ احاطه شده است. استوانهٔ داخلی حامل بار مثبت $۲q$ است، و استوانهٔ خارجی دارای بار $-۳q$ است. مقدار باری را که روی هر کدام از این دو رسانا قرار گرفته است مشخص کنید.

حل. قانون گاؤس در مورد اجسام استوانه‌ای نتیجه‌های مشابه اجسام کروی ارائه می‌دهد. به‌ویژه، میدان الکتریکی ناشی از استوانهٔ خارجی در ناحیهٔ $r < c$ برابر صفر است، درست به همان صورت که برای پوستهٔ کروی باردار اثبات کرده‌ایم. بارهای الکتریکی موجود روی رسانای خارجی هیچ میدان الکتریکیی در محل رسانای داخلی ایجاد نمی‌کنند، که به این ترتیب می‌توان آن را در این بحث "منزوی" پنداشت. اگر استوانهٔ داخلی را به‌عنوان یک رسانای منزوی درنظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم که بار الکتریکی موجود در آن باید کلاً روی سطح خارجی آن مستقر شود. در نتیجه هیچ باری روی سطح a قرار ندارد و بار مثبت $۲q$ روی سطح b توزیع شده است.

اگر یک سطح گاؤسی استوانه‌ای هم‌محور در داخل پوستهٔ استوانه‌ای خارجی رسم کنیم ($c < r < d$)، می‌توانیم از قانون گاؤس استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که شار الکتریکی گذرنده از این سطح گاؤسی صفر است. شار گذرنده از سطح جانبی استوانه، همه جا در داخل رسانا، صفر است، زیرا $E = ۰$ و شارگذرنده از دو قاعدهٔ تخت استوانه نیز صفر است، زیرا میدان در ناحیهٔ $b < r < c$ باید شعاعی و از آن‌رو موازی با دو قاعدهٔ استوانه باشد. یعنی اینکه، بنابر قانون گاؤس، باید بار خالص موجود در داخل این سطح گاؤسی برابر صفر باشد.



شکل ۲۷ـ۱۸ مسئله نمونه ۲۷ـ۶. دو پوسته استوانه‌ای هم‌محور.

می‌دانیم که بار $۲q$ روی سطح رسانای داخلی وجود دارد، از آن‌رو برای اینکه بار خالص موجود در داخل سطح گاؤسی برابر صفر شود باید بار $-۲q$ روی سطح c قرار داشته باشد. چون بار کل موجود در استوانهٔ خارجی برابر $-۳q$ است، باقی‌ماندهٔ بار یعنی $-q$ باید روی سطح d پدیدار شود.

توجه کنید که رسانای خارجی تحت تأثیر بار موجود در رسانای داخلی قرار می‌گیرد و به همین دلیل نمی‌توان آن را منزوی در نظر گرفت، در نتیجه بار موجود در رسانا تماماً روی سطح خارجی آن قرار نمی‌گیرد.

۲۷ـ۷ آزمونهای تجربی قانون گاؤس و قانون کولن

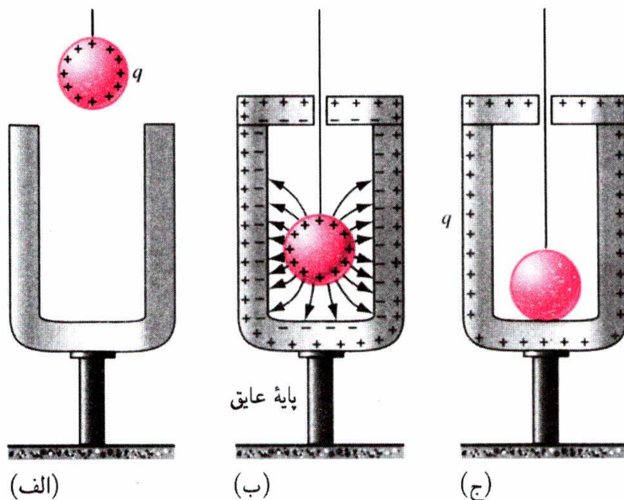
در بخش ۲۷ـ۶ به این نتیجه رسیدیم که بار اضافی در رسانا فقط باید روی سطح خارجی آن قرار گیرد. هیچ باری نمی‌تواند در داخل حجم رسانا یا در سطح یک کاواک تهی داخلی قرار گیرد. این نتیجه پیامد مستقیم قانون گاؤس است. بنابراین، آزمایش اینکه بار اضافی به‌طور کامل روی سطح خارجی جسم رسانا قرار می‌گیرد روشی برای آزمودن قانون گاؤس است. یافتن بار در داخل رسانا یا روی یک سطح داخلی (مانند کاواک شکل ۲۷ـ۱۴(ب)) به معنای نقض قانون گاؤس است. در بخش ۲۷ـ۴ همچنین نشان دادیم که قانون کولن پیامد مستقیم قانون گاؤس است. بنابراین، اگر قانون گاؤس نقض شود، قانون کولن نیز با شکست روبه‌رو می‌شود. به‌ویژه، امکان دارد که قانون نیرو دقیقاً قانون عکس مجذوری نباشد. نمای شعاع r می‌تواند به میزان اندک δ با ۲ تفاوت داشته باشد، به‌طوری که

$$E_r = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{r^{۲+\delta}} \qquad (۲۷ـ۱۹)$$

که اگر قانون کولن و قانون گاؤس صادق باشند δ دقیقاً برابر با صفر است.

اندازه‌گیری مستقیم نیروی بین دو بار الکتریکی، که در فصل ۲۵ توصیف شد، دقت لازم را برای آزمون اینکه آیا δ با دقت چند درصد برابر با صفر است ندارد. مشاهدهٔ بار در داخل رسانا، چنانکه خواهیم دید، امکان آزمونی بسیار دقیقتر را فراهم می‌آورد.

اصولاً، آزمایش، روال نشان داده‌شده در شکل ۲۷ـ۱۹ را دنبال می‌کند. یک گوی فلزی باردار را که از یک رشته نخ عایق آویخته شده است داخل یک قوطی فلزی می‌کنیم که روی پایهٔ عایق قرار



شکل ۲۷ـ۱۹ آرایشی را که بنیامین فرانکلین برای نشان دادن اینکه، باری را که روی یک رسانا قرار می‌دهیم به سطح خارجی آن می‌رود، در نظر گرفته بود. (الف) یک گوی فلزی حامل بار را در داخل یک قوطی فلزی بدون بار پایین می‌آوریم. (ب) وقتی که گوی در داخل قوطی جای گرفت درپوشی روی قوطی می‌گذاریم، خطوط میدان بین گوی و قوطی بدون بار را نشان داده‌ایم. گوی بارهای مخالف بار خودش را به طرف جدار داخلی رسانا می‌کشاند. (ج) وقتی گوی با قوطی تماس پیدا کرد، آنها تشکیل یک رسانای واحد می‌دهند و بار خالص به سمت جدار خارجی قوطی حرکت می‌کند. حال می‌توان گوی را از داخل قوطی خارج کرد و نشان داد که کاملاً بدون بار است و از آن‌رو باید کل بار خود را به قوطی انتقال داده باشد.

گرفته است. وقتی که گوی باردار با قسمت داخلی قوطی تماس پیدا می‌کند، دو جسم یک رسانای مرکب تشکیل می‌دهند و اگر قانون گاؤس معتبر باشد، تمام بار روی گوی باید، مانند شکل ۲۷ـ۱۹(ج)، به سطح خارجی رسانای مرکب یعنی مجموعهٔ گوی به‌اضافهٔ قوطی برود. وقتی گوی را خارج می‌کنیم، دیگر نباید حامل هیچ باری باشد. تماس اجسام فلزی عایق‌بندی‌شدهٔ دیگر با قسمت داخلی قوطی نباید باعث هیچ‌گونه انتقال بار به این اجسام شود. فقط از روی جدار خارجی قوطی امکان انتقال بار وجود دارد.

به نظر می‌رسد که بنیامین فرانکلین نخستین کسی بود که متوجه شد در داخل یک قوطی فلزی عایق‌بندی‌شده هیچ باری وجود ندارد. در سال ۱۷۵۵ او به دوستی نوشت:

> یک قوطی نقره‌ای را که روی یک پایهٔ عایق قرار داشت باردار کردم و سپس یک گوی چوب‌پنبه‌ای به قطر تقریبی یک اینچ را که از یک رشته نخ ابریشمی آویخته شده بود، در داخل آن پایین بردم تا چوب‌پنبه با کف قوطی تماس پیدا کرد. چوب‌پنبه آن‌طور که به قسمت خارجی قوطی می‌چسبید به قسمت داخلی آن نمی‌چسبید، اگر چه با کف قوطی تماس پیدا کرد، ولی وقتی آن را بیرون آوردم، دریافتم که به علت آن تماس

باردار نشده است، در حالی‌که در تماس با جدار خارجی باردار می‌شود. واقعیت شگفت‌انگیزی است. دلیلش را می‌خواهی؛ من آن را نمی‌دانم...

حدود ده سال بعد از فرانکلین توجه دوستش ژوزف پریستلی (۱۷۳۳ تا ۱۸۰۴) را به این "واقعیت شگفت‌انگیز" جلب کرد. در سال ۱۷۶۷ (تقریباً بیست سال پیش از آزمایشهای کولن) پریستلی مشاهدات فرانکلین را بررسی کرد و با بصیرت استثنایی، متوجه شد که قانون عکس مجذوری نیرو پیامد آن است. به این ترتیب رهیافت غیرمستقیم نه تنها خیلی دقیقتر از رهیافت مستقیم بخش ۲۵_۴ است بلکه قبل از آن هم انجام شده بود.

پریستلی، با استدلال مبتنی بر قیاس با گرانش، اظهار داشت که وارد نشدن هیچ نیروی الکتریکی به گوی چوب‌پنبه‌ای فرانکلین که در داخل یک قوطی فلزی عمیق قرار دارد، مشابه این واقعیت است که (نگاه کنید به بخش ۱۴_۵) بر ذره‌ای که در داخل یک پوستهٔ کروی از ماده قرار دارد هیچ نیروی گرانشی وارد نمی‌آید؛ اگر گرانش از قانون عکس مجذوری پیروی کند، شاید نیروی الکتریکی هم از این قانون تبعیت کند. با توجه به آزمایش فرانکلین، پریستلی چنین استدلال کرد:

> آیا نمی‌توان از این رفتار، نتیجه گرفت که ربایش الکتریکی از همان قانونهای ربایش گرانشی پیروی می‌کند و بنابراین برحسب مربع فاصله تغییر می‌کند؛ زیرا به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر زمین به شکل پوسته بود، یک جسم در داخل آن به هیچ طرفی بیشتر از طرف دیگر جذب نمی‌شد؟

توجه کنید که چگونه آگاهی از یک موضوع (گرانش) به درک موضوع دیگر (الکتروستاتیک) کمک می‌کند.

مایکل فاراده نیز آزمایشهایی را برای نشان‌دادن این موضوع که بار اضافی موجود در یک رسانا روی جدار خارجی آن قرار می‌گیرد طراحی کرد. به‌ویژه او یک جعبهٔ بزرگ با پوشش فلزی ساخت که روی پایه‌های عایقی قرار داشت و توسط یک مولد الکتروستاتیکی قوی باردار شده بود. به گفتهٔ فاراده:

> به داخل آن اتاقک رفتم و در آن زندگی کردم و با استفاده از شمعهای روشن، الکترومتر و همهٔ آزمونهای الکتریکی دیگر نتوانستم کوچکترین تأثیری در آنها مشاهده کنم... با اینکه در تمام این مدت پوشش فلزی جدار خارجی این اتاقک به‌شدت باردار شده بود و جرقه‌های بزرگی از همه جای سطح خارجی آن گسیل می‌شد.

جدول ۲۷_۱ آزمونهای مربوط به قانون عکس مجذوری کولن

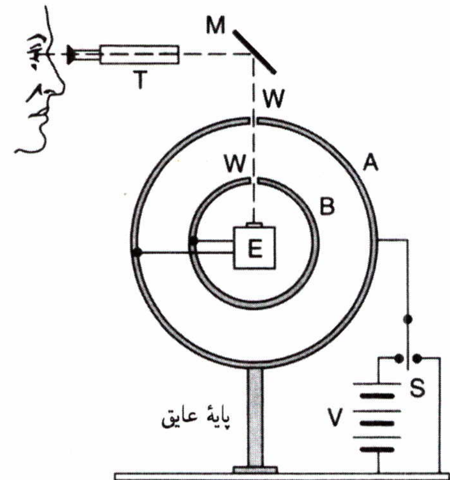
پژوهشگران	تاریخ	δ (معادلهٔ ۲۷_۱۹)
فرانکلین	۱۷۵۵	
پریستلی	۱۷۶۷	متناسب با مجذورها
روبیسن	۱۷۶۹	$< ۰ر۰۶$
کاوندیش	۱۷۷۳	$< ۰ر۰۲$
کولن	۱۷۸۵	حداکثر چند درصد
ماکسول	۱۸۷۳	$< ۵ \times ۱۰^{-۵}$
پلیمپتون و لوتون	۱۹۳۶	$< ۲ \times ۱۰^{-۹}$
بارتلت، گلدهاگن و فیلیپس	۱۹۷۰	$< ۱ر۳ \times ۱۰^{-۱۳}$
ویلیامز، فالر، و هیل	۱۹۷۱	$< ۱ر۰ \times ۱۰^{-۱۶}$

قانون کولن در فیزیک اهمیتی فوق‌العاده دارد و اگر δ در معادلهٔ (۲۷_۱۹) صفر نباشد، در استنباط الکترومغناطیس و فیزیک کوانتومی دچار دردسرهای جدی خواهیم شد. بهترین راه برای اندازه‌گیری δ آن است که به کمک آزمایش دریابیم آیا بار اضافی روی یک رسانای عایق‌بندی‌شده، کاملاً به جدار خارجی آن می‌رود یا نه.

آزمایشهای جدید، که با دقت بسیار زیادی انجام شده‌اند، نشان می‌دهند که اگر δ در معادلهٔ (۲۷_۱۹) صفر نباشد، مسلماً بسیار کوچک است. جدول ۲۷_۱ نتیجهٔ مهمترین آزمایشهایی از این دست را نشان می‌دهد.

شکل ۲۷_۲۰ دستگاهی را نشان می‌دهد که پلیمپتون و لوتون از آن برای اندازه‌گیری δ استفاده کردند. این دستگاه دو پوستهٔ فلزی هم‌مرکز A و B تشکیل شده است، که قطر پوستهٔ A برابر ۱ر۵ متر است. پوستهٔ داخلی حاوی یک الکترومتر حساس E است و این الکترومتر طوری قرار گرفته بود که اگر بین پوسته‌های A و B باری جابه‌جا می‌شد آن را مشخص می‌کرد. اگر قانون گاؤس و در نتیجه قانون کولن به‌صورتی که بیان شده‌اند صحیح باشند، در صورتی‌که پوسته‌ها به لحاظ الکتریکی به‌هم متصل باشند، هر باری که روی این مجموعه قرار داده شود باید به‌طور کامل روی پوستهٔ A قرار گیرد.

با حرکت کلید S به طرف چپ، مقدار قابل ملاحظه‌ای بار به‌وسیلهٔ باتری V روی مجموعهٔ کره‌ها قرار می‌گیرد. اگر بخشی از این بار به پوستهٔ B منتقل شود، باید از الکترومتر بگذرد و سبب انحراف آن بشود، که در این صورت انحراف به‌صورت اپتیکی از طریق تلسکوپ T، آینهٔ M، و پنجره‌های W قابل مشاهده است.



شکل ۲۷ـ۲۰ نوع جدید و دقیقتری از دستگاه شکل۲۷ـ۱۹، که آن نیز برای تحقیق در مورد اینکه بار الکتریکی فقط روی سطح خارجی یک رسانا قرار می‌گیرد، طراحی شده است. با جابه‌جا کردن کلید S به طرف چپ، بار الکتریکی روی کرهٔ A قرار می‌گیرد و الکترومتر حساس E برای نشان‌دادن هر باری که به کرهٔ داخلی B نقل‌مکان کند مورد استفاده قرار می‌گیرد. انتظار داریم که تمام بارها روی سطح خارجی (کرهٔ A) باقی بماند.

با این همه، وقتی کلید S متناوباً به چپ و راست جابه‌جا شد و مجموعهٔ پوسته‌ای به باتری و زمین وصل شد، هیچ اثری از جابه‌جایی بار مشاهده نشد. پلیمپتون و لوتون با آگاهی از حساسیت الکترومتر خود، محاسبه کردند که اختلاف δ در معادلهٔ (۲۷ـ۱۹) با صفر بیش از ۲×۱۰^{-۹} نیست، که در واقع مقدار بسیار کوچکی است. با وجود این پس از آزمایش آنها، حدود δ بیش از هفت مرتبهٔ بزرگی بهبود پیدا کرده است و این اصلاح با استفاده از انواع دقیقتری از همین دستگاه پایه توسط پژوهشگران انجام شده است.

چندگزینه‌ای

۲۷ـ۱ قانون گاؤس دربارهٔ چیست؟

۲۷ـ۲ شار میدان برداری

۱. میدان سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ در ناحیه‌ای از فضا وجود دارد. سطح بستهٔ S به چهار بخش $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، و $S_۴$ تقسیم شده است. چشمه‌ای درست در بیرون سطح بسته و نزدیک به $S_۱$ قرار دارد؛ ممکن است چشمه‌ها با چاهکهای دیگری در نزدیکی سایر سطحهای S_n وجود داشته باشند، ولی هیچ‌کدام در داخل S نیستند.

(۱) در مورد $\Phi_۱$، شارگذرنده از $S_۱$، به چه نتیجه می‌توان رسید؟

(الف) $\Phi_۱ > ۰$ (ب) $\Phi_۱ = ۰$ (ج) $\Phi_۱ < ۰$

(د) بدون اطلاعات بیشتر، دربارهٔ $\Phi_۱$ نمی‌توان به هیچ نتیجه‌ای دست یافت.

(۲) کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ شارگذرنده از چهار سطح صحیح است؟

(الف) حداقل یکی از Φ_nها باید منفی باشد.

(ب) حداقل یکی از Φ_nها باید مثبت باشد.

(ج) حداقل یکی از Φ_nها باید صفر باشد.

(د) اگر A صحیح است، در آن صورت B نیز باید صحیح باشد.

(هـ) یا A یا B می‌تواند درست باشد، ولی هر دو گزاره نمی‌توانند صحیح باشند.

(۳) اندازه‌گیریها نشان می‌دهند که $\Phi_۱ + \Phi_۲ > ۰$. از این اطلاعات می‌توانیم نتیجه بگیریم که

(الف) $\Phi_۳ = \Phi_۴$ (ب) $\Phi_۳ = -\Phi_۴$ (ج) $\Phi_۳ > \Phi_۴$

(د) $\Phi_۳ < -\Phi_۴$

۲۷ـ۳ شار میدان الکتریکی

۲. شار گذرنده از یک سطح تخت به مساحت A در یک میدان یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ وقتی بیشینه است که

(الف) سطح تخت موازی با $\vec{\mathbf{E}}$ باشد.

(ب) سطح تخت عمود بر $\vec{\mathbf{E}}$ باشد.

(ج) سطح تخت به شکل مستطیل باشد.

(د) سطح تخت به شکل مربع باشد.

۳. یک سطح بستهٔ کروی به شعاع a در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ قرارگرفته است. شار الکتریکی Φ_E گذرنده از این سطح چقدر است؟

(الف) $\Phi_E = ۴\pi a^۲ E$ (ب) $\Phi_E = \pi a^۲ E$ (ج) $\Phi_E = ۰$

(د) بدون اطلاعات بیشتر نمی‌توان Φ_E را معین کرد.

۲۷ـ۴ قانون گاؤس

۴. دو سطح کروی هم‌مرکز در نظر بگیرید. $S_۱$ به شعاع a و $S_۲$ به شعاع $۲a$ که مرکز هر دو در مبدأ مختصات است. بار الکتریکی $+q$ در مبدأ مختصات قرار دارد و هیچ بار دیگری وجود ندارد. شارگذرنده از سطح $S_۱$، یعنی $\Phi_۱$ را با شارگذرنده از سطح $S_۲$، یعنی $\Phi_۲$ با هم مقایسه کنید.

(الف) $\Phi_۱ = ۴\Phi_۲$ (ب) $\Phi_۱ = ۲\Phi_۲$ (ج) $\Phi_۱ = \Phi_۲$

(د) $\Phi_۱ = \Phi_۲/۲$

۵. مرکز یک سطح بستهٔ کروی خیالی S به شعاع R در مبدأ مختصات قرار دارد. یک بار مثبت ابتدا در مبدأ مختصات قرار دارد و شارگذرنده از سطح برابر Φ_E است. این بار مثبت را به آرامی از مبدأ به نقطه‌ای به فاصلهٔ $R/۲$ از مبدأ جابه‌جا کرده‌ایم. در انجام این کار، شارگذرنده از سطح S

(الف) به $4\Phi_E$ افزایش می‌یابد. (ب) به $2\Phi_E$ افزایش می‌یابد.
(ج) ثابت می‌ماند. (د) به $\Phi_E/2$ کاهش می‌یابد.
(هـ) به $\Phi_E/4$ کاهش پیدا می‌کند.

۶. در چه شرایطی می‌توان شار الکتریکی Φ_E گذرنده از یک سطح بسته را معین کرد؟
(الف) اگر مقدار $\vec{\mathbf{E}}$ در همهٔ نقطه‌های روی سطح معلوم باشد.
(ب) اگر کل بار الکتریکی محصور در سطح بسته معلوم باشد.
(ج) اگر کل بار الکتریکی موجود در خارج از سطح بسته مشخص باشد.
(د) فقط اگر موقعیت هر یک از بارهای نقطه‌ای در داخل سطح بسته مشخص باشد.

۷. مرکز یک سطح بستهٔ کروی خیالی S به شعاع R در مبدأ مختصات قرار دارد. بار $+q$ ابتدا در مبدأ مختصات قرار دارد، و شار گذرنده از سطح برابر Φ_E است. سپس سه بار دیگر روی محور x به این سیستم اضافه می‌شود. مقدار و موقعیت بارها به این شرح است: بار $-3q$ در $x = -R/2$، بار $+5q$ در $x = R/2$، و بار $+4q$ در $x = 3R/2$. در این‌صورت شار گذرنده از سطح S چقدر است؟
(الف) $2\Phi_E$ (ب) $3\Phi_E$ (ج) $6\Phi_E$ (د) $7\Phi_E$
(هـ) Φ_E را نمی‌توان معین کرد، زیرا مسئله دیگر متقارن نیست.

۲۷ـ۵ کاربردهای قانون گاؤس

۸. یک دوقطبی روی محور x قرار گرفته است به‌طوری که بار $+q$ آن در $x = +d/2$ و بار منفی آن در $x = -d/2$ قرار دارد. شار الکتریکی Φ_E گذرنده از صفحهٔ yz در وسط دو بار چنین است:
(الف) صفر است. (ب) به d بستگی دارد.
(ج) به q بستگی دارد. (د) هم به q و هم به d وابسته است.

۹. صفحهٔ تعریف‌شده در پرسش چندگزینه‌ای ۸ به طرف بار مثبت حرکت داده شده است. وقتی که صفحه حرکت می‌کند، شار گذرندهٔ Φ_E از این سطح
(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

۱۰. صفحهٔ تعریف‌شده در پرسش چندگزینه‌ای ۸ را می‌چرخانیم به‌طوری که عمود بر آن صفحهٔ دیگر به موازات محور x نیست. همراه با دوران صفحه، شار الکتریکی Φ_E گذرنده از این سطح
(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

۱۱. در کدام‌یک از مسائل زیر ممکن است قانون گاؤس مورد استفاده قرار گیرد؟
(الف) معین کردن میدان الکتریکی در نقاط مختلف روی سطح یک استوانهٔ یکنواخت‌باردارشده با طول محدود.
(ب) معین کردن شار الکتریکی گذرنده از قاعدهٔ یک استوانهٔ یکنواخت باردارشده.
(ج) معین کردن میدان الکتریکی در نقاط مختلف روی سطح یک مکعب یکنواخت باردارشده.
(د) معین کردن شار الکتریکی گذرنده از یکی از سطوح یک مکعب یکنواخت باردارشده.

۲۷ـ۶ قانون گاؤس و رساناها

۱۲. تک بار مثبت $+q$ در مرکز یک گوی رسانای توخالی قرار داده شده است. گوی دارای هیچ بار خالصی نیست.
(۱) بار خالص موجود روی جدار داخلی گوی برابر است با
(الف) $+2q$ (ب) $+q$ (ج) $-q$ (د) 0
(۲) بار خالص موجود روی جدار خارجی گوی برابر است با
(الف) $+2q$ (ب) $+q$ (ج) $-q$ (د) 0

۱۳. تصور کنید که بار الکتریکی خالص $+q$ را روی گوی پرسش چندگزینه‌ای ۱۲ قرار دهیم؛ بار نقطه‌ای باز هم در مرکز می‌ماند. در این صورت
(۱) بار خالص موجود روی جدار داخلی گوی برابر است با
(الف) $+2q$ (ب) $+q$ (ج) $-q$ (د) 0
(۲) بار خالص موجود روی جدار خارجی گوی برابر است با
(الف) $+2q$ (ب) $+q$ (ج) $-q$ (د) 0

۱۴. بار مثبت موجود در مرکز گوی پرسش چندگزینه‌ای ۱۳ را جابه‌جا کرده آن را به جدار داخلی گوی نزدیک می‌کنیم، ولی مواظب هستیم که با جدار گوی تماس پیدا نکند.
(۱) بار کل موجود روی جدار داخلی گوی در این حالت
(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.
(د) تغییر می‌کند، و بستگی دارد به اینکه بار تا چه حد به جدار داخلی گوی نزدیک شود.
(۲) بار کل موجود روی جدار خارجی گوی در این حالت
(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.
(د) تغییر می‌کند، و بستگی دارد به اینکه بار تا چه حد به جدار داخلی گوی نزدیک شود.

۲۷ـ۷ آزمونهای تجربی قانون گاؤس و قانون کولن

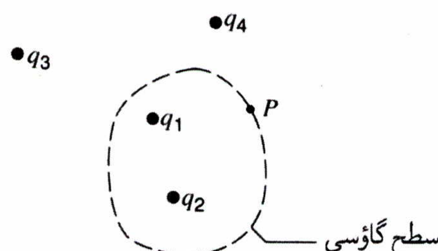
پرسشها

۱. مبنای این حکم که خطوط میدان الکتریکی تنها از بارهای الکتریکی شروع و به آنها ختم می‌شوند چیست؟

۲. گاهی بارهای مثبت را "چشمه" و بارهای منفی را "چاهک" میدان الکتریکی می‌گوییم. این اصطلاحات را چگونه توجیه می‌کنید؟ آیا برای میدان گرانشی چشمه، چاهک، یا هر دو وجود دارند؟

۳. در مقایسه با Φ_E، شار Φ_g یک میدان گرانشی را چطور تعریف خواهید کرد؟ شار Φ_g میدان گرانشی زمین که از دیواره‌های یک اتاق می‌گذرد، با فرض اینکه اتاق حاوی ماده نباشد، چقدر است؟ از یک سطح کروی که زمین را، خیلی نزدیک به سطح آن، احاطه کرده است چه شاری می‌گذرد؟ از یک سطح کروی به اندازهٔ مدار ماه چقدر است؟

۴. سطح گاؤسی را در نظر بگیرید که بخشی از توزیع بار شکل ۲۷ـ۲۱ را احاطه می‌کند. (الف) کدام‌یک از بارها در میدان الکتریکی در نقطهٔ P سهیم‌اند؟ (ب) آیا مقدار شار عبوری از این سطح گاؤسی با درنظرگرفتن میدان ناشی از بارهای q_1 و q_2 از شار مربوط به میدان کل، بزرگتر، مساوی، یا کوچکتر است؟



شکل ۲۷ـ۲۱ پرسش ۴.

۵. فرض کنید که میدان الکتریکی در ناحیه‌ای دارای جهت ثابتی است ولی شدت میدان در آن جهت کاهش پیدا می‌کند. در مورد توزیع بار در آن ناحیه چه می‌توانید بگویید؟ خطهای نیرو را برای آن ناحیه رسم کنید.

۶. آیا این گزارهٔ از قانون گاؤس دقیقاً درست است که می‌گوید، تعداد کل خطهای نیرویی که از هر سطح بسته خارج می‌شود با مقدار بار مثبت خالصی که در آن سطح وجود دارد متناسب است؟

۷. یک بار نقطه‌ای را در مرکز یک سطح گاؤسی کروی قرار داده‌ایم. آیا اگر (الف) سطح را با مکعبی با همان حجم جایگزین کنیم؛ (ب) کره را با مکعبی با حجم یک‌دهم حجم آن جایگزین کنیم؛ (ج) بار را از مرکز کره جابه‌جا کنیم، ولی هنوز در داخل آن قرار داشته باشد؛ (د) بار را از محدودهٔ اصلی خارج کنیم؛ (ه) بار دیگری را نزدیک به کرهٔ اصلی و خارج از سطح آن قرار دهیم؛ و (و) بار دیگری را در داخل سطح گاؤسی قرار دهیم، شار الکتریکی Φ_E تغییر خواهد کرد؟

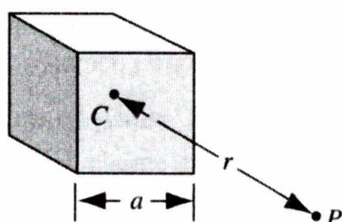
۸. در قانون گاؤس، $\epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q$، آیا $\vec{\mathbf{E}}$ الزاماً میدان الکتریکی ناشی از بار q است؟

۹. سطحی یک دوقطبی الکتریکی را در برمی‌گیرد. دربارهٔ Φ_E این سطح چه می‌توان گفت؟

۱۰. فرض کنید که یک سطح گاؤسی حاوی هیچ بار خالصی نباشد. آیا قانون گاؤس ایجاب می‌کند که میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا روی سطح گاؤسی صفر باشد؟ آیا عکس این عبارت درست است؛ یعنی اگر $\vec{\mathbf{E}}$ در همه جا روی یک سطح گاؤسی صفر باشد، آیا قانون گاؤس ایجاب می‌کند که هیچ بار خالصی در داخل آن سطح وجود نداشته باشد؟

۱۱. آیا می‌توان از قانون گاؤس برای محاسبهٔ میدان ناشی از سه بار مساوی که در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته‌اند استفاده کرد؟ دربارهٔ پاسختان چه مثبت و چه منفی توضیح دهید.

۱۲. بار کل Q به‌طور یکنواخت در سرتاسر مکعبی به ضلع a توزیع شده است. آیا میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار در نقطهٔ خارجی P، در فاصلهٔ r از مرکز C مکعب از رابطهٔ $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ به‌دست می‌آید؟ نگاه کنید به شکل ۲۷ـ۲۲. اگر E از رابطهٔ بالا به‌دست نمی‌آید، آیا می‌توان با درنظرگرفتن یک سطح گاؤسی به‌صورت مکعب "هم‌مرکز" E را محاسبه کرد؟ اگر چنین کاری ممکن نیست، توضیح دهید چرا. اگر $r \gg a$ باشد، آیا می‌توانید E را محاسبه کنید؟



شکل ۲۷ـ۲۲ پرسش ۱۲.

۱۳. آیا میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ در داخل یک بادکنک باردارشدهٔ لاستیکی که (الف) کروی یا (ب) به شکل سوسیس باشد الزاماً صفر است؟ برای هر یک از دو مورد بالا فرض کنید که بار به‌صورت یکنواخت روی سطح بادکنک توزیع شده باشد. اگر روی سطح خارجی بادکنک یک لایهٔ نازک از رنگ رسانا داشته باشیم، آیا وضعیت تغییر خواهد کرد؟

۱۴. یک بادکنک لاستیکی کروی حامل باری است که به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. وقتی که بادکنک را باد می‌کنیم،

میدان E مربوط به نقطه‌های (الف) داخل بادکنک، (ب) روی سطح بادکنک، و (ج) خارج از بادکنک چگونه تغییر خواهد کرد؟

۱۵. در بخش ۲۷ـ۴، دیدیم که قانون کولن را می‌توان از قانون گاؤس به‌دست آورد. آیا این موضوع الزاماً به این معنی است که قانون گاؤس را می‌توان از قانون کولن استنتاج کرد؟

۱۶. اگر نمای r در قانون کولن دقیقاً برابر ۲ نبود، آیا قانون گاؤس معتبر بود؟

۱۷. یک رسانای بزرگ، توخالی، عایق‌بندی‌شده حامل بار مثبت است. یک گوی کوچک فلزی که حامل همان مقدار بار منفی است به‌وسیلهٔ یک رشته نخ و از طریق دریچه‌ای در بالای رسانا وارد آن می‌شود و با سطح داخلی رسانا تماس پیدا می‌کند و سپس بیرون آورده می‌شود. در این‌صورت بار موجود (الف) روی رسانا و (ب) بار روی گوی چقدر است؟

۱۸. آیا از استدلال بخش ۲۷ـ۶ می‌توان چنین نتیجه گرفت که الکترونهای موجود در سیمهای شبکهٔ سیم‌کشی یک خانه روی سطح این سیمها حرکت می‌کنند؟ اگر پاسختان منفی است، توضیح دهید، چرا؟

۱۹. در بخش ۲۷ـ۶، فرض کردیم که $\vec{E}$ در همه جا در داخل یک رسانای منزوی صفر است. گرچه، مسلماً در داخل رساناها و در نقاط نزدیک به الکترونها یا هسته‌ها میدانهای الکتریکی بسیار قوی وجود دارد. آیا این موضوع استدلال بخش ۲۷ـ۴ را رد می‌کند؟ در این باره توضیح دهید.

۲۰. آیا قانون گاؤسی، به‌صورتی که در بخش ۲۷ـ۶ مورد استفاده قرار گرفت، ایجاب می‌کند که تمام الکترونهای رسانش موجود در یک رسانای عایق‌بندی‌شده روی سطح آن مستقر شوند؟

۲۱. بار مثبت q را در مرکز یک کرهٔ فلزی توخالی قرار داده‌ایم. چه بارهایی (الف) روی سطح داخلی و (ب) روی سطح خارجی کره پدیدار می‌شود؟ (ج) اگر جسم فلزی (بدون باری) را به کره نزدیک کنید آیا جوابهای قسمت (الف) و (ب) تغییر خواهد کرد؟ آیا توزیع بار روی سطح کره تغییر خواهد کرد؟

۲۲. اگر بار الکتریکی $-q$ به‌طور یکنواخت روی سطح یک پوستهٔ کروی فلزی عایق‌بندی‌شده به شعاع a توزیع شود، میدان الکتریکی در داخل این پوسته صفر است. حالا، اگر بار $+q$ را در مرکز این کره قرار دهیم، هیچ میدان خارجی نخواهیم داشت. این بار نقطه‌ای را می‌توان در مسافت $d < a$ در داخل کره از مرکز جابه‌جا کرد، اما این عمل به سیستم یک گشتاور دوقطبی می‌دهد و یک میدان خارجی ایجاد می‌کند. انرژی پدیدآمده در این میدان خارجی از کجا تأمین می‌شود؟

۲۳. چگونه می‌توانید بار اضافی موجود در یک جسم رسانای کوچک را به‌طور کامل تخلیه کنید؟

۲۴. توضیح دهید که چگونه تقارن کروی موجود در شکل ۲۷ـ۷ این محدودیت را به‌وجود می‌آورد که $\vec{E}$ در هر نقطه فقط یک مؤلفهٔ شعاعی داشته باشد. (راهنمایی: مؤلفه‌های دیگر، شاید در امتدادهایی هم‌ارز با طول و عرض جغرافیایی زمین در نظر بگیرید. تقارن کروی ایجاب می‌کند که این مؤلفه‌ها از هر دیدگاهی یکسان مشاهده شوند. آیا می‌توانید خطهای میدانی ابداع کنید که این معیار را برآورده کند؟)

۲۵. توضیح دهید که چرا تقارن شکل ۲۷ـ۸ این محدودیت را به‌وجود می‌آورد که $\vec{E}$ در هر نقطه فقط باید یک مؤلفهٔ شعاعی داشته باشد. به خاطر داشته باشید که در این مورد، میدان نه تنها باید برای هر نقطه‌ای در روی خط یکسان به نظر برسد، بلکه سروته‌شدن آن نیز نباید تغییری به‌وجود آورد.

۲۶. بار کل موجود روی یک میلهٔ نامتناهی، بینهایت است. چرا در این مورد E بینهایت نیست؟ به هر حال، بنابر قانون کولن، اگر q بینهایت باشد، E هم باید بینهایت باشد.

۲۷. توضیح دهید که چرا تقارن شکل ۲۷ـ۹ این محدودیت را به‌وجود می‌آورد که $\vec{E}$ فقط باید مؤلفه‌هایی داشته باشد که از صفحه به سمت خارج‌اند؟ مثلاً، چرا $\vec{E}$ نمی‌تواند مؤلفه‌هایی موازی با صفحه داشته باشد؟ توجه داشته باشید که در این مورد، میدان نه تنها باید برای هر نقطه‌ای در روی برگه در هر جهت یکسان به نظر برسد بلکه اگر برگه را حول یک محور عمود بر آن بچرخانیم باز هم باید میدان یکسان به‌نظر بیاید.

۲۸. میدان ناشی از یک برگهٔ نامتناهی با بار یکنواخت در همه جا بدون توجه به اینکه فاصلهٔ نقطهٔ مورد بررسی از برگه چقدر است شدت یکسانی دارد. با توجه به سرشت عکس مجذوری قانون کولن، این مطلب را توضیح دهید.

۲۹. وقتی به داخل کرهٔ یکنواختی از بار نفوذ کنید، میدان E باید با کاهش شعاع، کم شود زیرا مقدار کمتری بار در داخل کره‌ای که از نقطهٔ مشاهده می‌گذرد قرار دارد. از طرف دیگر، میدان E باید زیاد شود زیرا نزدیکتر به مرکز این توزیع بار قرار گرفته است. کدام‌یک از این دو عامل غالب‌اند و چرا؟

۳۰. آیا برای یک توزیع بار دارای تقارن کروی (نه برای یک چگالی بار یکنواخت شعاعی)، E الزاماً در روی سطح کره بیشینه است؟ دربارهٔ جنبه‌های متفاوت این موضوع اظهارنظر کنید.

۳۱. در شکل ۲۷ـ۱۱ (الف) آیا اگر (الف) یک کاواک کروی هم‌مرکز در جسم وجود داشت، (ب) یک بار نقطه‌ای Q در مرکز کاواک قرار داشت، و (ج) بار Q در داخل کاواک بود ولی در مرکزش قرار نداشت، معادلهٔ (۲۷ـ۱۵) صادق بود؟

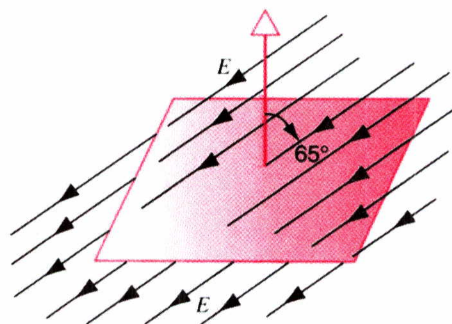
تمرینها

۲۷ـ۱ قانون گاؤس دربارهٔ چیست؟

۲۷ـ۲ شار میدان برداری

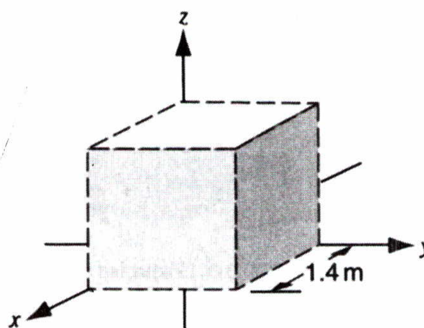
۲۷ـ۳ شار میدان الکتریکی

۱. طول ضلع مربع شکل ۲۷ـ۲۳ برابر ۳٫۲ mm است. این سطح در میدان الکتریکی یکنواختی به شدت $E = ۱۸۰۰$ N/C غوطه‌ور شده است. خطهای میدان، مطابق شکل، با خط عمود بر سطح "به سمت خارج" زاویهٔ °۶۵ می‌سازند. شار عبوری از این سطح را محاسبه کنید.



شکل ۲۷ـ۲۳ تمرین ۱.

۲. مکعبی به ضلع ۱٫۴ m مطابق شکل ۲۷ـ۲۴ در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار گرفته است. شار الکتریکی عبوری از سطح سمت راست را با درنظرگرفتن اینکه شدت میدان الکتریکی برحسب N/C، برابر (الف) $۶\hat{\mathbf{i}}$، (ب) $-۲\hat{\mathbf{j}}$، و (ج) $-۳\hat{\mathbf{i}} + ۴\hat{\mathbf{k}}$ باشد، محاسبه کنید. (د) شار عبوری کل از چنین مکعبی را در هر یک از میدانهای نامبرده در بالا محاسبه کنید.

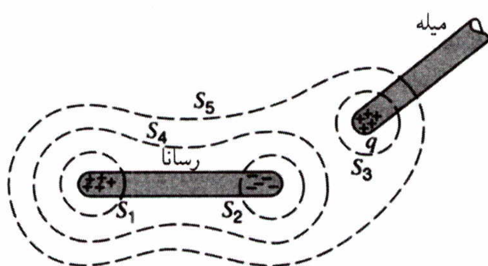


شکل ۲۷ـ۲۴ تمرین ۲.

۳. شار عبوری Φ_E از (الف) قاعدهٔ تخت و (ب) سطح خمیدهٔ نیمکره‌ای به شعاع R را محاسبه کنید. میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ یکنواخت و موازی محور نیمکره است و خطهای میدان از طرف قاعدهٔ تخت به نیمکره وارد می‌شوند. (برای مشخص‌کردن عنصر سطح از عمود بر سطح به سمت خارج استفاده کنید.)

۲۷ـ۴ قانون گاؤس

۴. بارهای موجود در یک رسانای عایق‌بندی‌شده که در ابتدا بدون بار است، با نگه‌داشتن یک میلهٔ باردار با بار مثبت در نزدیکی آن از هم جدا شده‌اند (شکل ۲۷ـ۲۵). شار گذرنده از پنج سطح گاؤسی نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید. فرض کنید که بار القاشدهٔ منفی روی رسانا برابر با بار مثبت q روی میله است.

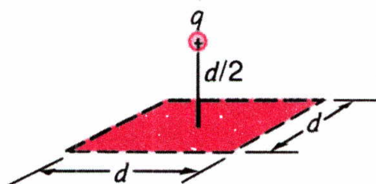


شکل ۲۷ـ۲۵ تمرین ۴.

۵. بار نقطه‌ای q به مقدار ۱٫۸۴μC در مرکز یک سطح گاؤسی مکعبی به ضلع ۵۵ cm قرار گرفته است. شار الکتریکی Φ_E را که از این سطح می‌گذرد معین کنید.

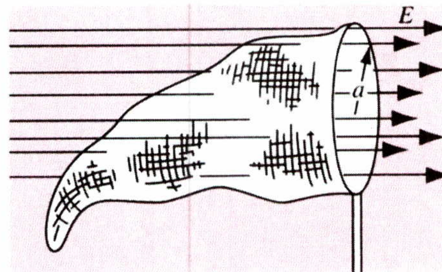
۶. شار الکتریکی خالص گذرنده از هر یک از وجوه یک تاس برحسب یکای $۱۰^۳$ N · m²/C برابر با تعداد نقطه‌های N (از ۱ تا ۶) روی هر وجه است. برای Nهای فرد شار ورودی و برای Nهای زوج شار خروجی است. بار خالص موجود در داخل تاس چقدر است؟

۷. بار نقطه‌ای $+q$ در فاصلهٔ $d/۲$ از سطح مربعی به ضلع d و در بالای مرکز آن قرار دارد (شکل ۲۷ـ۲۶). شار الکتریکی گذرنده از مربع را معین کنید. (راهنمایی: مربع را یک رخ از مکعبی به ضلع d در نظر بگیرید.)



شکل ۲۷ـ۲۶ تمرین ۷.

۸. یک تور پروانه‌گیری، مطابق شکل ۲۷ـ۲۷، در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد. قاب این تور دایره‌ای به شعاع a، عمود بر راستای میدان است. شار الکتریکی را که از تور می‌گذرد نسبت به بردار عمود بر سطح و به طرف خارج معین کنید.



شکل ۲۷ـ۲۷ تمرین ۸.

۹. به تجربه دریافته‌ایم که میدان الکتریکی در ناحیهٔ معینی از جو زمین بر سطح زمین عمود و به طرف داخل است. در ارتفاع ۳۰۰ متر، شدت میدان ۵۸ N/C و در ارتفاع ۲۰۰ متری، ۱۱۰ N/C است. مقدار بار خالص موجود در یک مکعب به ضلع ۱۰۰ متر را که در ارتفاع بین ۲۰۰ و ۳۰۰ متر قرار گرفته است محاسبه کنید. انحنای زمین را نادیده بگیرید.

۱۰. شار خالصی را که از سطح مکعب تمرین ۲ و شکل ۲۷ـ۲۴ می‌گذرد به‌دست آورید. فرض کنید که میدان الکتریکی برحسب یکاهای SI (N/C) به شرح زیر باشد: (الف) $\vec{\mathbf{E}} = ۳y\hat{\mathbf{j}}$ و (ب) $\vec{\mathbf{E}} = -۴\hat{\mathbf{i}} + (۶ + ۳y)\hat{\mathbf{j}}$. (ج) در هر یک از دو مورد بالا، چقدر بار در داخل مکعب قرار دارد؟

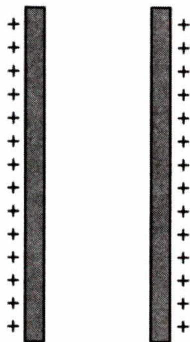
۱۱. بار نقطه‌ای q را در رأس مکعبی به ضلع a قرار می‌دهیم. شاری که از هر یک از وجوه مکعب می‌گذرد چقدر است؟ (راهنمایی: از قانون گاؤس و استدلال مبتنی بر تقارن استفاده کنید.)

۲۷ـ۵ کاربرد قانون گاؤس

۱۲. یک خط بار نامتناهی در فاصلهٔ ۱٫۹۶ متری، میدانی به شدت $۴٫۵۲ \times ۱۰^{۴}$N/C ایجاد می‌کند. چگالی طولی بار این توزیع را محاسبه کنید.

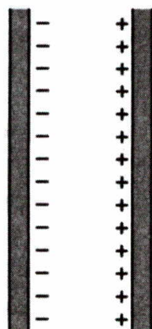
۱۳. (الف) استوانهٔ دستگاه فتوکپی مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۴ به طول ۴۲ cm و قطر ۱۲ cm را در نظر بگیرید. بارکل موجود روی این استوانه چقدر است؟ (ب) تولیدکنندهٔ این دستگاه فتوکپی تمایل دارد که نوع رومیزی این دستگاه را به بازار عرضه کند. این کار مستلزم کاهش ابعاد استوانه به طول ۲۸ cm و قطر ۸٫۰ cm است. میدان الکتریکی روی سطح استوانه نباید تغییر کند. مقدار بار لازم برای استوانهٔ جدید چقدر است؟

۱۴. در شکل ۲۷ـ۲۸ دو برگهٔ بزرگ و نازک نارسانا با بار مثبت را نشان داده‌ایم که در برابر هم قرار گرفته‌اند. شدت میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در نقاط واقع در (الف) سمت چپ برگه‌ها، (ب) بین برگه‌ها، و (ج) در سمت راست برگه‌ها چقدر است؟ چگالی بار سطحی σ را برای هر دو برگه یکسان در نظر بگیرید. فقط نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که خیلی نزدیک به لبه‌ها نباشند و فاصلهٔ آنها از دو برگه در مقایسه با ابعاد برگه‌ها کوچک باشد. (راهنمایی: مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ را ببینید.)



شکل ۲۷ـ۲۸ تمرین ۱۴.

۱۵. دو صفحهٔ فلزی بزرگ مطابق شکل ۲۷ـ۲۹ روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند و حامل بارهایی با چگالی سطحی $+\sigma$ و $-\sigma$ روی سطوح داخلی خود هستند. شدت میدان الکتریکی E در نقطه‌های واقع در (الف) سمت چپ دو صفحه، (ب) بین دو صفحه، و (ج) سمت راست دو صفحه، چقدر است؟ فقط نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که به لبه‌ها نزدیک نباشند و فاصلهٔ آن نقطه‌ها از صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد صفحه‌ها کوچک باشد. (راهنمایی: مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷ـ۳ را ببینید.)



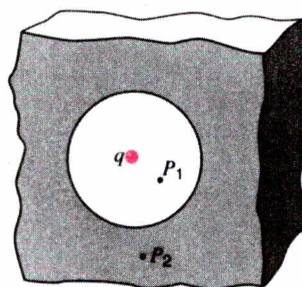
شکل ۲۷ـ۲۹ تمرین ۱۵.

۱۶. الکترونی تحت تأثیر یک میدان الکتریکی پایین‌سو در میدان گرانشی زمین ساکن باقی می‌ماند. اگر این میدان الکتریکی ناشی از بارهای موجود روی دو صفحهٔ رسانای بزرگ و موازی باشد که بار آنها

ناهمنام بوده و فاصلهٔ بین آنها ۲٫۳ cm است، با فرض یکنواختی توزیع بار دو صفحه، چگالی سطحی بار دو صفحه چقدر است؟

۱۷. یک سیم نازک راست بسیار دراز حامل بار ثابت ‎−۳٫۶۰ nC/m‎ است. قرار است این سیم را استوانه‌ای با بار مثبت یکنواخت، به شعاع ۱٫۵۰ cm و هم‌محور با سیم احاطه کند. چگالی حجمی بار استوانه، ρ، را باید چنان برگزینیم که میدان الکتریکی در خارج از استوانه صفر شود. چگالی بار مثبت، ρ، مورد نیاز را محاسبه کنید.

۱۸. در شکل ۲۷ـ۳۰ بار نقطه‌ای $q =$ ۱۲۶ nC را در مرکز یک کاواک کروی به شعاع ۳٫۶۶ cm در یک قطعه فلز نشان داده‌ایم. با استفاده از قانون گاؤس میدان الکتریکی را در نقطهٔ (الف) P_1، در وسط فاصلهٔ بین مرکز و سطح کاواک و (ب) P_2، در داخل فلز، بیابید.



شکل ۲۷ـ۳۰ تمرین ۱۸.

۱۹. پروتونی درست در خارج ازکرهٔ بارداری به شعاع $r =$ ۱٫۱۳ cm با سرعت $v =$ ۲۹۴ km/s گرد آن می‌چرخد. بار روی کره را معین کنید.

۲۰. دو پوستهٔ نازک کروی هم‌مرکز باردار، به شعاعهای ۱۰٫۰ cm و ۱۵٫۰ cm در اختیار داریم. بار روی پوستهٔ داخلی ۴۰٫۶ nC و روی پوستهٔ خارجی ۱۹٫۳ nC است. میدان الکتریکی را در فاصله‌های (الف) $r =$ ۱۲٫۰ cm، (ب) ۲۲٫۰ cm، و (ج) $r =$ ۸٫۱۸ cm، از مرکز پوسته‌ها معین کنید.

۲۱. دو استوانهٔ دراز هم‌محور باردار با شعاعهای ۳٫۲۲ cm و ۶٫۱۸ cm در اختیار داریم. چگالی بار سطحی روی استوانهٔ داخلی ‎۲۴٫۱ μC/m²‎ و روی استوانهٔ خارجی ‎−۱۸٫۰ μC/m²‎ است. میدان الکتریکی را در (الف) $r =$ ۴٫۱۰ cm و (ب) $r =$ ۸٫۲۰ cm معین کنید.

۲۲. بار مثبت به‌طور یکنواخت در سرتاسر یک پوستهٔ استوانه‌ای نارسانای بلند به شعاع داخلی R و شعاع خارجی ۲R توزیع شده است. در چه فاصله‌ای بین R و ۲R شدت میدان الکتریکی نصف شدت میدان روی سطح پوسته است؟

۲۳. الکترونی با انرژی ۱۱۵ keV به سوی یک ورقهٔ پلاستیکی بزرگ و تخت که دارای چگالی بار سطحی ‎−۲٫۰۸ μC/m²‎ است شلیک می‌شود. الکترون را از چه فاصله‌ای باید شلیک کرد تا درست قبل از برخورد با صفحه باز گردد؟ (آثار نسبیتی را نادیده بگیرید.)

۲۴. یک سطح گاؤسی کروی در نظر بگیرید که مرکز آن روی یک خط بار نامتناهی باشد. شارگذرنده از کره را محاسبه کنید و از آنجا نشان دهید که قانون گاؤس معتبر است.

۲۵. بار به‌طور یکنواخت در سرتاسر یک استوانهٔ بینهایت بلند به شعاع R توزیع شده است. (الف) نشان دهید میدان E در فاصلهٔ r از محور استوانه ($r < R$) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

در اینجا ρ چگالی حجمی بار است. (ب) چه نتیجه‌ای را برای $r > R$ پیش‌بینی می‌کنید؟

۲۷ـ۶ قانون گاؤس و رساناها

۲۶. یک کرهٔ رسانا و با بار یکنواخت به شعاع ۱٫۲۲ m دارای چگالی سطحی بار ‎۸٫۱۳ μC/m²‎ است. (الف) بار موجود روی کره را پیدا کنید. (ب) شار الکتریکی کل که از سطح کره می‌گذرد چقدر است؟ (ج) میدان الکتریکی را روی سطح کره محاسبه کنید.

۲۷. سفینه‌های فضایی در عبور از کمربندهای تابشی زمین با الکترونهای به‌دام افتاده برخورد می‌کنند. چون در فضا جایی برای تخلیهٔ بار وجود ندارد، انباشتگی بار می‌تواند قابل ملاحظه شود و به اجزای قطعات الکترونیکی آسیب برساند و به آشفتگیهایی در مدار کنترل و ناهنجاریهایی در عملکرد بینجامد. بر روی یک ماهوارهٔ فلزی کروی‌شکل به قطر ۱٫۳ متر در یک چرخش مداری مقدار ‎۲٫۴ μC‎ بار جمع شود. (الف) چگالی بار سطحی را معین کنید. (ب) میدان الکتریکی حاصل از این بار را روی سطح ماهواره محاسبه کنید.

۲۸. معادلهٔ (۲۷ـ۱۸) ($E = \sigma/\epsilon_0$) میدان الکتریکی را در نقاط نزدیک به سطح یک رسانای باردار به‌دست می‌دهد. این معادله را در مورد یک کرهٔ رسانا به شعاع r، که در روی سطحش حامل بار q است به‌کار ببرید و نشان دهید که میدان الکتریکی در خارج از کره درست مانند میدان یک بار نقطه‌ای است که در مرکز کره قرار گرفته باشد.

۲۹. یک صفحهٔ فلزی به ضلع ۸٫۰ cm حامل بار خالص ‎۶٫۰ μC‎ است. (الف) با بهره‌گیری از تقریب صفحهٔ نامتناهی، میدان الکتریکی

را در فاصلهٔ $۰٫۵۰$ mm بالاتر از صفحه و در نزدیکی مرکز صفحه محاسبه کنید. (ب) میدان را در فاصلهٔ ۳۰ m برآورد کنید.

۲۷ـ۷ آزمونهای تجربی قانون گاؤس و قانون کولن

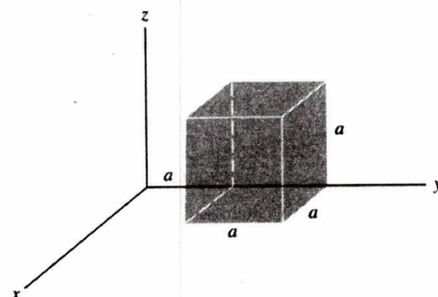
مسئله‌ها

۱. "قانون گاؤس برای گرانش" به‌صورت زیر است

$$\frac{۱}{۴\pi G}\Phi_g = \frac{۱}{۴\pi G}\oint \vec{\mathbf{g}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} = -m$$

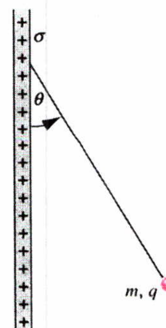
که در اینجا m جرم موجود در داخل سطح گاؤسی و G ثابت جهانی گرانش است. با استفاده از این رابطه، قانون گرانش نیوتون را به‌دست آورید. در این رابطه علامت منها چه اهمیتی دارد؟

۲. در شکل ۲۷ـ۳۱ مؤلفه‌های میدان الکتریکی عبارت‌اند از $E_x = E_z = ۰$، $E_y = by^{۱/۲}$، که در اینجا $b = ۸۸۳۰\ \mathrm{N/C\cdot m^{۱/۲}}$ است. (الف) شار Φ_E عبوری از مکعب را حساب کنید و (ب) بار موجود در آن را معین کنید. فرض کنید که $a = ۱۳٫۰$ cm است.



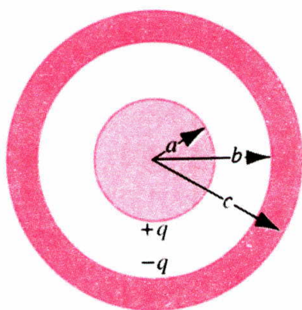
شکل ۲۷ـ۳۱ مسئلهٔ ۲.

۳. گوی کوچکی به جرم $m = ۱٫۱۲$ mg حامل بار $q = ۱۹٫۷$ nC است. این گوی در میدان گرانشی زمین از یک رشته نخ ابریشمی آویخته شده است که، مطابق شکل ۲۷ـ۳۲، با یک صفحهٔ نارسانای بزرگ باردار یکنواخت، زاویهٔ $\theta = ۲۷٫۴^\circ$ می‌سازد. چگالی بار سطحی یکنواخت σ این صفحه را محاسبه کنید.



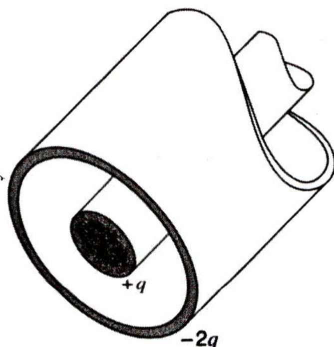
شکل ۲۷ـ۳۲ مسئلهٔ ۳.

۴. در شکل ۲۷ـ۳۳ نشان داده‌ایم که بار $q+$ به‌صورت یک کرهٔ رسانای یکنواخت به شعاع a در آمده و در مرکز یک پوستهٔ کروی رسانا با شعاع داخلی b و شعاع خارجی c قرارگرفته است. پوستهٔ خارجی حامل بار $q-$ است. میدان الکتریکی $E(r)$ را در مکانهای زیر به‌دست آورید: (الف) در داخل کره $(r < a)$، (ب) بین کره و پوسته $(a < r < b)$، (ج) در داخل پوسته $(b < r < c)$، و (د) در خارج پوسته $(r > c)$. (هـ) روی سطوح داخلی و خارجی پوستهٔ کروی چه بارهایی ظاهر می‌شوند؟



شکل ۲۷ـ۳۳ مسئلهٔ ۴.

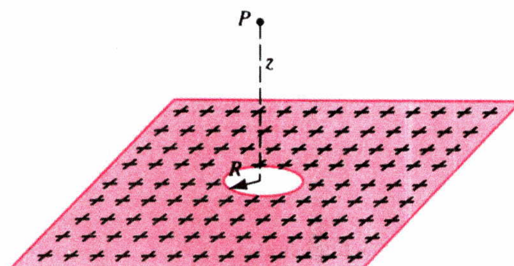
۵. یک استوانهٔ رسانای بسیار بلند (به طول L) حامل بار کل $q+$ است و یک پوستهٔ استوانه‌ای رسانا (آن هم به طول L) با بار کل $۲q-$ آن را احاطه کرده است. مقطع این مجموعه را در شکل ۲۷ـ۳۴ نشان داده‌ایم. با بهره‌گیری از قانون گاؤس کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) میدان الکتریکی در خارج از پوستهٔ استوانه‌ای رسانا، (ب) توزیع بار روی پوستهٔ استوانه‌ای و (ج) میدان الکتریکی در ناحیهٔ بین استوانه‌ها.



شکل ۲۷ـ۳۴ مسئلهٔ ۵.

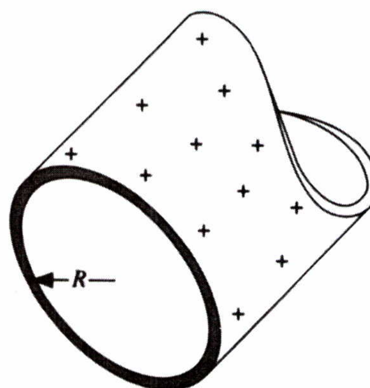
۶. یک برگهٔ نارسانای تخت و بزرگ حامل چگالی بار یکنواخت σ است. در وسط این برگه یک سوراخ دایره‌ای کوچک به شعاع R، مطابق

شکل ۲۷ـ۳۵، ایجاد شده است. با چشمپوشی از مسائل حاشیه‌ای مربوط به خطهای میدان در لبه‌ها، میدان الکتریکی را در نقطهٔ P، در فاصلهٔ z از مرکز سوراخ و در امتداد محور آن تعیین کنید. (راهنمایی: به معادلهٔ (۲۶ـ۱۹) رجوع و از اصل برهم‌نهی استفاده کنید.)



شکل ۲۷ـ۳۵ مسئلهٔ ۶.

۷. در شکل ۲۷ـ۳۶ بخشی از یک لولهٔ فلزی دراز با جدارهٔ نازک به شعاع R را نشان داده‌ایم، که در سطحش حامل بار بر واحد طول λ است. رابطه‌هایی را برای میدان الکتریکی در فاصله‌های متفاوت r از محور لوله در حالتهای (الف) $r > R$ و (ب) $r < R$ به‌دست آورید. (ج) نتیجه‌های به‌دست‌آمده را با این فرض که $\lambda = ۲٫۰ \times ۱۰^{-۸} \mathrm{C/m}$ و $R = ۳٫۰ \mathrm{~cm}$، در فاصلهٔ $r = ۰$ تا $r = ۵٫۰ \mathrm{~cm}$ رسم کنید. (راهنمایی: سطحهای گاؤسی را استوانه‌ای، هم‌محور با لوله درنظر بگیرید.)



شکل ۲۷ـ۳۶ مسئلهٔ ۷.

۸. در شکل ۲۷ـ۳۷ مقطعی از دو پوستهٔ استوانه‌ای هم‌مرکز نازک دراز با شعاعهای a و b را نشان داده‌ایم. استوانه‌ها حامل بار بر واحد طول مساوی و با علامت مخالف λ هستند. از قانون گاؤس بهره بگیرید و ثابت کنید که (الف) برای $r < a$ داریم $E = ۰$ و (ب) در فاصلهٔ بین دو استوانه میدان E از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

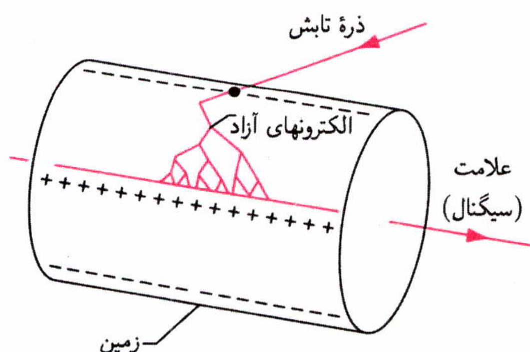
$$E = \frac{۱}{۲\pi\epsilon_۰} \frac{\lambda}{r}$$



شکل ۲۷ـ۳۷ مسئلهٔ ۸.

۹. در ترتیب هندسی مسئلهٔ ۸ پوزیترونی در مسیر دایره‌ای و هم‌مرکز با استوانه‌ها در فاصلهٔ بین آنها می‌چرخد. انرژی جنبشی آن را برحسب الکترون‌ولت تعیین کنید. فرض کنید $\lambda = ۳۰ \mathrm{~nC/m}$ است. (چرا نیازی نیست شعاع استوانه‌ها را بدانیم؟)

۱۰. در شکل ۲۷ـ۳۸ یک شمارگر گایگر را نشان داده‌ایم که برای آشکارسازی تابش یونندە مورد استفاده قرار می‌گیرد. شمارگر تشکیل شده است از یک سیم نازک مرکزی حامل بار مثبت که به‌وسیلهٔ یک استوانهٔ دایره‌ای هم‌محور رسانا احاطه شده است. این استوانه حامل همان مقدار بار با علامت منفی است. به این ترتیب یک میدان الکتریکی شعاعی قوی در استوانه به‌وجود می‌آید. استوانه حاوی یک گاز بی‌اثر با فشار کم است. وقتی ذره‌ای تابشی از دیوارهٔ استوانه وارد آن می‌شود، چند اتم از گاز بی‌اثر را یونیده می‌کند. الکترونهای آزاد حاصل از عمل یونش به طرف سیم مثبت کشیده می‌شوند. ولی، میدان الکتریکی آن به‌قدری شدید است که الکترونها بین برخوردهای متوالی با اتمهای گاز به‌قدر کافی انرژی به‌دست می‌آورند که این اتمها را نیز یونیده کنند. در اینجا تعداد بیشتری الکترون آزاد به‌وجود می‌آید و



شکل ۲۷ـ۳۸ مسئلهٔ ۱۰.

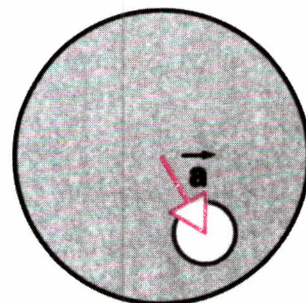
این فرایند تکرار می‌شود تا الکترونها به سیم برسند. "بهمن" الکترونها که توسط سیم گردآوری می‌شود، سیگنالی را به‌وجود می‌آورد که نشانهٔ عبور ذرهٔ فرودی است. فرض کنید که شعاع سیم میانی برابر $۲۵\mu\text{m}$، شعاع استوانه $۱٫۴\,\text{cm}$، و طول استوانه $۱۶\,\text{cm}$ باشد. میدان الکتریکی روی جدارهٔ داخلی استوانه $۲٫۹ \times ۱۰^۴\,\text{N/C}$ است. مقدار بار مثبت واقع بر سیم مرکزی را محاسبه کنید. (راهنمایی: نگاه کنید به مسئلهٔ ۸.)

۱۱. بار نقطه‌ای q را در مرکز یک پوستهٔ کروی فلزی نازک بدون بار قرار می‌دهیم. با بهره‌گیری از قانون گاؤس عبارتی را برای میدان الکتریکی (الف) در داخل پوسته و (ب) خارج از پوسته، به‌دست آورید. (ج) آیا پوسته هیچ تأثیری بر میدان ناشی از q دارد؟ (د) آیا وجود بار q هیچ تأثیری روی پوسته دارد؟ (ه) اگر یک بار نقطه‌ای دیگر را در خارج از پوسته نگه داریم، آیا بر این بار بیرونی نیرویی وارد می‌شود؟ (و) آیا بر بار داخلی نیرویی وارد می‌شود؟ (ز) آیا در اینجا تناقضی با قانون سوم نیوتون وجود دارد؟ اگر پاسخ آری یا خیر است، دلیل آن را بیان کنید.

۱۲. ذرات غبار باردار، که هرکدام حامل یک الکترون اضافی و همگی دارای جرم یکسان هستند در فضای میان‌ستاره‌ای، ابر کروی یکنواخت پایداری را تشکیل می‌دهند. جرم هر ذره را معین کنید.

۱۳. در ناحیهٔ کروی $a < r < b$ بار با چگالی حجمی $\rho = A/r$ توزیع شده است، که در آن A مقداری ثابت است. در مرکز این کره ($r = ۰$) بار نقطه‌ای q قرار گرفته است. برای اینکه بزرگی شدت میدان الکتریکی در ناحیهٔ $a < r < b$ ثابت بماند، مقدار ثابت A چقدر باید باشد؟

۱۴. یک ناحیهٔ کروی حامل بار بر واحد حجم یکنواخت ρ است. فرض کنید $\vec{\mathbf{r}}$ برداری است که مرکز کره را به یک نقطهٔ عمومی P در داخل کره وصل می‌کند. (الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطهٔ P از رابطهٔ $\vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{r}}/۳\epsilon_۰$ به‌دست می‌آید. (ب) در داخل این کره، مطابق شکل ۲۷ـ۳۹، یک کاواک کروی ایجاد می‌کنیم. با بهره‌گیری از مفاهیم برهم‌نهی، نشان دهید که میدان الکتریکی در تمام نقاط واقع در داخل کاواک برابر است با $\vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{a}}/۳\epsilon_۰$ (میدان یکنواخت است)، در اینجا $\vec{\mathbf{a}}$ برداری است که مرکز کره را به مرکز کاواک متصل می‌کند. توجه کنید که هر دو نتیجه مستقل از شعاعهای کره و کاواک است.



شکل ۲۷ـ۳۹ مسئلهٔ ۱۴.

۱۵. نشان دهید که تعادل پایدار با اعمال نیروهای الکتروستاتیکی به تنهایی حاصل نمی‌شود. (راهنمایی: فرض کنید که اگر بار $+q$ در نقطه‌ای مانند P در میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ قرار گیرد در حال تعادل پایدار خواهد بود. یک سطح گاؤسی کروی در اطراف نقطهٔ P رسم کنید، و مجسم کنید که میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در روی این سطح باید چه جهتی داشته باشد، اکنون قانون گاؤس را اعمال کنید تا نشان دهد که فرض به تناقض می‌انجامد.) این نتیجه به نام قضیهٔ اِرْن‌شاو مشهور است.

۱۶. یک تیغهٔ تخت به ضخامت d دارای چگالی حجمی بار یکنواخت ρ است. شدت میدان الکتریکی در تمام نقطه‌های فضای (الف) داخل و (ب) خارج از تیغه را برحسب x، که فاصلهٔ نقطه مورد نظر از صفحهٔ میانی تیغه است، به‌دست آورید.

۱۷. کرهٔ نارسانایی به شعاع R دارای توزیع بار نایکنواختی است که در آن چگالی بار با $\rho = \rho_S r/R$ مشخص شده است. در این رابطه ρ_S ثابت و r فاصلهٔ نقطه از مرکز کره است. نشان دهید که (الف) بار کل موجود در کره $Q = \pi\rho_S R^۳$ است و (ب) میدان الکتریکی در داخل کره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\,\frac{Q}{R^۴}\,r^۲$$

۱۸. یک رسانای منزوی با شکل دلخواه حامل بار خالص $+۱۰\mu\text{C}$ است. در داخل این رسانا یک کاواک توخالی وجود دارد که در داخل آن بار نقطه‌ای $q = +۳٫۰\mu\text{C}$ قرار گرفته است. بار الکتریکی (الف) روی دیوارهٔ کاواک و (ب) روی سطح خارجی رسانا چقدر است؟

۱۹. کرهٔ رسانایی را که حامل بار Q است یک پوستهٔ رسانای کروی احاطه کرده است. (الف) بار خالص روی جدار داخلی پوسته چقدر است؟ (ب) بار دیگری به اندازهٔ q در خارج از پوسته قرار می‌دهیم. اکنون بار خالص روی سطح داخلی پوسته چقدر است؟ (ج) اگر بار q را در جایی بین پوسته و کره قرار دهیم، مقدار بار خالص روی سطح داخلی پوسته چقدر می‌شود؟ (د) آیا اگر کره و پوسته هم‌مرکز نباشند جوابهایتان معتبر است؟

مسئله‌های کامپیوتری

۱. درستی قانون گاؤس را با محاسبه‌های عددی تحقیق کنید. بار نقطه‌ای $q = 1\,\text{nC}$ در فاصلهٔ ۰٫۵m در خارج از سطح کره‌ای به شعاع $r = 1{,}0\,\text{m}$ قرارگرفته است. شار الکتریکی گذرنده ازکره را محاسبه کنید.

۲. درستی قانون گاؤس را با محاسبه‌های عددی تحقیق کنید. بار نقطه‌ای $q = 1\,\text{nC}$ در نیمراه بین مرکز و سطح کره‌ای به شعاع $r = 1{,}0\,\text{m}$ قرار گرفته است. شار الکتریکی گذرنده از سطح کره را محاسبه کنید.

۳. بار نقطه‌ای $q = 1{,}0\,\mu\text{C}$ روی محور سطحی استوانه‌ای به شعاع $r = 0{,}5\,\text{m}$ و طول $L = 3{,}0\,\text{m}$ قرار گرفته است. این بار در فاصلهٔ ۱٫۰ m از یک انتها و ۲٫۰ m از انتهای دیگر قرار دارد. (الف) شار الکتریکی گذرنده از سطح خمیدهٔ استوانه را به‌صورت عددی محاسبه کنید. (ب) به‌صورت تحلیلی پاسخ خودتان را مورد تحقیق و ارزیابی قرار دهید. (یادآوری: در اینجا هیچ‌گونه انتگرال‌گیری ضرورت ندارد!)

۲۸

انرژی پتانسیل و پتانسیل الکتریکی

در فصلهای ۱۱ تا ۱۳ آموختیم که روشهای مبتنی بر مفهومهای انرژی، شناخت و بصیرت تازه‌ای را در درک علم مکانیک ارائه می‌دهد و اغلب ساده‌سازیهایی را در حل مسئله‌های مکانیک فراهم می‌آورد. در فصل ۱۴ از روشهای مبتنی بر انرژی پتانسیل در مواردی که نیروی گرانشی در آنها دخالت داشت استفاده کردیم، تا ویژگیهایی مانند حرکت ماهواره‌ها و سیاره‌ها را معین کنیم.

در این فصل، از روش انرژی برای مطالعهٔ الکتروستاتیک استفاده می‌کنیم. این کار را با انرژی پتانسیل الکتریکی شروع می‌کنیم، کمیتی نرده‌ای که مشخص‌کنندهٔ یک نیروی الکتروستاتیکی است، درست همان‌طور که انرژی پتانسیل گرانشی مشخص‌کنندهٔ یک نیروی گرانشی است. سپس این موضوع را به مفهوم پتانسیل الکتریکی تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم که چگونه پتانسیل الکتریکی مربوط به توزیعهای گوناگون گسسته و پیوستهٔ بار را معین کنیم.

۲۸ـ۱ انرژی پتانسیل

اغلب پدیده‌های الکتریکی با انتقال هنگفتی انرژی همراه است. مثلاً، وقتی آذرخشی از ابر به زمین برخورد می‌کند، انرژی در حدود $10^{8}\,\mathrm{J}$ به‌صورت درخشش برق، صدای رعد، گرما، و موج صوتی آزاد می‌شود. این انرژی از کجا می‌آید، و چگونه در ابر ذخیره می‌شود؟ برای درک دقیق این پرسش، باید انرژی وابسته به نیروهای الکتریکی را مورد توجه قرار دهیم.

قانون نیروی الکتروستاتیکی بسیار شبیه قانون نیروی گرانشی است:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{الکتروستاتیک} \qquad \text{(۲۸ـ۱الف)}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{گرانش} \qquad \text{(۲۸ـ۱ب)}$$

هر دو نیرو به عکس مربع فاصلهٔ بین دو جسم وابسته‌اند. وقتی جسم تحت تأثیر نیروی گرانشی جسم دیگری از یک مکان به مکان دیگر حرکت می‌کند (که فرض می‌کنیم جسم واردکنندهٔ نیرو ساکن باشد)، کار انجام‌شده توسط نیروی گرانشی روی جسم اول فقط به نقطه‌های آغاز و پایان حرکت بستگی دارد و به مسیری که بین این نقطه‌ها پیموده شده است بستگی ندارد. در بخش ۱۲ـ۱ نیرویی که این سرشت ویژه را داشت به‌عنوان نیروی پایستار معرفی کردیم، و در بخش ۱۲ـ۲ به این نتیجه رسیدیم که برای یک نیروی پایستار می‌توانیم یک انرژی پتانسیل تعریف کنیم. وقتی که جسم از وضعیت آغازین به وضعیت پایانی می‌رود اختلاف در انرژی پتانسیل، ΔUی، سیستم برابر است با منفی کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ نیرو:

$$\Delta U = U_\mathrm{f} - U_\mathrm{i} = -W_\mathrm{if} = -\int_\mathrm{i}^\mathrm{f} \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \text{(۲۸ـ۲)}$$

که در اینجا W_if کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ است، وقتی که جسم از موقعیت اولیهٔ i به موقعیت پایانی f می‌رود. در بخش ۱۴ـ۶، در مورد

نیروی گرانشی، نشان دادیم که، وقتی جسمی به جرم $m_۲$ از فاصلهٔ r_i نسبت به جرم $m_۱$ حرکت کرده و به فاصلهٔ r_f از آن می‌رسد، اختلاف در انرژی پتانسیل آن عبارت است از

$$\Delta U = -Gm_۱m_۲\left(\frac{۱}{r_f} - \frac{۱}{r_i}\right) \qquad (۳\text{ـ}۲۸)$$

این اختلاف در انرژی پتانسیل وابسته است به کل سیستم متشکل از $m_۱$ و $m_۲$ و ارتباطی به هیچ‌یک از دو جرم به تنهایی ندارد.

به دلیل همانندی قانونهای نیروی مربوط به الکتروستاتیک و گرانش، می‌توانیم همان نتیجه‌گیری را که در مورد نیروی گرانش کردیم، در مورد نیروی الکتروستاتیک نیز اعمال کنیم: نیروی الکتروستاتیک یک نیروی پایستار است، و بنابراین در پیوند با پیکربندی (وضعیت نسبی اجسام) سیستمی که نیروی الکتروستاتیک در آن عمل می‌کند یک انرژی پتانسیل وجود دارد.

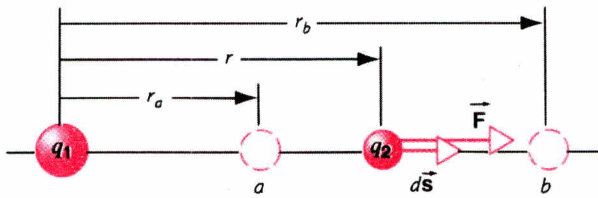
چرا این رهیافت در مورد نیروهای الکتروستاتیک مفید است؟ در مکانیک آموختیم که برای تحلیل مسائل دو روش وجود دارد. یک روش بر نیرو (یک بردار) پایه‌گذاری شده است و به ما این امکان را می‌دهد که مکان و سرعت یک جسم را در هر نقطه‌ای از مسیر حرکتش معین کنیم. رهیافت دیگر بر انرژی (یک کمیت اسکالر) استوار است و این امکان را فراهم می‌آورد که تعیین کنیم چگونه یک سیستم در حرکت از یک حالت آغازی معین به یک حالت پایانی مشخص تغییر می‌کند. به روشی همانند در خواهیم یافت که به هنگام مطالعهٔ برهم‌کنشهای بین اجسام باردار هر دو رهیافت مفیدند.

یک ویژگی مهم وجود دارد که در آن نیروی الکتروستاتیک با نیروی گرانش فرق می‌کند: نیروی گرانشی همواره بالینی است، در حالی که نیروهای الکتروستاتیک (برحسب اینکه علامت نسبی بارها چه باشد) ممکن است ربایشی یا رانشی باشند. این تفاوت می‌تواند در علامت انرژی پتانسیل تأثیر بگذارد، ولی به هیچ‌وجه نمی‌تواند استدلال مبتنی بر تشابه بین دو نیرو را تغییر دهد.

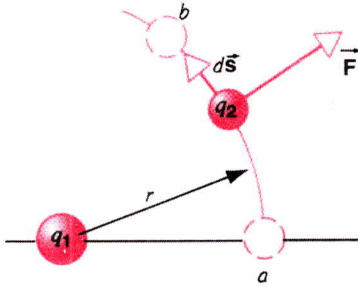
۲ـ۲۸ انرژی پتانسیل الکتریکی

در این بخش برای تعیین انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش بین دو بار الکتریکی، از نیروی الکتروستاتیک مورد بحث در فصل ۲۵ بهره می‌گیریم، و سپس محاسبات را گسترش می‌دهیم تا مجموعه‌های بیش از دو بار الکتریکی را در برگیرد.

با پذیرفتن نتیجهٔ بخش قبلی دال بر اینکه نیروی الکتروستاتیک نیرویی پایستار است، می‌توانیم تغییر در انرژی پتانسیل سیستم متشکل



شکل ۱ـ۲۸ ذرهٔ باردار $q_۲$ تحت تأثیر نیروی الکتروستاتیک $\vec{\mathbf{F}}$ واردشده از طرف بار $q_۱$ از نقطهٔ a به نقطهٔ b می‌رود. نقطه‌های a و b در امتداد خط واصل بین بارهای $q_۱$ و $q_۲$ قرار دارند.



شکل ۲ـ۲۸ حرکت از a به b در این حالت در امتداد مسیری با شعاع ثابت r است.

از دو بار را، وقتی که بار $q_۲$ تحت تأثیر نیروی ناشی از بار ساکن $q_۱$ از نقطهٔ a به نقطهٔ b می‌رود، محاسبه کنیم. در حال حاضر فرض می‌کنیم که هر دو بار الکتریکی مثبت باشند. شکل ۱ـ۲۸ آرایش هندسی این فرایند را نشان می‌دهد. با این فرض که حرکت از a به b در امتداد خطی انجام می‌شود که بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را به‌هم متصل می‌کند، مسئله را تا حدودی ساده کرده‌ایم. (بعداً این استدلال را به سایر انواع جابه‌جاییها تعمیم می‌دهیم.) فرض می‌کنیم که مبدأ مختصات در مکان ذرهٔ $q_۱$ قرار داشته باشد، r، مکان ذرهٔ $q_۲$ را نسبت به این مبدأ مشخص کند. در شکل ۲ـ۲۸، بردار $d\vec{s}$ یک جابه‌جایی بینهایت کوچک را، در راستای حرکت از a به b، نشان می‌دهد. در این حرکت نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ و جابه‌جایی $d\vec{s}$ همواره موازی‌اند، و در نتیجه $\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{s} = F\,ds$. برای حرکت نشان داده‌شده در شکل ۱ـ۲۸، $ds = dr$ است، زیرا جابه‌جایی همواره در راستای r انجام می‌شود. با انجام این جانشانیها، معادلهٔ (۲ـ۲۸) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta U = -\int_a^b \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{s} = -\int_a^b F\,dr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r^۲}dr \qquad (۴\text{ـ}۲۸)$$

با انجام عمل انتگرال‌گیری می‌رسیم به

$$\Delta U = U_b - U_a = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}q_۱q_۲\left(\frac{۱}{r_b} - \frac{۱}{r_a}\right) \qquad (۵\text{ـ}۲۸)$$

معادلهٔ (۲۸ـ۵)، اعم از اینکه بار $q_۲$ به سمت بار $q_۱$ حرکت کند یا از آن دور شود، معتبر است. اگر $q_۲$ به سمت $q_۱$ برود، در آن صورت $r_b < r_a$ و $\Delta U > ۰$ است؛ یعنی، اگر بارها به یکدیگر نزدیکتر شوند انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد. اگر $q_۲$ از $q_۱$ دور شود، در آن صورت $r_b > r_a$ و $\Delta U < ۰$ است؛ یعنی، وقتی بارها از هم دور می‌شوند انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.

معادلهٔ (۲۸ـ۵)، اعم از اینکه علامت بارهای الکتریکی مثبت یا منفی باشد، همواره معتبر است. اگر هر دو بار منفی باشند، واضح است که همان نتیجهٔ قبلی را به‌دست می‌آوریم. اگر علامت بارهای الکتریکی مخالف یکدیگر باشند (یکی مثبت و دیگری منفی)، در آن صورت نیروی بین آنها ربایشی است. اگر بردار نیروی نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۱ در جهت عکس باشد، داریم

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -F\ ds = -F\ dr = -\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲}dr$$

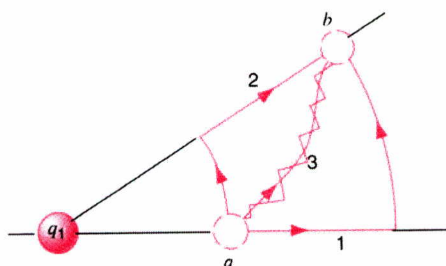
$$= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r^۲}dr \qquad (۲۸\text{ـ}۶)$$

که تساوی آخر را به این دلیل نوشتیم که هرگاه یک بار مثبت و بار دیگر منفی باشد $q_۱q_۲ = -|q_۱||q_۲|$ است. حاصل این عمل همان انتگرالده معادلهٔ (۲۸ـ۴) است، و از آن‌رو انتگرال همان نتیجهٔ قبلی را به‌دست می‌دهد.

وقتی بارهای الکتریکی دارای علامتهای مخالف هستند، به‌طوری که عبارت $q_۱q_۲$ در معادلهٔ (۲۸ـ۵) منفی شود، در آن صورت وقتی بارها به‌هم نزدیکتر می‌شوند $\Delta U < ۰$ و وقتی بارها از هم دور می‌شوند، $\Delta U > ۰$ است.

تصور کنید که $q_۲$ را در راستایی حرکت دهیم که در امتداد خط واصل بین $q_۱$ و $q_۲$ نیست. شکل ۲۸ـ۲ نشان می‌دهد که $q_۲$ در امتداد کمانی از دایره‌ای به شعاع r و به مرکز $q_۱$ از نقطهٔ a به نقطهٔ b حرکت می‌کند. در امتداد این مسیر، $\vec{\mathbf{F}}$ همواره عمود است بر $d\vec{\mathbf{s}}$، و در نتیجه برای تمام مسیر $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = ۰$ است. در امتداد این مسیر نیروی الکتروستاتیک هیچ کاری انجام نمی‌دهد، و بنابراین $\Delta U = ۰$ است.

برای اینکه $q_۲$ را بین نقطه‌های دلخواه a و b، مطابق شکل ۲۸ـ۳، حرکت دهیم، می‌توانیم مجموعه‌ای از مسیرهای گوناگون اختیار کنیم. در امتداد مسیرهای ۱ و ۲، اختلاف انرژی پتانسیل ΔU برای بخش شعاعی مسیرها (خط راست) با معادلهٔ (۲۸ـ۵) داده شده است و برای بخش مماسی مسیرها (خط خمیده) $\Delta U = ۰$ است. مسیر



شکل ۲۸ـ۳ بار الکتریکی $q_۲$ در امتداد چندین مسیر ممکن، بین نقطه‌های دلخواه a و b حرکت می‌کند.

دلخواه شمارهٔ ۳ را می‌توانیم به مجموعه‌ای از گامهای کوتاه شعاعی و مماسی تقسیم کنیم. در امتداد هریک از گامهای مماسی $\Delta U = ۰$ است، در صورتی که کل ΔU در امتداد تمامی گامهای شعاعی با معادلهٔ (۲۸ـ۵) داده شده است. نتیجه‌گیری نهایی آن است که معادلهٔ (۲۸ـ۵) کل تغییر در انرژی پتانسیل ΔU را برای هر مسیری بین نقطهٔ a، که در فاصلهٔ r_a از $q_۱$ قرار دارد، و نقطهٔ b، که در فاصلهٔ r_b از $q_۱$ قرار دارد، به‌دست می‌دهد و موقعیت این نقطه‌ها اصلاً نقشی در نتیجه نهایی ندارد. این رفتار با بیان نیروی الکتروستاتیک نیرویی پایستار است سازگاری دارد، و این بدان معنی است که کار و از آن‌رو تغییر انرژی پتانسیل در گذر از a به b به مسیر بستگی ندارد.

تا اینجا دربارهٔ اختلاف انرژی پتانسیل بین دو نقطه بحث کردیم: $\Delta U = U_b - U_a$. می‌توانیم این بحث را گسترش دهیم تا انرژی پتانسیل را در یک نقطه مانند b تعریف کنیم. این کار را با انتخاب یک نقطهٔ مرجع، a، برای انرژی پتانسیل و نسبت دادن یک مقدار مرجع به انرژی پتانسیل U_b انجام می‌دهیم. اغلب مناسب است که نقطهٔ مرجع را متناظر با فاصلهٔ بینهایت بین بارها انتخاب کنیم، و معمولاً مقدار مرجع را $U_a = ۰$ اختیار می‌کنیم. در این‌صورت، وقتی b را طوری انتخاب کنیم که هر نقطهٔ دلخواهی را در فاصلهٔ r نمایش دهد، معادلهٔ (۲۸ـ۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$U(r) = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r} \qquad (۲۸\text{ـ}۷)$$

در این عبارت، اگر بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هم‌علامت باشند، U کمیتی مثبت است که متناظر با یک نیروی رانشی است و اگر بارهای $q_۱$ و $q_۲$ با علامت مخالف باشند U منفی است که متناظر با نیرویی ربایشی است. اگر معادلهٔ (۲۸ـ۷) را با عبارت متناظر ارائه‌شده در معادلهٔ (۱۴ـ۱۷) برای انرژی پتانسیل گرانشی، یعنی $U(r) = -G\ m_۱m_۲/r$، مقایسه کنیم، درمی‌یابیم که انرژی پتانسیل گرانشی همواره منفی است، چون نیروی گرانش همواره ربایشی است. این رفتار با مقدار منفی انرژی

پتانسیل الکتروستاتیکی وقتی که علامت بارهای الکتریکی متفاوت و نیرو، ربایشی است سازگاری دارد.

پایستگی انرژی در الکتروستاتیک

در یک سیستم منزوی متشکل از دو بار الکتریکی، انرژی الکتریکی کل پایسته است: $E = K + U$. فرض می‌کنیم که بار $q_۱$ را در موقعیت ثابتی نگه داشتیم و بار $q_۲$ را از حال سکون در فاصلهٔ معینی از $q_۱$ رها می‌کنیم. اگر هر دو بار الکتریکی هم‌علامت باشند، در آن صورت وقتی بار $q_۲$ به‌وسیلهٔ نیروی رانشی از $q_۱$ رانده می‌شود $\Delta U < ۰$ است. در این حالت پایستگی انرژی مکانیکی کل ایجاب می‌کند که $\Delta U > ۰$ باشد، به‌طوری که سرعت $q_۳$ باید افزایش پیدا کند. برعکس اگر ما بار $q_۲$ را با انرژی جنبشی اولیهٔ معینی به‌سمت $q_۱$ پرتاب کنیم، در آن صورت با کاهش فاصلهٔ بین بارها $\Delta U > ۰$؛ و پایستگی انرژی مکانیکی کل ایجاب می‌کند که $\Delta K < ۰$، و از آن‌رو سرعت $q_۲$ کاهش می‌یابد. این نتیجه‌گیریها وقتی که بارها علامتهای متفاوت داشته باشند به‌طوری که نیرو ربایشی باشد، برعکس می‌شود.

در اینجا روش دیگری را برای مشاهده پایستگی انرژی در سیستمی متشکل از دو بار الکتریکی ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم که دو بار الکتریکی هم‌علامت باشند. از حالتی شروع می‌کنیم که دو بار الکتریکی در فاصلهٔ بسیار دور از یکدیگر در حالت سکون قرار گرفته‌اند، و ذرهٔ $q_۲$ را حرکت داده و آن را در فاصلهٔ معینی از بار $q_۱$ قرار می‌دهیم. برای انجام این کار، عامل خارجی که بار $q_۲$ را حرکت می‌دهد باید نیرویی در خلاف جهت رانش الکتروستاتیکی بین $q_۱$ و $q_۲$ اعمال کند. در انجام این عمل، عامل خارجی روی سیستم کار مثبت انجام می‌دهد، و در نتیجه انرژی سیستم افزایش پیدا می‌کند. به دلیل کار انجام‌شده توسط عامل خارجی، انرژی سیستم به اندازهٔ ΔU افزایش می‌یابد. به بیانی دیگر، عامل خارجی در داخل سیستم انرژی ذخیره کرده است. این ذخیرهٔ انرژی دقیقاً مشابه ذخیرهٔ انرژی به هنگامی است که یک عامل خارجی فنری را متراکم می‌کند. با رهاکردن بارها، می‌توانیم انرژی ذخیره‌شده را به‌صورت انرژی جنبشی ذرات متحرک بازیافت کنیم.

برعکس، اگر بارهای الکتریکی دارای علامتهای مخالف بودند، به‌طوری که نیروی الکتروستاتیک ربایشی می‌شد، در آن صورت عامل خارجی برای حرکت دادن بار $q_۲$ از فاصلهٔ بسیار دور و آوردن آن به مکان نزدیکتری به بار $q_۱$ و در حال سکون قرار دادن آن، باید روی سیستم کار منفی انجام بدهد. این عمل، انرژی ذخیره‌شده در سیستم را کاهش می‌دهد و در نتیجه قابل بازیافت نیست. (بدون حضور عامل خارجی، بار $q_۲$ به‌طور خودبه‌خود به‌سوی بار $q_۱$ شتاب می‌گیرد؛ عامل خارجی باید برای مقیدکردن بار $q_۲$ به‌منظور قرار دادن آن در حالت سکون در یک فاصلهٔ معین از $q_۱$ انرژی هزینه کند).

اگر بارهای $q_۱$ و $q_۲$ دارای علامتهای مخالف باشند و در آغاز در فاصلهٔ کمی از یکدیگر قرار داشته باشند، در آن صورت عامل خارجی باید روی سیستم کار مثبت ΔU انجام دهد تا آنها را از یکدیگر دور کند و در فاصلهٔ بسیار زیاد از یکدیگر قرار دهد. هنگامی که این مفهوم در مورد اتمها یا مولکولها به‌کار برده شود، این انرژی را ممکن است انرژی بستگی، انرژی یونش، یا انرژی تفکیک بخوانیم. این کمیت نشانگر مقدار انرژی خارجی است که باید فراهم آوریم تا مثلاً، یک الکترون را از یک اتم جدا کنیم یا مولکولی مانند KCL را به یونهای K^+ و CL^- جدا کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱ دو پروتون در هستهٔ یک اتم ^{۲۳۸}U در فاصلهٔ ۶٫۰ fm (فرمی) از یکدیگر قرار دارند. انرژی پتانسیل مربوط به نیروی الکتریکی بین دو ذره چقدر است؟

حل. از معادلهٔ (۲۸ـ۵)، با توجه به

$$q_۱ = q_۲ = +۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$$

به‌دست می‌آوریم

$$U = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r}$$
$$= \frac{(۸٫۹۹ \times ۱۰^۹\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})^۲}{۶٫۰ \times ۱۰^{-۱۵}\mathrm{m}}$$
$$= ۳٫۸ \times ۱۰^{-۱۴}\mathrm{J} = ۲٫۴ \times ۱۰^۵\mathrm{eV} = ۲۴۰\ \mathrm{keV}$$

در اینجا برای پیکربندی که در آن پروتونها بسیار دور از یکدیگر قرار دارند $U = ۰$ را اختیار می‌کنیم. پروتونها از یکدیگر دور نمی‌شوند زیرا یک نیروی ربایشی قوی که اجزای هسته را به‌هم پیوند می‌دهد آنها را در کنار هم نگه می‌دارد. برعکسِ نیروی الکتریکی، نیروی قوی را نمی‌توان با تابع انرژی پتانسیل ساده‌ای نشان داد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۲ دو جسم، یکی به جرم $m_۱ = ۰٫۰۰۲۲\ \mathrm{kg}$ و بار الکتریکی $q_۱ = +۳۲\mu\mathrm{C}$ و دیگری به جرم $m_۲ = ۰٫۰۰۳۹\ \mathrm{kg}$ و بار الکتریکی $q_۲ = -۱۸\mu\mathrm{C}$، در آغاز در فاصلهٔ ۴٫۶ cm از

یکدیگر قرار گرفته‌اند. جسم (۱) را در مکانی ثابت نگه می‌داریم و جسم (۲) را از حالت سکون رها می‌کنیم. وقتی که فاصلهٔ بین دو جسم برابر ۲٫۳ cm است، سرعت جسم (۲) چقدر است؟ فرض کنید که اجسام رفتاری شبیه بارهای نقطه‌ای دارند.

حل. وقتی که بارهای الکتریکی به یکدیگر نزدیک می‌شوند، و فقط تحت تأثیر نیروی الکتروستاتیک قرار دارند، کاهش در انرژی پتانسیل باید با افزایش متناظر در انرژی جنبشی متوازن شود. فرض کنید حالت آغازی لحظه‌ای باشد که جسم (۲) رها می‌شود (با $K_i = ۰$) و حالت پایانی لحظه‌ای باشد که فاصلهٔ بین دو جسم ۲٫۳ cm است. در آن صورت پایستگی انرژی نتیجه می‌دهد $U_i + K_i = U_f + K_f$، یا (با $K_i = ۰$)

$$K_f = U_i - U_f = -\Delta U = -\frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{۱}{r_f} - \frac{۱}{r_i}\right)$$

$$= -(۸٫۹۹ \times ۱۰^۹ \mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۳۲ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})$$

$$\times(-۱۸ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{C})\left(\frac{۱}{۰٫۰۲۳\,\mathrm{m}} - \frac{۱}{۰٫۰۴۶\,\mathrm{m}}\right)$$

$$= ۱۱۳\,\mathrm{J}$$

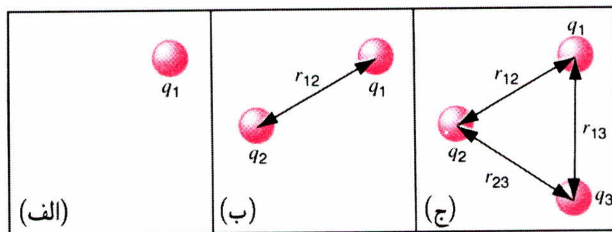
$$v_f = \sqrt{\frac{۲K_f}{m_۲}} = \sqrt{\frac{۲(۱۱۳\,\mathrm{J})}{۰٫۰۰۳۹\,\mathrm{kg}}} = ۲۴۰\,\mathrm{m/s}$$

اگر جسم (۲) را ثابت نگه می‌داشتیم و جسم (۱) را رها می‌کردیم، باز هم وقتی که فاصلهٔ بین دو جسم برابر ۲٫۳ cm می‌شد انرژی جنبشی همان مقدار ۱۱۳ J را داشت، زیرا انرژی ویژگی کل سیستم است. اگر هر دو ذره را از حالت سکون رها می‌کردیم و اجازه می‌دادیم که به سمت هم حرکت کنند، باز هم انرژی جنبشی کل دو ذره، وقتی فاصلهٔ بین آنها ۲٫۳ cm می‌شد، ۱۱۳ J بود. با استفاده از پایستگی تکانه می‌توانیم سرعت هر یک از دو ذره را معین کنیم.

انرژی پتانسیل سیستمی از بارها

فرض کنید که سه بار الکتریکی ($q_۱$، $q_۲$، $q_۳$) داریم که فاصلهٔ آنها از یکدیگر بینهایت است. در چنین پیکربندیی $U = ۰$. می‌خواهیم انرژی پتانسیل پیکربندی را بدانیم که بر اثر نزدیک‌شدن این سه بار الکتریکی به یکدیگر حاصل می‌شود.

در نظر بگیرید که ابتدا بار $q_۱$ را از بینهایت می‌آوریم و آن را در حالت سکون در موقعیت نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۴(الف) قرار می‌دهیم. از آنجا که این بار در این فرایند با هیچ بار دیگری برهم‌کنش



شکل ۲۸ـ۴ سیستمی متشکل از سه بار الکتریکی که در آغاز در فاصلهٔ بینهایت از یکدیگر قرار دارند.

نمی‌کند، هیچ تغییری در انرژی پتانسیل به‌وجود نمی‌آید؛ و باز هم برای این سیستم داریم $U = ۰$، زیرا فاصلهٔ بین بارها بینهایت باقی می‌ماند. حالا بار $q_۲$ را به فاصلهٔ معین $r_{۱۲}$ از بار $q_۱$ می‌آوریم (شکل ۲۸ـ۴(ب)). انرژی پتانسیل این پیکربندی بارهای $q_۱$ و $q_۲$ (نسبت به $U = ۰$ برای فاصلهٔ بینهایت) برابر $q_۱q_۲/۴\pi\epsilon_۰ r_{۱۲}$ است. سرانجام بار $q_۳$ را از بینهایت می‌آوریم و در فاصلهٔ $r_{۱۳}$ از بار $q_۱$ و فاصلهٔ $r_{۲۳}$ از بار $q_۲$ قرار می‌دهیم (شکل ۲۸ـ۴(ج)). چون بار $q_۳$ با هر دو ذرهٔ $q_۱$ و $q_۲$ برهم‌کنش انجام می‌دهد، در نتیجه دو جملهٔ دیگر در انرژی پتانسیل این پیکربندی نهایی مشارکت دارند: $q_۱q_۳/۴\pi\epsilon_۰ r_{۱۳}$ (برهم‌کنش بین $q_۱$ و $q_۳$) و $q_۲q_۳/۴\pi\epsilon_۰ r_{۲۳}$ (برهم‌کنش بین $q_۲$ و $q_۳$). بنابراین انرژی پتانسیل کل تمامی این سیستم برابر است با

$$U = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱q_۲}{r_{۱۲}} + \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱q_۳}{r_{۱۳}} + \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۲q_۳}{r_{۲۳}} \quad (۲۸\text{ـ}۸)$$

همان‌طور که معادلهٔ (۲۸ـ۸) به‌روشنی مشخص می‌کند، انرژی پتانسیل ویژگی سیستم است و به هیچ‌یک از بارها به تنهایی وابسته نیست.

می‌توانیم این فرایند را ادامه دهیم تا هر توزیع دلخواهی از بارها را به‌وجود آوریم. انرژی پتانسیل کل چنین سیستمی از بارها، مستقل از نظم و ترتیبی است که این بارها در کنار هم آورده شده‌اند.

از این مثال فوراً متوجه مزیت استفاده از روش انرژی برای تحلیل این سیستم می‌شویم: جمع موجود در معادلهٔ (۲۸ـ۸) یک جمع جبری از کمیتهای نرده‌ای است. اگر می‌خواستیم میدان الکتریکی سه ذرهٔ باردار را محاسبه کنیم، باید جمع برداری دشوارتری را انجام می‌دادیم.

در این فرایند به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که اصل برهم‌نهی معتبر است. قبلاً این اعمال را، که می‌گوید برهم‌کنش هر دو ذرهٔ باردار مستقل از حضور ذره‌های باردار دیگر است، در تحلیل جمع برداری به‌کار برده‌ایم. در اینجا می‌بینیم که نتیجه‌های یکسانی در مورد جمله‌های جمع نرده‌ای به‌کار می‌رود؛ مثلاً، جملهٔ انرژی پتانسیلی که برهم‌کنش بارهای $q_۱$ و $q_۳$ را توصیف می‌کند مستقل از حضور بار $q_۲$ است.

همان‌طور که در بالا بحث کردیم، اگر عامل خارجی برای تشکیل مجموعه‌ای از بارها با آوردن آنها از فاصلهٔ بینهایت و در کنار هم قراردادن آنها کار مثبت انجام دهد (در مقابله با نیروی رانشی موجود در فرایند)، انرژی پتانسیل کل، که از معادلهٔ (۲۸ـ۸) محاسبه می‌شود، مثبت است. در واقع عامل خارجی باعث ذخیرهٔ انرژی در سیستم بارها شده است. اگر بارها در مکان خودشان رها شوند، تمایل دارند که از هم دور شوند، و همزمان با کاهش انرژی پتانسیل انرژی جنبشی افزایش پیدا می‌کند. اگر انرژی پتانسیل کل منفی باشد، در آن صورت عامل خارجی در تشکیل سیستم بارهای الکتریکی کار منفی انجام داده است. در این حالت، عامل خارجی برای تجزیهٔ سیستم بارهای الکتریکی باید انرژی بیشتری را به شکل کار فراهم آورد تا بارها را به فاصله بینهایت از هم ببرد.

این دیدگاه از انرژی پتانسیل را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

> انرژی پتانسیل الکتریکی سیستمی از بارهای الکتریکی نقطه‌ای ثابت برابر است با کاری که عامل خارجی باید برای گردآوری سیستم با آوردن بارها از بینهایت به مکانهای موردنظر انجام دهد. بارها در مکانهای آغازی و پایانی در حال سکون‌اند.

به‌طور ضمنی در این دیدگاه نقطهٔ مرجع انرژی پتانسیل به‌صورت وضعیتی تعریف شد که در آن بارهای الکتریکی در فاصلهٔ بینهایت از یکدیگر قرار داشته باشند، که در آن وضعیت مقدار مرجع برای انرژی پتانسیل را صفر اختیار می‌کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۳ در سیستم شکل ۲۸ـ۴، فرض کنید که $r_{۱۲}=r_{۱۳}=r_{۲۳}=d=۱۲\,\text{cm}$، و اینکه $q_۱=+q$، $q_۲=-۴q$، و $q_۳=+۲q$، که در اینجا $q=۱۵۰\,\text{nC}$ است. انرژی پتانسیل این سیستم چقدر است؟ فرض کنید که وقتی بارها در فاصلهٔ بینهایت از یکدیگر قرار دارند $U=۰$ باشد.

حل. با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۸)، داریم

$$U=\frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{(+q)(-۴q)}{d}+\frac{(+q)(+۲q)}{d}+\frac{(-۴q)(+۲q)}{d}\right)$$

$$=-\frac{۱۰q^۲}{۴\pi\epsilon_۰ d}$$

$$=-\frac{(۸{,}۹۹\times۱۰^۹\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{C}^۲)(۱۰)(۱۵۰\times۱۰^{-۹}\text{C})^۲}{۰{,}۱۲\,\text{m}}$$

$$=-۱{,}۷\times۱۰^{-۲}\text{J}=-۱۷\,\text{mJ}$$

انرژی پتانسیل منفی در این مورد به معنی آن است که عامل خارجی برای گردآوری این ساختار، با شروع از وضعیتی که سه ذرهٔ باردار در حالت سکون و در فاصلهٔ بینهایت از یکدیگر قرار دارند، کار منفی انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، یک عامل خارجی می‌تواند با انجام $+۱۷\,\text{mJ}$ کار، این ساختار را به‌طور کامل از هم جدا کند.

۲۸ـ۳ پتانسیل الکتریکی

تصور کنید که بار الکتریکی q در مبدأ دستگاه مختصات قرار گرفته است. بار الکتریکی دیگری مانند $q_۰$ را، که به آن "بار آزمون" می‌گوییم، تحت تأثیر نیروی ناشی از q از r_a به r_b می‌بریم. تغییر در انرژی پتانسیل ΔU مربوط به این سیستم متشکل از دو بار با معادلهٔ (۲۸ـ۵) داده شده است.

اگر می‌خواستیم از بار آزمونی با دو برابر مقدار استفاده کنیم، به دو برابر تغییر در انرژی پتانسیل دست می‌یافتیم؛ با بار آزمونی با سه برابر مقدار به تغییر در انرژی پتانسیل سه برابر می‌رسیدیم.

تغییر در انرژی پتانسیل با مقدار بار آزمون نسبت مستقیم دارد. به عبارت دیگر، کمیت $\Delta U/q_۰$ مستقل از مقدار بار آزمون است و فقط ویژگی بار مرکزی q است. این کمیت در تحلیل گسترهٔ وسیعی از مسائل الکتروستاتیک، حتی آن دسته از مسائلی که توزیع بار پیچیده‌تری دارند، بسیار سودمند است. در اینجا اختلاف پتانسیل الکتریکی ΔV را به‌صورت اختلاف انرژی پتانسیل الکتریکی به‌ازای واحد بار آزمون تعریف می‌کنیم:

$$\Delta V=\frac{\Delta U}{q_۰} \qquad (۹\text{ـ}۲۸)$$

یا

$$V_b-V_۰=\frac{U_b-U_a}{q_۰} \qquad (۱۰\text{ـ}۲۸)$$

همانند انرژی پتانسیل، پتانسیل الکتریکی یک کمیت نرده‌ای است. معمولاً به‌جای پتانسیل الکتریکی از واژهٔ "پتانسیل" به تنهایی استفاده می‌کنیم.

با بهره‌گیری از ارتباط بین کار و انرژی پتانسیل که با معادلهٔ (۲۸ـ۲) داده شده است، می‌توانیم اختلاف پتانسیل را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Delta V=-\frac{W_{ab}}{q_۰} \qquad (۱۱\text{ـ}۲۸)$$

که در اینجا W_{ab} عبارت است از کار انجام‌شده توسط نیروی الکتروستاتیک اعمال‌شده از طرف بار q بر بار $q_{\circ}$ وقتی که بار آزمون از a به b می‌رود.

با انتخاب نقطهٔ مرجع مناسب برای انرژی پتانسیل (مانند $U_a = \circ$ برای فاصلهٔ جدایی اولیهٔ بینهایت بین بارها) در بخش قبلی، معادلهٔ (۲۸ـ۷) را برای انرژی پتانسیل یک پیکربندی مشخص به‌دست آوردیم، و نه تغییر در انرژی پتانسیل ناشی از تغییر در پیکربندی. همین کار را می‌توانیم در مورد پتانسیل الکتریکی انجام دهیم. تنها تغییر در پتانسیل است که مفهوم فیزیکی دارد، در نتیجه این اختیار را داریم که نقطهٔ صفر و مقدار مرجع را برحسب تناسب و آسانی عملیات اختیار کنیم. هرگاه مقدار پتانسیل را برای نقطه‌هایی که در فاصلهٔ بینهایت دور از q قرار دارند برابر صفر اختیار کنیم، پتانسیل الکتریکی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$V = \frac{U}{q_{\circ}} \qquad (۲۸ـ۱۲)$$

در آرایش پیچیده‌ای که از چندین بار الکتریکی تشکیل شده است، پتانسیل V ممکن است مثبت، منفی، یا صفر باشد. پتانسیل در نقطه‌های نزدیک به یک بار مثبت منزوی مثبت است. اگر بخواهیم بار آزمون مثبت را از فاصلهٔ بینهایت دور به نقطه‌های نزدیک به یک بار مثبت بیاوریم، بار از مکانی که برای آن $V = \circ$ است به مکانی می‌رود که برای آن $V > \circ$ است. در نتیجه $\Delta V > \circ$ است و (بنابر معادلهٔ ۲۸ـ۹) $\Delta U > \circ$، حاکی از آن است که نیروی الکتریکی روی بار آزمون کار منفی انجام داده است، به همین ترتیب، در نزدیکی یک بار منفی منزوی پتانسیل منفی است؛ یعنی وقتی بار آزمون مثبت را از فاصلهٔ بینهایت دور نقطه‌های نزدیک می‌آوریم نیروی الکتریکی روی آن بار کار مثبت انجام می‌دهد.

اگر پتانسیل در نقطه‌ای برابر با صفر باشد، وقتی بار آزمون از فاصلهٔ بینهایت دور به آن نقطه آورده می‌شود، هیچ کار خالصی توسط نیروی الکتریکی روی آن انجام نمی‌شود، گرچه ممکن است که بار آزمون از منطقه‌هایی بگذرد که در آنجاها تحت تأثیر نیروهای الکتریکی روی آن انجام نمی‌شود، گرچه ممکن است که بار آزمون از منطقه‌هایی بگذرد که در آنجاها تحت تأثیر نیروهای الکتریکی ربایشی یا رانشی قرار بگیرد. پتانسیل صفر در یک نقطه الزاماً به معنی صفر بودن نیروی الکتریکی در آن نقطه نیست.

یکای SI پتانسیل که از معادلهٔ (۲۸ـ۹) نتیجه می‌شود ژول بر کولن است. این ترکیب از یکاها ولت (V) نامیده می‌شود:

$$۱ \text{ ولت} = \frac{\text{ژول}}{\text{کولن}} \qquad (۲۸ـ۱۳)$$

اغلب نام متداول "ولتاژ" برای پتانسیل یک نقطه به‌کار برده می‌شود، و بیشتر به‌جای اختلاف پتانسیل از "اختلاف ولتاژ" صحبت می‌کنیم. وقتی دو کاوهٔ یک ولت‌سنج را به دو نقطهٔ یک مدار الکتریکی وصل می‌کنید، اختلاف ولتاژ با اختلاف پتانسیل (برحسب ولت) بین آن نقطه‌ها را اندازه می‌گیرید.

قبلاً در این باره بحث کرده‌ایم که نیروی الکتریکی یک نیروی پایستار است، و در نتیجه اختلاف انرژی پتانسیل وقتی که یک بار آزمون بین دو نقطه جابه‌جا می‌شود فقط به موقعیت با مکان آن دو ذره بستگی دارد و به مسیری که برای رفتن از یک نقطه به نقطهٔ دیگر پیموده است وابسته نیست. بنابراین معادلهٔ (۲۸ـ۹) حاکی از آن است که اختلاف پتانسیل نیز به‌صورتی مشابه مستقل از مسیر باشد: اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه در یک میدان الکتریکی مستقل از مسیری است که بار آزمون در رفتن از یک نقطه به نقطهٔ دیگر پیموده است.

برای هر اختلاف پتانسیل دلخواه ΔV، بدون توجه به اینکه چه آرایشی از بارها آن را به‌وجود آورده است، معادلهٔ (۲۸ـ۹) را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\Delta U = q\Delta V \qquad (۲۸ـ۱۴)$$

که نشان می‌دهد، هرگاه بار الکتریکی q بین دو نقطه یا اختلاف پتانسیل ΔV حرکت کند، انرژی پتانسیل سیستم به اندازهٔ ΔU تغییر می‌کند که از معادلهٔ (۲۸ـ۱۴) به‌دست می‌آید. اختلاف پتانسیل ΔV توسط بارهای دیگری که ساکن و ثابت هستند ایجاد می‌شود. به‌طوری که حرکت بار q تغییری در اختلاف پتانسیل ΔV به‌وجود نمی‌آورد. با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۸ـ۱۴)، از معادلهٔ (۲۸ـ۱۳) می‌بینیم که اگر ΔV برحسب ولت و برحسب کولن بیان شود، آنگاه ΔU برحسب ژول به‌دست می‌آید.

از معادلهٔ (۲۸ـ۱۴) می‌بینیم که الکترون‌ولت که قبلاً آن را یکای انرژی معرفی کرده‌ایم، مستقیماً از تعریف پتانسیل با اختلاف پتانسیل به‌دست می‌آید. اگر ΔV را برحسب ولت و q را برحسب بار بنیادی e در نظر بگیریم. ΔU برحسب الکترون‌ولت (eV) به‌دست می‌آید. مثلاً، سیستمی مانند یک اتم کربن را درنظر بگیرید که شش الکترون آن جدا شده است ($q = +۶e$)، و در جایی حرکت می‌کند که در آن

اختلاف پتانسیل $\Delta V = ۲۰\ \text{kV}$ است. تغییر در انرژی پتانسیل این سیستم برابر است با

$$\Delta U = q\Delta V = (+۶e)(+۲۰\ \text{kV}) = +۱۲۰\ \text{keV}$$

انجام این‌گونه محاسبات یکای eV در بررسی و مطالعهٔ اتمها یا هسته‌ها، که در آنها بار برحسب e بیان می‌شود، بسیار مناسب است.

به‌خاطر داشته باشید که اختلاف پتانسیل دارای اهمیتی بنیادی است و معادلهٔ (۲۸ـ۱۲) به اختصاص اختیاری مقدار صفر به پتانسیل در نقطهٔ مرجع (در بینهایت) بستگی دارد: این پتانسیل مرجع را می‌توان هر مقدار دلخواه دیگری، مثلاً $-۱۰۰\ \text{V}$ در نظر گرفت. به‌صورتی مشابه. هر نقطهٔ مورد توافق دیگری را هم می‌توان مکان (یا موقعیت) مرجع اختیارکرد. در بسیاری از مسئله‌ها زمین را مرجع پتانسیل اختیار می‌کنیم و مقدار صفر را به آن نسبت می‌دهیم. محل نقطهٔ مرجع و مقدار پتانسیل در آن نقطه برای سهولت کار برگزیده می‌شود؛ سایر گزینه‌ها مقدار پتانسیل را در همه جا به یک اندازه تغییر می‌دهد اما نتایج مربوط به اختلاف پتانسیل را تغییر نمی‌دهد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۴ ذرهٔ آلفایی $(q = +۲e)$ در یک شتابدهندهٔ هسته‌ای از یک پایانه با پتانسیل $V_a = +۶{,}۵ \times ۱۰^۶\text{V}$ به پایانهٔ دیگر با پتانسیل $V_b = ۰$ می‌رود. (الف) انرژی پتانسیل سیستم چقدر تغییر می‌کند؟ (ب) با فرض اینکه پایانه‌ها و بارهای آنها جابه‌جا نمی‌شوند و نیز اینکه هیچ عامل خارجی روی این سیستم اثر نمی‌کند. تغییر در انرژی جنبشی ذره چقدر است؟

حل. (الف) از معادلهٔ (۲۸ـ۱۴)، داریم

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_b - U_a = q(V_b - V_a)\\ &= (+۲)(۱{,}۶ \times ۱۰^{-۹}\text{C})(۰ - ۶{,}۵ \times ۱۰^۶\text{V})\\ &= -۲{,}۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{J}\end{aligned}$$

(ب) اگر هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نشود، انرژی مکانیکی سیستم یعنی $E = U + K$ باید ثابت باقی بماند. یعنی $\Delta E = \Delta U + \Delta K = ۰$ و در نتیجه باید داشته باشیم

$$\Delta K = -\Delta U = +۲{,}۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{J}$$

در نتیجه ذرهٔ آلفا $۲{,}۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{J}$ انرژی جنبشی به‌دست می‌آورد، درست همان‌طور که جسم در حال سقوط در میدان گرانشی زمین دارای انرژی جنبشی می‌شود.

برای مشاهدهٔ ساده‌سازیهایی که حاصل می‌شود، سعی کنید این مسئله را مجدداً با یکاهای انرژی برحسب الکترون‌ولت (eV) حل کنید.

۲۸ـ۴ محاسبهٔ پتانسیل از میدان

تا به اینجا بارهای الکتریکی و برهم‌کنشهای آنها را با چهار خاصیت متفاوت مشخص کردیم که عبارت‌اند از: نیروی الکتریکی، میدان الکتریکی، انرژی پتانسیل الکتریکی، و پتانسیل الکتریکی. در جدول ۲۸ـ۱ این چهار خاصیت را نشان داده‌ایم. دو تا از این کمیتها بردارند (نیرو و میدان) و دوتای دیگر کمیتهای نرده‌ای (انرژی پتانسیل و پتانسیل). دو تا از این کمیتها برهم‌کنش بین دو ذره را با همدیگر مشخص می‌کنند (نیرو و انرژی پتانسیل) و دوتای دیگر نمایشگر آثار ناشی از وجود یک بار منفرد یا مجموعه‌ای از بارها در یک نقطه از فضا هستند (میدان و پتانسیل). پیکانهای دوسویهٔ موجود در جدول نشان می‌دهد که کمیتهای موجود در خانه‌های مجاور هم در جدول را می‌توان از یکدیگر محاسبه کرد؛ مثلاً $\vec{\mathbf{E}}$ را از $\vec{\mathbf{F}}$ (معادلهٔ ۲۶ـ۳)، U از $\vec{\mathbf{F}}$ (معادلهٔ ۲۸ـ۴)، و V از U (معادلهٔ ۲۸ـ۱۲). اکنون چهارمین ارتباط، یعنی ارتباط بین V و $\vec{\mathbf{E}}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ارتباط بین V و $\vec{\mathbf{E}}$ مستقیماً از تعریف پتانسیل در معادلهٔ (۲۸ـ۱۱) به‌دست می‌آید: $\Delta V = -W_{ab}/q_۰$. فرض کنید که بار آزمون $q_۰$ را در میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ از نقطهٔ a به نقطهٔ b می‌بریم. کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی $\vec{\mathbf{F}} = q_۰\vec{\mathbf{E}}$ را محاسبه می‌کنیم و می‌رسیم به

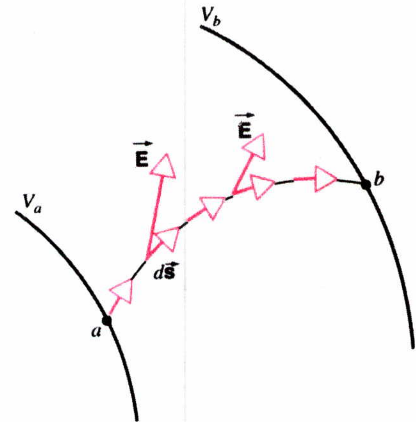
$$\Delta V = \frac{-W_{ab}}{q_۰} = \frac{-\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}}{q_۰} = \frac{-\int_a^b q_۰\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}}{q_۰}$$

یا

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (۲۸\text{ـ}۱۵)$$

جدول ۲۸ـ۱ خواص بارهای الکتریکی

	توصیف برداری	توصیف نرده‌ای
برهم‌کنش بین دو ذرهٔ باردار	نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ ↔	انرژی پتانسیل U
	↕	↕
اثر وجود یک بار یا مجموعه‌ای از بارها در یک نقطه از فضا	میدان $\vec{\mathbf{E}}$ ↔	پتانسیل V



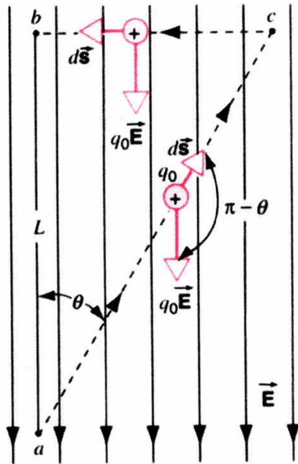
شکل ۲۸ـ۵ اختلاف پتانسیل بین نقاط a و b را می‌توان با محاسبهٔ انتگرال خطی $\vec{E}$ در امتداد مسیر ab معین کرد.

اگر میدان الکتریکی هم‌جهت با $d\vec{s}$ باشد. در آن صورت انتگرال معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) مثبت خواهد بود، و تغییر در پتانسیل منفی می‌شود؛ یعنی، $V_b < V_a$ است. میدان الکتریکی یک ذرهٔ دارای بار مثبت را از ناحیه‌ای با پتانسیل بالاتر به ناحیه‌ای با پتانسیل پایین‌تر، با یک ذرهٔ دارای بار منفی را در جهت برعکس حرکت می‌دهد.

انتگرالی از نوع انتگرال مطرح‌شده در معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) را انتگرال خطی می‌گوییم. در شکل ۲۸ـ۵ چگونگی محاسبه یک انتگرال خطی را نشان داده‌ایم. در امتداد هر مسیر مناسبی از a تا b انتگرال می‌گیریم؛ می‌دانیم که اختلاف پتانسیل یک کمیت مستقل از مسیر است. بنابراین صرف‌نظر از اینکه چه مسیری را انتخاب کنیم همواره جواب یکسانی را از معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) به‌دست می‌آوریم. در حالت کلی این امکان وجود دارد که در امتداد مسیر از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر اندازه و جهت بردار $\vec{E}$ تغییر کند. در هر گام از مسیر، حاصلضرب داخلی بردار $\vec{E}$ و نمو مسیر $d\vec{s}$ (که اساساً مؤلفهٔ $\vec{E}$ را در امتداد مسیر به‌دست می‌دهد) را پیدا می‌کنیم، و در این حاصلضربهای داخلی را در امتداد تمامی مسیر با هم جمع می‌کنیم.

همان‌طور که در بخش ۲۸ـ۳ عمل کردیم، ممکن است بخواهیم پتانسیل در یک نقطه را، نسبت به یک پتانسیل مرجع اختیاری، پیدا کنیم و نه اختلاف پتانسیل داده‌شده با معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) را. اگر نقطهٔ مرجع را در فاصلهٔ بینهایت در نظر بگیریم و مقدار مرجع را $V = 0$ تعریف کنیم، در آن صورت معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) مقدار پتانسیل در نقطهٔ P را به‌دست می‌دهد، یعنی

$$V_P = \int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (۲۸\text{ـ}۱۶)$$



شکل ۲۸ـ۶ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۵. بار آزمون q_0 در امتداد مسیر acb در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ حرکت می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۵ در شکل ۲۸ـ۶، بار آزمون q_0 در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ در امتداد مسیر acb از a تا b حرکت می‌کند. اختلاف پتانسیل بین نقاط a و b را معین کنید.

حل. از معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) برای مسیر ac داریم،

$$V_c - V_a = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_a^c E\, ds \cos(\pi - \theta)$$
$$= E\cos\theta \int_a^c ds$$

حاصل این انتگرال برابر طول خط ac و برابر است با $L/\cos$. به این ترتیب داریم

$$V_c - V_a = E\cos\theta \frac{L}{\cos\theta} = EL$$

نقاط b و c دارای پتانسیل یکسانی هستند زیرا برای جابه‌جاکردن بار بین این دو نقطه کاری انجام نشده است، برای تمام نقاط خط cb بردارهای $\vec{E}$ و $d\vec{s}$ برهم عمودند. به این ترتیب

$$V_b - V_a = (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 + EL = EL$$

این همان مقداری است که برای مسیر مستقیم بین a و b به‌دست می‌آید، نتیجه‌ای که انتظارش را هم داشتیم، زیرا اختلاف پتانسیل بین دو نقطه مستقل از مسیر پیموده‌شده بین آنهاست.

۲۸ـ۵ پتانسیل ناشی از بارهای نقطه‌ای

در این بخش برای به‌دست‌آوردن پتانسیل ناشی از آرایشهای گوناگون بارهای نقطه‌ای از نتیجه‌های مربوط به بخش پیشین استفاده می‌کنیم. در بخش بعدی پتانسیل ناشی از توزیعهای پیوستهٔ بار را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

ابتدا پتانسیل ناشی از یک بار مثبت نقطه‌ای، q را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنید که بار آزمون $q_۰$ در حوالی بار q از نقطهٔ a به نقطهٔ b می‌رود. می‌خواهیم از بار آزمون برای پیداکردن اختلاف پتانسیل ناشی از وجود بار q بین نقطه‌های a و b استفاده کنیم. برای این منظور می‌توانیم از آرایش هندسی شکل ۲۸ـ۱ بهره بگیریم، مشروط بر اینکه بار $q_۱$ را با بار q و بار $q_۲$ را با بار $q_۰$ جایگزین کنیم.

قبلاً تغییر در انرژی پتانسیل این وضعیت یعنی ΔU را معین کرده‌ایم، که برای دو بار نقطه‌ای با معادلهٔ (۲۸ـ۵) داده شده است. با نوشتن معادلهٔ (۲۸ـ۵) برای بارهای q و $q_۰$ و بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۸ـ۹) برای اختلاف پتانسیل، می‌رسیم به

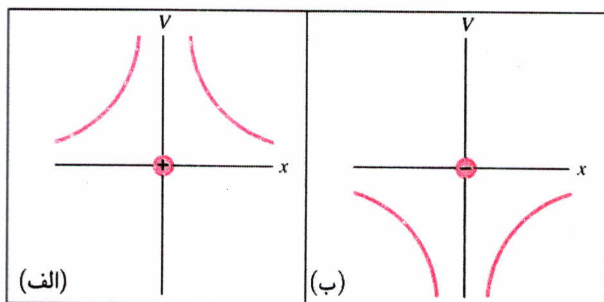
$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_۰} = \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{۱}{r_b} - \frac{۱}{r_a}\right) \quad (۱۷\text{ـ}۲۸)$$

همان‌طور که در بخش ۲۸ـ۲ بررسی کردیم، معادلهٔ (۲۸ـ۵) حتی اگر نقطه‌های a و b در امتداد یک خط نباشند معتبر است. معادلهٔ (۲۸ـ۱۷) برای اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه‌ای مانند a و b معتبر است.

به‌جای اختلاف پتانسیل بین دو نقطه، می‌توانیم پتانسیل مربوط به یک نقطهٔ منفرد را در نزدیکی بار q پیدا کنیم. معادلهٔ (۲۸ـ۷)، انرژی پتانسیل U ناشی از برهم‌کنش دوبار نقطه‌ای را به‌دست می‌دهد. نقطهٔ مرجع برای این عبارت را در بینهایت درنظر می‌گیریم، که در آنجا U را برابر صفر ($U = ۰$) اختیار می‌کنیم. می‌توانیم از معادلهٔ (۲۸ـ۷) برای یافتن پتانسیل یک نقطه استفاده کنیم. در این‌صورت باید معادله را برای q و $q_۰$ بنویسیم و از معادلهٔ (۲۸ـ۱۲) برای پتانسیل استفاده کنیم:

$$V = \frac{U}{q_۰} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{r} \quad (۱۸\text{ـ}۲۸)$$

که پتانسیل را برای هر نقطه‌ای به فاصلهٔ r از بار q به‌دست می‌دهد. توجه کنید که معادلهٔ (۲۸ـ۱۸) را می‌توانستیم مستقیماً، با اعمال شرط مربوط به نقطهٔ مرجع؛ یعنی $V_a = ۰$ در $r_a = \infty$، از معادلهٔ (۲۸ـ۱۷) به‌دست آوریم.



شکل ۲۸ـ۷ پتانسیل در امتداد یک بعد (که در اینجا محور x انتخاب شده است) برای (الف) یک بار نقطه‌ای مثبت و (ب) برای یک بار نقطه‌ای منفی. وقتی فاصله از بار الکتریکی به صفر می‌رسد اندازهٔ پتانسیل به بینهایت افزایش می‌یابد. پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای مثبت در همه جا مثبت، و پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای منفی در همه جا منفی است.

معادلهٔ (۲۸ـ۱۸) نشان می‌دهد که پتانسیل ناشی از یک بار مثبت نقطه‌ای در فاصله‌های بسیار دور صفر است و وقتی به بار نزدیک می‌شویم ($r \rightarrow ۰$) به مقادیر مثبت بزرگ می‌رسد. اگر بار q منفی باشد، در نزدیکی بار، پتانسیل به مقدارهای منفی بزرگ می‌رسد. توجه کنید این نتیجه‌ها به هیچ‌وجه به علامت بار آزمون $q_۰$ که در این محاسبه‌ها مورد استفاده قرار گرفت بستگی ندارد. در شکل ۲۸ـ۷ پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای مثبت و یک بار نقطه‌ای منفی را به‌صورت تابعی از فاصله نشان داده‌ایم.

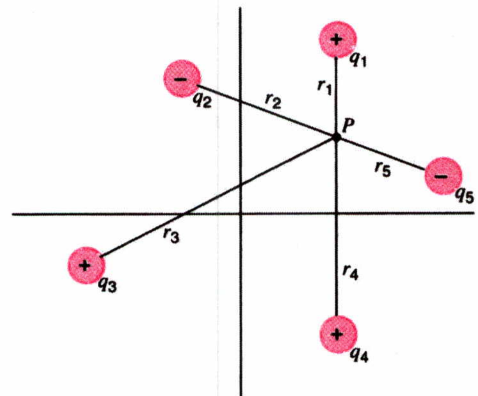
مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۶ برای اینکه پتانسیل الکتریکی یک بار مثبت منزوی در فاصلهٔ ۱۵ cm از آن برابر $+۱۲۰\ \text{V}$ باشد، بزرگی بار باید چقدر باشد؟ فرض کنید در بینهایت $v = ۰$

حل. از حل معادلهٔ (۲۸ـ۱۸) برای q نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} q &= ۴\pi\epsilon_۰ rV \\ &= (۴\pi)(۸{,}۹ \times ۱۰^{-۱۲}\text{C}^۲/\text{N}\cdot\text{m}^۲)(۰{,}۱۵\,\text{m})(۱۲۰\ \text{V}) \\ &= ۲{,}۰ \times ۱۰^{-۹}\text{C} = ۲{,}۰\ \text{nC} \end{aligned}$$

این بار، با آنچه بر اثر اصطکاک، مانند مالش یک بادکنک، تولید می‌شود، قابل مقایسه است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۷ پتانسیل الکتریکی در سطح هستهٔ طلا چقدر است؟ شعاع هستهٔ طلا $۷{,}۰ \times ۱۰^{-۱۵}\text{m}$ و عدد اتمی آن Z برابر ۷۹ است.



شکل ۲۸ـ۸ مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای.

حل. این هسته، با فرض تقارن کروی، برای نقاط خارجی، رفتاری مانند یک بار نقطه‌ای دارد. به این ترتیب می‌توان از معادلهٔ (۲۸ـ۱۸) با بار $q = +۷۹e$ استفاده کرد و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} V &= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{r} \\ &= \frac{(۹{,}۰ \times ۱۰^{۹}\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۷۹)(۱{,}۶ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})}{۷{,}۰ \times ۱۰^{-۱۵}\mathrm{m}} \\ &= ۱{,}۶ \times ۱۰^{۷}\mathrm{V} \end{aligned}$$

این پتانسیل مثبت بسیار بزرگ در خارج از اتم طلا هیچ تأثیری ندارد زیرا با پتانسیل منفی مربوط به ۷۹ الکترون اتمی که همان‌قدر بزرگ است خنثی می‌شود.

پتانسیل ناشی از مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای

مجموعه‌ای متشکل از N بار نقطه‌ای $q_۱$، $q_۲$، ...، q_N را که در مکانهای گوناگونی به‌طور مثبت قرار گرفته‌اند در نظر بگیرید (شکل ۲۸ـ۸). می‌خواهیم پتانسیل ناشی از این مجموعه از بارها را در نقطهٔ دلخواهی مانند P معین کنیم. روش کار برای محاسبهٔ پتانسیل ناشی از هر کدام از بارها در نقطهٔ P آن است که فرض کنیم هیچ‌یک از بارهای دیگر حضور ندارند و سپس پتانسیلهای به‌دست‌آمده به این ترتیب را با هم جمع کنیم تا پتانسیل کل را به‌دست آوریم. یعنی

$$\begin{aligned} V &= V_۱ + V_۲ + \ldots + V_N \\ &= \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱}{r_۱} + \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۲}{r_۲} + \ldots + \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_N}{r_N} \end{aligned}$$

(۲۸ـ۱۹)

که می‌توان آن را به‌صورت فشرده‌تر زیر بنویسیم

$$V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\sum_{n=۱}^{N}\frac{q_n}{r_n} \qquad (۲۸\text{ـ}۲۰)$$

که در این دو عبارت اخیر، q_n مقدار (اندازه و علامت) بار nام است و r_n فاصلهٔ بار nام تا نقطهٔ P است که می‌خواهیم پتانسیل را در آنجا معین کنیم.

مثلاً، می‌توانیم از معادلهٔ (۲۸ـ۲۰) برای محاسبهٔ کار انجام‌شده برای آوردن بار آزمون $q_۰$ از بینهایت به نقطهٔ موردنظر P (در شکل ۲۸ـ۸)، استفاده کنیم. برای انجام این محاسبه مزیت استفاده از پتانسیل را، که یک کمیت نرده‌ای است، به استفاده از نیرو، که یک کمیت برداری است مشاهده می‌کنیم. برای یافتن نیروی خالص وارد بر بار آزمون موجود در نقطهٔ P، ضرورت دارد که جمع برداری را مشخص کنیم. محاسبهٔ کمیت نرده‌ای پتانسیل بسیار ساده‌تر است.

در این محاسبه، سهم پتانسیل ناشی از هر بار را در صورت عدم حضور بقیهٔ بارها معین کردیم. این روش، نمونهٔ دیگری از کاربرد اصل برهم‌نهی است، که در ارتباط با نیروهای الکتریکی در فصل ۲۵ مورد بررسی قرار دادیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۸ پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P واقع در مرکز مربعی از بارهای نقطه‌ای در شکل ۲۸ـ۹(الف) محاسبه کنید. فرض کنید که $d = ۱{,}۳\,\mathrm{m}$ و مقدار بارها عبارت باشد از

$$q_۱ = +۱۲\,\mathrm{nC}, \quad q_۳ = +۳۱\,\mathrm{nC}$$
$$q_۲ = -۲۴\,\mathrm{nC}, \quad q_۴ = +۱۷\,\mathrm{nC}$$

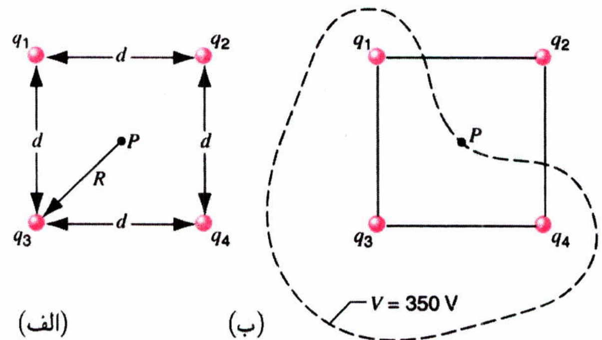
حل. از معادلهٔ (۲۸ـ۲۰) داریم

$$V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\sum_{n}\frac{q_n}{r_n} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q_۱ + q_۲ + q_۳ + q_۴}{R}$$

فاصلهٔ هر یک از بارها از مرکز مربع، یعنی R برابر است با $d/\sqrt{۲}$ یا $۰{,}۹۱۹\,\mathrm{m}$، به‌طوری که

$$\begin{aligned} V &= \frac{(۸{,}۹۹\times۱۰^{۹}\mathrm{N\cdot m^۲/C^۲})(۱۲-۲۴+۳۱+۱۷)\times۱۰^{-۹}\mathrm{C}}{۰{,}۹۱۹\,\mathrm{m}} \\ &= ۳{,}۵ \times ۱۰^{۲}\mathrm{V} \end{aligned}$$

در نزدیکی هر یک از سه بار مثبت در شکل ۲۸ـ۹(الف) پتانسیل

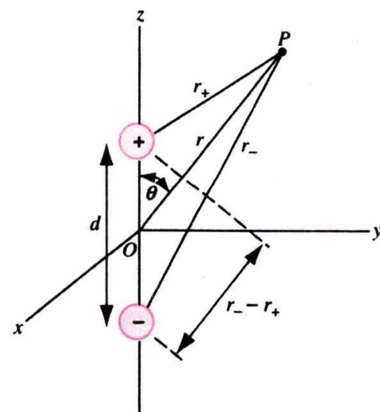


شکل ۲۸ـ۹ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۸. (الف) چهار بار در چهار رأس یک مربع قرار گرفته‌اند. (ب) خط‌چین خمیده نقاطی را که دارای پتانسیل یکسان با نقطهٔ P در مرکز مربع (یعنی $350\ V$) هستند به‌هم متصل می‌کند.

می‌تواند مقدارهای مثبت بسیار بزرگی را اختیار کند. در نزدیکی بار منفی موجود در آن شکل، پتانسیل می‌تواند مقدارهای منفی بزرگی داشته باشد. بنابراین این در محدودهٔ مربع نقطه‌های دیگری نیز باید وجود داشته باشند که در آنها پتانسیل برای پتانسیل در نقطهٔ P است. خط‌چین شکل ۲۸ـ۹(ب) سایر نقطه‌های صفحه را که دارای همان مقدار پتانسیل هستند به‌هم متصل می‌کند. همان‌گونه که بعداً در بخش ۲۸ـ۸ بحث خواهیم کرد، این سطوح هم‌پتانسیل روش مفیدی را برای تجسم پتانسیلهای مربوط به توزیع بارهای متفاوت فراهم می‌آورند.

پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی

پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی را می‌توان مستقیماً با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۲۰) محاسبه کرد. شکل ۲۸ـ۱۰ ساختار هندسی این محاسبه را نشان می‌دهد. مبدأ دستگاه مختصات را در مرکز دوقطبی



شکل ۲۸ـ۱۰ ساختار هندسی یک دوقطبی الکتریکی برای محاسبهٔ پتانسیل آن در نقطهٔ P.

قرار می‌دهیم، و پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P که در فاصلهٔ r از مرکز دوقطبی قرار دارد و با محور دوقطبی (محور z) زاویهٔ θ می‌سازد محاسبه می‌کنیم. فاصلهٔ بارهای مثبت و منفی از نقطهٔ P به‌ترتیب عبارت‌اند از r_+ و r_-. با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۲۰)، درمی‌یابیم که پتانسیل برابر است با

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right) \qquad (۲۸\text{ـ}۲۱)$$

معادلهٔ (۲۸ـ۲۱) عبارت دقیق مربوط به پتانسیل ناشی از دوقطبی است. ولی، در بسیاری از کاربردها (مانند دوقطبیهای اتمی و مولکولی)، با توجه به اینکه نقطهٔ مشاهدهٔ P معمولاً در فاصلهٔ بسیار دوری از دوقطبی قرار دارد، می‌توانیم رابطهٔ سودمندتری به‌دست آوریم. در اینجا وقتی از فاصلهٔ دور صحبت می‌کنیم منظورمان این است که فاصلهٔ نقطهٔ مشاهده در مقایسه با فاصلهٔ بین بارها بسیار بزرگ است؛ یعنی، $r \gg d$. در این حالت، داریم

$$r_- - r_+ \approx d\cos\theta \quad \text{و} \quad r_-r_+ \approx r^2$$

از جانشانی این مقدارها در معادلهٔ (۲۸ـ۲۱) می‌رسیم به

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad (۲۸\text{ـ}۲۲)$$

که در اینجا از معادلهٔ (۲۶ـ۸) برای گشتاور دوقطبی $(p = qd)$ استفاده کردیم. معادلهٔ (۲۸ـ۲۲) پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی را در هر نقطه‌ای از فضا به‌دست می‌دهد. دوقطبی دارای تقارنی استوانه‌ای برای دوران حول محور z است، در نتیجه معادلهٔ (۲۸ـ۲۲) برای نقطه‌هایی معتبر است که در صفحهٔ نمودار شکل ۲۸ـ۱۰ قرار نمی‌گیرند.

توجه کنید که پتانسیل ناشی از دوقطبی به‌صورت تابعی از $1/r^2$ تغییر می‌کند. این رفتار با پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای، که به‌صورت $1/r$ تغییر می‌کند (معادلهٔ ۲۸ـ۱۸ را ببینید)، ناسازگار است.

معادلهٔ (۲۸ـ۲۲) نشان می‌دهد که به‌ازای $\theta = 90^\circ$، که متناظر با نقطه‌های واقع در صفحهٔ xy شکل ۲۸ـ۱۰ است، داریم $V = 0$. این گزاره به این معنی است که اگر بار آزمونی را از بینهایت به نقطه‌ای واقع در صفحهٔ xy بیاوریم، دوقطبی هیچ کار خالصی روی بار آزمون انجام نمی‌دهد. برای یک r معین، پتانسیل از مقادیر مثبت روی جهت مثبت محور z $(\theta = 0)$ تغییر می‌کند و در صفحهٔ xy $(\theta = 90^\circ)$ به صفر می‌رسد و باز هم تغییر می‌کند و در امتداد محور منفی z $(\theta = 180^\circ)$ منفی می‌شود.

توجه کنید که، گرچه در صفحهٔ xy مقدار $V = 0$ است، ولی میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در آن صفحه صفر نیست. در حالت کلی نمی‌توانیم فرض کنیم که، $V = 0$ به معنی $\vec{\mathbf{E}} = 0$ است یا اینکه $\vec{\mathbf{E}} = 0$ به معنی $V = 0$ است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۹ چهارقطبی الکتریکی تشکیل شده است از دو دوقطبی الکتریکی که طوری قرار گرفته‌اند که اثرهای الکتریکی یکدیگر را تقریباً، ولی نه به‌طور کامل، در نقطه‌های دوردست خنثی می‌کنند (شکل ۲۸ـ۱۱). پتانسیل $V(r)$ را برای نقطه‌های روی محور این چهارقطبی محاسبه کنید.

حل. با به‌کارگیری معادلهٔ (۲۸ـ۲۰) در مورد شکل ۲۸ـ۱۱ داریم

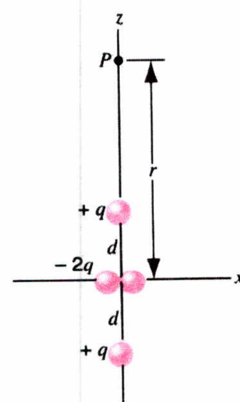
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q\,d^2}{r(r^2-d^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q\,d^2}{r^3(1-d^2/r^2)}$$

چون $r \gg d$، می‌توان از d^2/r^2 در مقایسه با ۱ چشم پوشید، در این‌صورت پتانسیل به شکل زیر در می‌آید:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^3} \qquad (۲۸\text{ـ}۲۳)$$

که در این معادله $Q(=2qd^2)$ گشتاور چهار قطبی‌الکتریکی مربوط به مجموعه بارهای شکل ۲۸ـ۱۱ است. توجه کنید که V برای (۱) بار نقطه‌ای به‌صورت $1/r$ (نگاه کنید به معادلهٔ ۲۸ـ۱۸)، (۲) دوقطبی به‌صورت $1/r^2$، و (۳) چهارقطبی به‌صورت $1/r^3$ (نگاه کنید به معادلهٔ ۲۸ـ۲۳) تغییر می‌کند.



شکل ۲۸ـ۱۱ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۹. یک چهارقطبی الکتریکی، متشکل از دو دوقطبی الکتریکی که جهت آنها مخالف یکدیگر است.

همچنین توجه کنید که (۱) دوقطبی شامل دو بار مساوی و با علامتهای مخالف است که در فضا کاملاً بر هم منطبق نمی‌شوند و آثار الکتریکی آنها در نقطه‌های دوردست کاملاً یکدیگر را خنثی نمی‌کنند و (۲) چهارقطبی شامل دو دوقطبی مساوی و در جهتهای مخالف است که در فضا کاملاً بر هم منطبق نیستند به‌طوری که آثار آنها در فاصله‌های دوردست کاملاً خنثی نمی‌شود. می‌توان به همین ترتیب کار را ادامه داد و مجموعه‌های پیچیده‌تری از بارهای الکتریکی را ساخت. این فرایند سودمند است، زیرا پتانسیل الکتریکی هر توزیع باری را می‌توان به‌صورت سری جملاتی با توان صعودی $1/r$ نوشت. جزء $1/r$، که جملهٔ تک‌قطبی خوانده می‌شود، به بار خالص توزیع بستگی دارد، جملاتی که پس از آن می‌آیند ($1/r^2$ جملهٔ دوقطبی؛ $1/r^3$ جملهٔ چهارقطبی؛ و مانند آن) چگونگی توزیع بار را معین می‌کنند. این‌گونه تحلیل از توزیع بارها را بسط چندقطبیها می‌خوانیم.

۲۸ـ۶ پتانسیل الکتریکی توزیعهای پیوستهٔ بار

در بخش ۲۵ـ۵ روش محاسبهٔ نیروی اعمال‌شده از طرف یک توزیع پیوستهٔ بار را بر یک بار نقطه‌ای معرفی کردیم. به‌صورتی مشابه می‌توانیم انرژی پتانسیل مربوط به برهم‌کنش بین یک توزیع پیوستهٔ بار و یک بار نقطه‌ای را به‌دست آوریم، این کار را با محاسبهٔ پتانسیل ناشی از توزیع بار انجام می‌دهیم. در این بخش پتانسیل مربوط به همان سه نوع توزیع بار بررسی‌شده در بخش ۲۵ـ۵ را محاسبه می‌کنیم.

برای محاسبهٔ پتانسیل الکتریکی توزیع پیوسته‌ای از بارهای الکتریکی، مشابه همان روشی را دنبال می‌کنیم که برای محاسبهٔ نیرو (یا در بخش ۲۶ـ۴ برای محاسبهٔ میدان الکتریکی) به کار بردیم. این کار را با یک استثنای عمده انجام می‌دهیم: پتانسیل کمیتی نرده‌ای است، و از آن‌رو با دشواریهایی که در بخش ۲۵ـ۵ به علت اختلاف در راستاهای عنصر نیروی $d\vec{\mathbf{F}}$ یا میدان $d\vec{\mathbf{E}}$ ناشی از عنصرهای متفاوت بار dq مواجه می‌شدیم، دیگر روبه‌رو نیستیم.

مراحل محاسبهٔ پتانسیل را با تقسیم جسم به عنصرهای بار dq آغاز می‌کنیم. می‌توانیم پتانسیل dV ناشی از بار dq را با فرض اینکه این عنصر بار مانند یک بار نقطه‌ای عمل می‌کند محاسبه کنیم:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad (۲۸\text{ـ}۲۴)$$

که در اینجا r فاصلهٔ نقطهٔ مشاهدهٔ P از بار dq است. پتانسیل کل را با انجام عمل جمع روی سهم مربوط به تمام عنصرهای بار جسم

به‌دست می‌آوریم:

$$V = \int dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int \frac{dq}{r} \qquad (۲۵\text{ـ}۲۸)$$

که انتگرال‌گیری روی تمامی عنصرهای توزیع بار انجام می‌شود.

توزیع یکنواخت بار روی یک خط

می‌توانیم از آرایش هندسی شکل ۲۸ـ۱۲ برای تعیین پتانسیل ناشی از توزیع خطی یکنواخت بار مثبت در نقطهٔ P استفاده کنیم، که در فاصلهٔ y از میله و روی عمودمنصف آن قرار دارد. با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۸ـ۲۴)، و استفاده از عنصر بار $dq = \lambda dz$ (که λ چگالی خطی بار الکتریکی است)، داریم

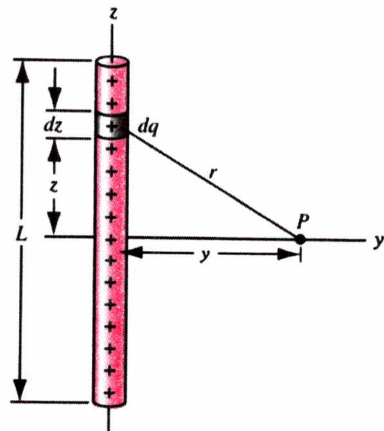
$$dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{dq}{r} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{\lambda dz}{\sqrt{z^۲+y^۲}} \qquad (۲۶\text{ـ}۲۸)$$

با انجام عمل انتگرال‌گیری روی طول L، همانند عملی که در معادلهٔ (۲۸ـ۲۵) صورت می‌گیرد، و توجه به اینکه y مقداری ثابت است، می‌رسیم به

$$V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\int_{-L/۲}^{+L/۲}\frac{\lambda dz}{\sqrt{z^۲+y^۲}}$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\epsilon_۰}\left[\ln\left(z+\sqrt{z^۲+y^۲}\right)\right]_{-L/۲}^{+L/۲}$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\epsilon_۰}\ln\left[\frac{L/۲+\sqrt{L^۲/۴+y^۲}}{-L/۲+\sqrt{L^۲/۴+y^۲}}\right] \qquad (۲۷\text{ـ}۲۸)$$



شکل ۲۸ـ۱۲ یک میلهٔ یکنواخت باردارشده. برای تعیین پتانسیل ناشی از این توزیع بار در نقطه P، میله را به‌صورت تعداد بسیار زیادی عنصر بار مانند dq درنظر می‌گیریم.

که در اینجا برای رسیدن به جواب نهایی، از تساوی $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$، استفاده کردیم.

بررسی این نتیجه و مشاهدهٔ اینکه آیا مقدار حدی درستی را به‌دست می‌دهد، مهم است. وقتی که از میله دور می‌شویم، انتظار داریم که پتانسیل به‌سمت صفر میل کند، که معادلهٔ (۲۸ـ۲۷) این خاصیت را برای وقتی که $y \to \infty$ می‌رود داراست. علاوه بر آن می‌توانیم نشان دهیم که وقتی که y مقادیر بزرگی را اختیار می‌کند، معادلهٔ (۲۸ـ۲۷) به‌صورت زیر در می‌آید

$$V \approx \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{\lambda L}{y} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{y} \qquad (۲۸\text{ـ}۲۸)$$

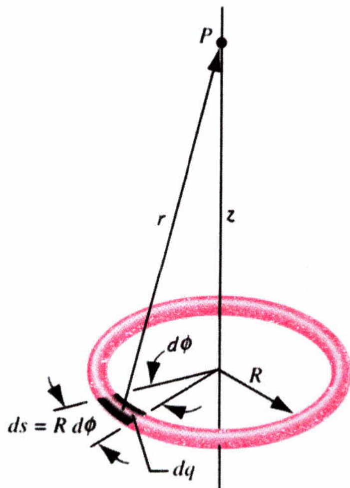
که این همان پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای در فاصلهٔ y است. وقتی که خیلی از میله دور شویم، میله به‌صورت بار نقطه‌ای به‌نظر می‌رسد.

حلقه‌ای از بار الکتریکی

در شکل ۲۸ـ۱۳ حلقه‌ای حاوی بار یکنواخت مثبت را نشان داده‌ایم. سهم عنصر بار $dq = \lambda ds = \lambda R d\phi$ در پتانسیل ناشی از این توزیع بار در نقطهٔ P روی محور این حلقه برابر است بار

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{dq}{r} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{\lambda R\, d\phi}{\sqrt{R^۲+z^۲}} \qquad (۲۹\text{ـ}۲۸)$$

با انجام انتگرال‌گیری روی حلقه به همان صورتی که در بخش ۲۵ـ۵ عمل کردیم، در می‌یابیم که R و z هر دو ثابت باقی می‌مانند. متغیر



شکل ۲۸ـ۱۳ حلقه‌ای با بار الکتریکی یکنواخت. برای تعیین پتانسیل این توزیع بار در نقطهٔ P، سهم کلیهٔ عنصرهای بار مانند dq را با هم جمع می‌کنیم.

انتگرال‌گیری $d\phi$ است، که بین ۰ و ۲π تغییر می‌کند.

$$V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^۲+z^۲}}\int_۰^{۲\pi} d\phi = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{۲\pi\lambda R}{\sqrt{R^۲+z^۲}} \quad (۲۸\text{_}۳۰)$$

توجه کنید که وقتی $z \to \infty$، پتانسیل به سمت صفر میل می‌کند و برای zهای بزرگ پتانسیل دارای مقدار تقریبی $q/۴\pi\epsilon_۰ z$ می‌شود (که در اینجا $q = ۲\pi\lambda R$) و این همان نتیجه‌ای است که برای موقعیت z از بار نقطه‌ای انتظار داریم.

پتانسیل قرص باردار

با استفاده از آرایش هندسی ۲۸ـ۱۴، می‌توانیم برای تعیین پتانسیل dV ناشی از حلقهٔ باردار به شعاع w و بار $dq = \sigma dA$ با عنصر سطح $dA = ۲\pi w\, dw$، در نقطهٔ P از معادلهٔ (۲۸ـ۳۰) استفاده کنیم:

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{dq}{\sqrt{w^۲+z^۲}} = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{۲\pi\sigma w\, dw}{\sqrt{w^۲+z^۲}} \quad (۲۸\text{_}۳۱)$$

برای جمع‌کردن سهم مربوط به کلیهٔ حلقه‌هایی که قرص را تشکیل می‌دهند، روی متغیر w در گسترهٔ ۰ تا R انتگرال می‌گیریم:

$$V = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\int_۰^R \frac{w\, dw}{\sqrt{w^۲+z^۲}} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}\left(\sqrt{R^۲+z^۲} - |z|\right) \quad (۲۸\text{_}۳۲)$$

جملهٔ آخر معادلهٔ (۲۸ـ۳۲) از محاسبهٔ $\sqrt{z^۲}$ به‌دست می‌آید و به‌صورت $|z|$ نوشته شده است تا این معادله برای تمامی نقطه‌های روی محور z اعم از بالای قرص ($z > ۰$) یا پایین قرص ($z < ۰$) معتبر باقی بماند. پتانسیل در سطح قرص (جایی که $z = ۰$ است) بیشترین مقدار را دارد و با جابه‌جایی در امتداد محور z در هر یک از دو جهت مقدارش کاهش می‌یابد.

به‌ازای مقدارهای بزرگ z می‌توانیم از قضیهٔ دوجمله‌ای برای بسط عبارت ریشهٔ دوم در معادلهٔ (۲۸ـ۳۲) استفاده کنیم:

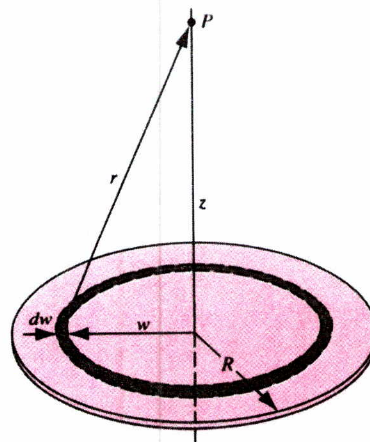
$$\sqrt{R^۲+z^۲} = |z|\left(۱+\frac{R^۲}{z^۲}\right)^{۱/۲} \approx |z|\left(۱+\frac{۱}{۲}\frac{R^۲}{z^۲}\right) \quad (۲۸\text{_}۳۳)$$

و با جانشانی این مقدار در معادلهٔ (۲۸ـ۳۲)، یک‌بار دیگر همان عبارت مربوط به پتانسیل بار نقطه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

برای مقادیر بسیار کوچک z، پتانسیل به‌صورت زیر است

$$V = \frac{\sigma R}{۲\epsilon_۰} - \frac{\sigma|z|}{۲\epsilon_۰} \quad (۲۸\text{_}۳۴)$$

وقتی که $z \to ۰$ پتانسیل به مقدار ثابت $\sigma R/۲\epsilon_۰$ نزدیک می‌شود و وقتی z هر یک از دو طرف قرص افزایش پیدا می‌کند، پتانسیل به‌طور خطی کاهش می‌یابد. آهنگ کاهش پتانسیل، وقتی در امتداد محور از قرص دور می‌شویم (که با جملهٔ دوم معادلهٔ (۲۸ـ۳۴) داده شده است)، برای چگالی بار معین، مستقل از اندازهٔ قرص است. در واقع، معلوم می‌شود که این مقدار برای تمام توزیع بارهای یکنواخت تخت و بزرگ، یکسان است و تا وقتی که مکان مشاهده در نزدیکی مرکز و از آن‌رو دور از لبه‌ها باشد، تغییرات پتانسیل به اندازه و شکل توزیع بار (دایره، مربع و غیره) ارتباطی پیدا نمی‌کند. در بخش بعدی از این واقعیت در ترسیم "نمودار" پتانسیل استفاده خواهیم کرد.



شکل ۲۸ـ۱۴ قرصی به شعاع R که حامل چگالی بار سطحی یکنواخت σ است. عنصر بار dq، مربوط به یک حلقهٔ یکنواخت باردار شده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۰ قرصی به شعاع $R = ۴٫۸\,\text{cm}$ حامل بار کل $q = +۲٫۵\,\text{nC}$ است که به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع و در مکانهای ثابت نگه داشته شده‌اند (تصور کنید که سطح همانند یک عایق رفتار کند). الکترونی در آغاز در حال سکون و در فاصلهٔ $d = ۳٫۰\,\text{cm}$ از قرص، در امتداد محور آن قرارگرفته است. وقتی که الکترون آزاد می‌شود، به‌سمت قرص جذب می‌شود. سرعت الکترون، وقتی در مرکز قرص با آن برخورد می‌کند، چقدر است؟

حل. چگالی بار روی قرص چنین است

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^۲} = \frac{۲٫۵\times ۱۰^{-۹}\text{C}}{\pi(۰٫۰۴۸\,\text{m})^۲} = ۳٫۴۵\times۱۰^{-۷}\text{C/m}^۲$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در مکانهای $z = d$ و $z = ۰$ را می‌توان از معادلهٔ (۲۸ـ۳۲) به‌دست آورد:

$$\Delta V = V(۰) - V(d) = \frac{\sigma R}{۲\epsilon_۰} - \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}(\sqrt{R^۲ + d^۲} - d)$$

$$= \frac{۳٫۴۵ \times ۱۰^{-۷} \mathrm{C/m^۲}}{۲(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} \mathrm{C^۲/N \cdot m^۲})}$$

$$[۰٫۰۴۸\,\mathrm{m} - (\sqrt{(۰٫۰۴۸\,\mathrm{m})^۲ + (۰٫۰۳۰\,\mathrm{m})^۲} - ۰٫۰۳۰\,\mathrm{m})]$$

$$= ۴۱۷\,\mathrm{V}$$

تغییر در انرژی پتانسیل الکترون، از معادلهٔ (۲۸ـ۱۴)، برابر است با

$$\Delta U = q\Delta V = (-۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})(۴۱۷\,\mathrm{V}) = -۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۷}\mathrm{J}$$

پایستگی انرژی نتیجه می‌دهد که $\Delta U + \Delta K = ۰$، یا $\Delta K = -\Delta U = +۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۷}\mathrm{J}$، و از آن‌رو داریم

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۷}\mathrm{J})}{۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg}}} = ۱٫۲۱ \times ۱۰^{۷}\mathrm{m/s}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۱ با استفاده از عبارت مربوط به میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه بار یکنواخت مثبت در نقطه‌ای روی محور حلقه (محور z)، عبارت مربوط به پتانسیل ناشی از حلقه را در نقطه‌ای به فاصلهٔ z' از آن و روی محور به‌دست آورید.

حل. معادلهٔ (۲۸ـ۱۶) ارتباط بین V و $\vec{\mathbf{E}}$ را به‌دست می‌دهد. میدان الکتریکی ناشی از حلقه با معادلهٔ (۲۶ـ۱۸) مشخص می‌شود. میدان الکتریکی فقط دارای مؤلفهٔ z است، در نتیجه انتگرالده معادلهٔ (۲۸ـ۱۶) به‌صورت $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E_z dz$ در می‌آید. حال از معادلهٔ (۲۸ـ۱۶) از بینهایت تا نقطهٔ P (نقطهٔ مشاهده) انتگرال می‌گیریم:

$$V_P = -\int_\infty^{z'} E_z dz = -\int_\infty^{z'} \frac{\lambda}{۲\epsilon_۰} \frac{Rz}{(z^۲ + R^۲)^{۳/۲}} dz$$

با انجام عمل انتگرال‌گیری می‌رسیم به

$$V_P = \frac{۱}{۲\epsilon_۰} \frac{\lambda R}{\sqrt{z'^۲ + R^۲}}$$

که با معادلهٔ (۲۸ـ۳۰)، که از انتگرال‌گیری روی توزیع بار حلقه به‌دست آمده، یکسان است.

۲۸ـ۷ محاسبهٔ میدان از پتانسیل

در بخش ۲۸ـ۴ روشی را برای تعیین اختلاف پتانسیل با بهره‌گیری از میدان الکتریکی توصیف کردیم. اکنون تشریح می‌کنیم که چگونه این عمل را در جهت وارونه انجام دهیم: یعنی با دانستن پتانسیل، بتوانیم میدان الکتریکی را معین کنیم. یعنی پیکان دوسویه‌ای که دو خانهٔ پایینی جدول ۲۸ـ۱ را به‌هم ارتباط می‌دهد، واقعاً می‌تواند در هر دو جهت عمل کند.

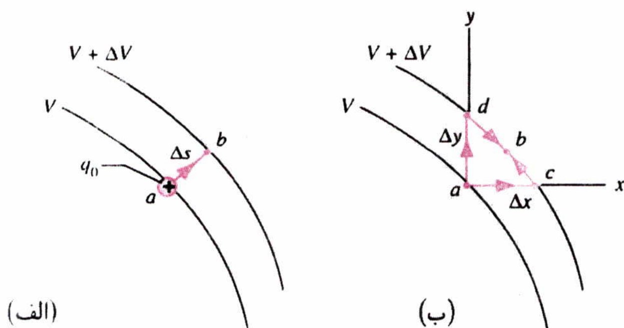
در شکل ۲۸ـ۱۵ (الف)، بار آزمون مثبت $q_۰$ را نشان داده‌ایم که از نقطهٔ a (با پتانسیل V) به نقطهٔ b (با پتانسیل $V + \Delta V$) می‌رود. در این فرایند، انرژی پتانسیل الکتریکی بار $q_۰$ به اندازهٔ $\Delta U = q_۰ \Delta V$ تغییر می‌کند. به زبان نیروها، می‌گوییم که در آنجا میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ وجود دارد که نیروی $\vec{\mathbf{F}} = q_۰ \vec{\mathbf{E}}$ را بر ذره وارد می‌آورد. کار انجام‌شده توسط این نیرو، روی این ذره به هنگام جابه‌جایی از a به b برابر است با $W = F_s \Delta s = q_۰ E_s \Delta s$، که در اینجا E_s و F_s مؤلفه‌های بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{F}}$ در امتداد Δs است، که جابه‌جایی ذره را از a به b نمایش می‌دهد. (فرض می‌کنیم که Δs کوچک باشد، به‌طوری که بتوانیم نیرو و میدان را به‌طور تقریبی، هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت در امتداد ab، ثابت در نظر بگیریم.) رابطهٔ ریاضی بین این دو توصیف هم‌ارز، به‌صورت $W = -\Delta V$ است، که نتیجه می‌دهد

$$q_۰ E_s \Delta s = -q_۰ \Delta V \qquad (۲۸ـ۳۵)$$

یا

$$E_s = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \qquad (۲۸ـ۳۶)$$

این معادله یک ارتباط بنیادی بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به‌دست می‌دهد: میدان الکتریکی برابر با منفی تغییر پتانسیل برحسب



شکل ۲۸ـ۱۵ (الف) ذرهٔ باردار $q_۰$ در مسیر ab بین دو سطح هم‌پتانسیل حرکت می‌کند. (ب) ذره، بین a و b در امتداد هر یک از دو مسیر acb یا adb حرکت می‌کند.

فاصله است. اگر ΔV مثبت باشد، میدان الکتریکی نیرویی وارد می‌آورد که با حرکت یک ذرهٔ آزمون باردار، با بار مثبت، از a به b مخالفت می‌کند، اگر ΔV منفی باشد، میدان نیرویی در جهت حرکت اعمال می‌کند. در حد مربوط به جابه‌جاییهای بینهایت کوچک، معادلهٔ (۲۸ـ۳۶) به‌صورت مشتق در می‌آید:

$$E_s = -\frac{dV}{ds} \qquad (۲۸\text{ـ}۳۷)$$

مؤلفهٔ میدان الکتریکی در هر راستایی برابر است با منفی مشتق پتانسیل نسبت به جابه‌جایی در آن راستا.

اکنون ساختار هندسی متفاوتی برای این فرایند انتخاب می‌کنیم. در شکل ۲۸ـ۱۵(ب) همان فرایند را نشان داده‌ایم، ولی به‌جای حرکت مستقیم بار آزمون از a به b، آن را در امتداد دو مسیر متفاوت حرکت می‌دهیم. در مسیر acb ابتدا بار آزمون در امتداد محور x از a به c برده می‌شود و سپس در امتداد مسیر نشان داده‌شده در شکل از c به b برده می‌شود. این قسمت از مسیر چنان انتخاب شده است که همواره بین b و c پتانسیل، مقدار یکسان $V+\Delta V$ را دارد. کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی در امتداد مسیر cb صفر است، زیرا در آنجا پتانسیل تغییر نمی‌کند (معادلهٔ (۲۸ـ۱۱) را ببینید). کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی در امتداد مسیر ac برابر است با $F_x\Delta x = q_\circ E_x \Delta x$. چون تغییر در انرژی پتانسیل مستقل از مسیر است، باز هم داریم $W = -\Delta U$

$$q_\circ E_x\Delta x = -q_\circ \Delta V \quad \text{یا} \quad E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

اگر ذرهٔ آزمون را در امتداد مسیر adb جابه‌جا کنیم، کار انجام‌شده بر روی ذره توسط میدان، در امتداد ad برابر با $F_y\Delta y = q_\circ E_y\Delta y$ است، و در امتداد db برابر صفر است (این مسیر باز هم چنان انتخاب شده است که در همه جا بین d و b پتانسیل دارای مقدار یکسان $V+\Delta V$ است). چون تغییر خالص در انرژی پتانسیل در امتداد مسیر adb نیز برابر با ΔV است، نتیجه می‌گیریم که

$$q_\circ E_y\Delta y = -q_\circ \Delta V \quad \text{یا} \quad E_y = -\frac{\Delta V}{\Delta y}$$

از محاسبات سه‌بعدی، نتیجهٔ مشابهی برای E_z به‌دست می‌آید.

اگر حد این تابعها را برای وقتی که طول مسیرها بسیار کوتاه می‌شود در نظر بگیریم، اختلافها به‌صورت مشتق درمی‌آیند، و می‌توانیم رابطهٔ بین $\vec{\mathbf{E}}$ و V را به کلیترین صورت زیر بنویسیم

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (۲۸\text{ـ}۳۸)$$

اگر تابع $V(x,y,z)$ را در تمام نقطه‌های فضا برای یک توزیع بار مشخص بدانیم، در آن‌صورت می‌توانیم مؤلفه‌های $\vec{\mathbf{E}}$ را با استخراج مشتقهای جزئی V نسبت به مختصه‌ها پیدا کنیم.*

بنابراین دو روش برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از توزیعهای پیوسته بار در اختیار داریم؛ یکی بر انتگرال‌گیری از قانون کولن استوار است (معادله‌های ۲۶ـ۱۳ تا ۲۶ـ۱۵) و دیگری بر مشتق‌گیری از پتانسیل (معادلهٔ ۲۸ـ۳۸). در عمل، بیشتر اوقات روش دوم با دشواری کمتری مواجه می‌شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۲ با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۸ـ۳۲) که پتانسیل را روی محور یک قرص یکنواخت باردارشده، به‌دست می‌دهد، عبارتی را برای میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار روی نقاط محوری آن به‌دست آورید.

حل. با بهره‌گیری از تقارن مسئله، $\vec{\mathbf{E}}$ باید در امتداد محور قرص (محور z) قرارگیرد. با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۳۸)، (با فرض $z > ۰$) داریم

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_\circ}\frac{d}{dz}[(z^۲+R^۲)^{۱/۲} - z]$$
$$= \frac{\sigma}{۲\epsilon_\circ}\left(۱ - \frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right)$$

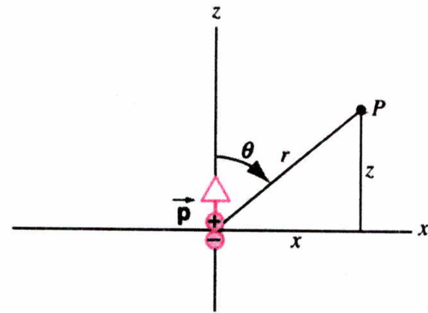
که این نتیجه با نتیجهٔ به‌دست‌آمده از طریق انتگرال‌گیری مستقیم، معادلهٔ (۲۶ـ۱۹)، سازگار است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۳ در شکل ۲۸ـ۱۶ نقطهٔ (دوردست) p را در میدان یک دوقطبی واقع در مبدأ دستگاه مختصات xz نشان داده‌ایم. میدان $\vec{\mathbf{E}}$ را به‌صورت تابعی از مکان محاسبه کنید.

حل. با توجه به تقارن مسئله، $\vec{\mathbf{E}}$ مربوط به نقاط واقع در صفحهٔ شکل ۲۸ـ۱۶ در این صفحه قرار می‌گیرد و می‌توان آن را برحسب مؤلفه‌های E_x و E_z بیان کرد و در اینجا E_y صفر است. ابتدا پتانسیل را به‌جای دستگاه مختصات قطبی در دستگاه مختصات راستگوشه بیان می‌کنیم. برای این کار، با استفاده از رابطه‌های زیر

$$r = (x^۲+z^۲)^{۱/۲} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^۲+z^۲)^{۱/۲}}$$

* نماد $\partial V/\partial x$ معرف مشتق جزئی نسبت به x است. در گرفتن این مشتق از تابع $V(x,y,z)$، کمیت x را متغیر درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که y و z ثابت باشند. ملاحظات مشابهی را دربارهٔ $\partial V/\partial y$ و $\partial V/\partial z$ مورد استفاده قرار می‌دهیم.



شکل ۲۸ـ۱۶ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۳. دوقطبی واقع در مبدأ دستگاه مختصات xz.

و اینکه پتانسیل V با معادلهٔ (۲۸ـ۲۲) داده شده است، داریم

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

با جانشانی مقدارهای مربوط به r^2 و $\cos\theta$، می‌رسیم به

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

با ثابت درنظرگرفتن x و استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۳۸)، می‌توانیم مؤلفهٔ E_z را معین کنیم

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x^2+z^2)^{3/2} - z[\frac{3}{2}(x^2+z^2)^{1/2}](2z)}{(x^2+z^2)^3}$$

$$= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^2-2z^2}{(x^2+z^2)^{5/2}} \qquad (۲۸\text{ـ}۳۹)$$

با قرار دادن $x = 0$ برای نقاط دوردست در امتداد محور دوقطبی (یعنی، امتداد محور z) رابطهٔ مربوط به E_z به‌صورت زیر در می‌آید:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{z^3}$$

این نتیجه با آنچه در فصل ۲۶، مسئلهٔ ۱، برای میدان در امتداد محور دوقطبی یافتیم دقیقاً همخوان است. توجه داشته باشید که در امتداد محور z، به‌علت تقارن موجود در مسئله، $E_x = 0$ است.

با قرار دادن $z = 0$ در معادلهٔ (۲۸ـ۳۹)، مؤلفهٔ E_z را برای نقطه‌های دوردست در صفحهٔ عمودمنصف دوقطبی به‌دست می‌آوریم:

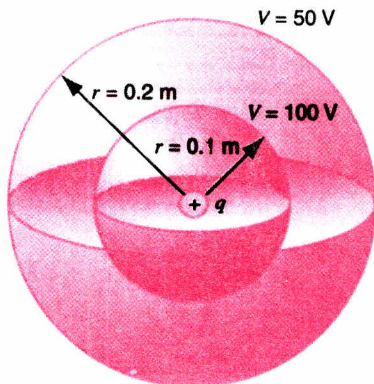
$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}$$

که دقیقاً با آنچه در معادلهٔ (۲۶ـ۱۲) یافتیم سازگار است و باز هم از تقارن مسئله درمی‌یابیم که E_x در صفحهٔ عمودمنصف دوقطبی برابر با صفر است. علامت منفی در این معادله نشان می‌دهد که $\vec{\mathbf{E}}$ در جهت منفی z است. برای یافتن E_x باید مراحل مشابهی را دنبال کنید، و نتیجه‌ای به‌دست آورید که با نتیجهٔ مسئلهٔ ۲ از فصل ۲۶ سازگار باشد.

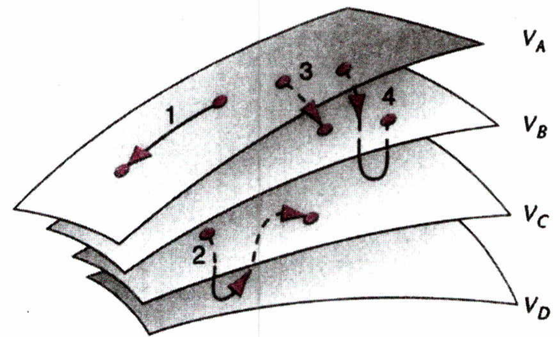
۲۸ـ۸ سطحهای هم‌پتانسیل

بار نقطه‌ای $q = 11\,\text{nC}$ را درنظر بگیرید. با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۱۸)، می‌توانیم پتانسیل ناشی از این بار را معین کنیم که در فاصلهٔ $1\,\text{m}$ر۰ از بار برابر $100\,\text{V}$ است. از آنجا که هیچ سمت‌وسویی به پتانسیل وابسته نیست، مقدار پتانسیل در هر راستایی در آن فاصله برابر است با $100\,\text{V}$ است. این موضوع را در شکل ۲۸ـ۱۷ نشان داده‌ایم. در هر نقطه واقع بر کره‌ای به شعاع $1\,\text{m}$ر۰ که بار q را احاطه کرده باشد، پتانسیل برابر با $100\,\text{V}$ است. روی کرهٔ دیگری با شعاع $2\,\text{m}$ر۰، همه جا پتانسیل برابر با $50\,\text{V}$ است.

هر سطحی که پتانسیل در همه جای آن مقدار یکسانی داشته باشد، مانند هرکدام ازکره‌های شکل ۲۸ـ۱۷، را یک سطح هم‌پتانسیل می‌خوانیم. برای جابه‌جاکردن بار آزمون از هر نقطه‌ای روی یک سطح هم‌پتانسیل به نقطهٔ دیگری روی همان سطح، هیچ کار خالصی توسط نیروهای الکتریکی صورت نمی‌گیرد، زیرا در آنجا $\Delta V = 0$. حتی اگر مسیر از آن سطح خارجی شود، مادام که نقطهٔ آغاز و پایان مسیر روی یک سطح هم‌پتانسیل باشد، هیچ کار خالصی صورت نمی‌گیرد.



شکل ۲۸ـ۱۷ در تمامی نقاط کره‌ای که بار q را دربرمی‌گیرد پتانسیل مقدار یکسانی دارد. در اینجا دوکره نشان داده شده‌اند، یکی برای $V = 100\,\text{V}$ و دیگری برای $V = 50\,\text{V}$.



شکل ۲۸ـ۱۸ قسمتهایی از چهار سطح هم‌پتانسیل. چهار مسیر متفاوت برای بار آزمون نشان داده شده است.

مقدار کاری که به هنگام جابه‌جایی یک بار آزمون از یک سطح هم‌پتانسیل به سطح هم‌پتانسیل دیگری توسط نیروهای الکتریکی انجام می‌شود، فقط به اختلاف پتانسیل بین دو سطح وابسته است؛ این کار، مستقل از مکانهای آغاز و پایان حرکت بر روی سطح است. وقتی یک ذرهٔ باردار از هر نقطه‌ای واقع بر یک سطح به هر نقطه‌ای واقع بر سطح دیگر می‌رود، همواره کار یکسانی انجام می‌شود.

در شکل ۲۸ـ۱۸ قسمتهایی از یک خانواده از سطحهای هم‌پتانسیل را نشان داده‌ایم که احتمالاً به توزیع بار مشخصی وابسته‌اند. وقتی که یک ذرهٔ باردار در امتداد مسیر ۱ حرکت می‌کند، کار انجام‌شده توسط نیروهای الکتریکی صفر است، زیرا آغاز و پایان این مسیر در سطح هم‌پتانسیل یکسانی قرار دارد. کار انجام‌شده در امتداد مسیر ۲ نیز به همین دلیل برابر صفر است. کار انجام‌شده در امتداد مسیرهای ۳ و ۴ صفر نیست، ولی برای هر دوی این مسیرها مقدار یکسانی دارد، زیرا این دو مسیر یک زوج مسطح هم‌پتانسیل یکسان را به‌هم متصل می‌کند. یعنی مسیرهای ۳ و ۴ نقاطی را به‌هم وصل می‌کنند که دارای اختلاف پتانسیل یکسان $(V_B - V_A)$ هستند. اگر بار الکتریکی q را از هر نقطه‌ای روی سطح A به هر نقطه‌ای روی سطح B ببریم، کار انجام‌شده توسط نیروهای الکتروستاتیک، بنابر معادلهٔ (۲۸ـ۱۱)، برابر با $W_{AB} = -q(V_B - V_A)$ است.

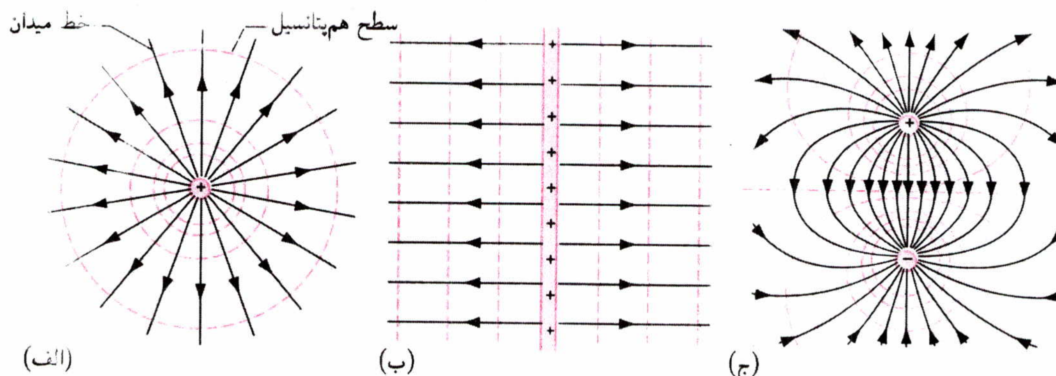
خطهای میدان و سطحهای هم‌پتانسیل

در بخش ۲۶ـ۵، روش نموداری متفاوتی را برای توصیف یک توزیع بار، مورد بحث و بررسی قرار دادیم. آن روش برخطهای میدان الکتریکی پایه‌گذاری شده بود. ارتباط ریاضی به‌دست‌آمده در معادلهٔ (۲۸ـ۷) بین $\vec{\mathbf{E}}$ و V حاکی از وجود یک ارتباط بین نمایشهای نموداری آنها نیز هست.

تصور کنید که بار مثبتی را از حال سکون از نقطهٔ b واقع بر سطح هم‌پتانسیل $V + \Delta V$، در شکل ۲۸ـ۱۵ رها کنیم. به زبان پتانسیل، خواهیم گفت که ذره به اندازهٔ اختلاف پتانسیل ΔV به‌سوی سطح هم‌پتانسیل V "سقوط" خواهد کرد. همچنین می‌توانیم درنظر بگیریم که ذره توسط میدان الکتریکیی که در ناحیهٔ بین دو سطح هم‌پتانسیل وجود دارد، شتاب بگیرد. میدان الکتریکی باید در نقطهٔ b بر سطح هم‌پتانسیل عمود باشد. اگر چنین نباشد، آنگاه میدان الکتریکی باید در امتداد سطح هم‌پتانسیل دارای مؤلفه‌ای باشد، که روی ذره‌ای که در امتداد سطح حرکت می‌کند کار انجام دهد. ولی، این رفتار تعریف سطح هم‌پتانسیل را به‌عنوان سطحی که در آن پتانسیل ثابت است، و می‌توانیم در امتداد آن ذرهٔ باردار را آزادانه و بدون انجام هیچ کاری جابه‌جا کنیم، نقض می‌کند. از این بحث نتیجه می‌گیریم که خطهای میدان الکتریکی باید در همه جا بر سطحهای هم‌پتانسیل عمود باشند.

این امکان نیز وجود دارد که از معادلهٔ (۲۸ـ۳۷)، $E_s = -dV/ds$، به همین نتیجه برسیم. در شکل ۲۸ـ۱۵، برای ds راستایی وجود دارد که در آن راستا کمیت $-dV/ds$ بیشینه است، یعنی در آن راستا E_s نیز بیشینه است. آن بیشینه‌مقدار همان E، مقدار میدان الکتریکی در آن نقطه، است و راستایی که در آن E_s دارای بیشینهٔ مقدارش می‌شود همان راستای میدان الکتریکی است. به‌طور هم‌ارز، می‌توانیم در نقطهٔ b دایره‌ای به شعاع ds رسم کنیم. یکی از نقطه‌های این دایره به سطح هم‌پتانسیل بعدی نزدیکترین نقطه است و در نتیجه این نقطه نمایشگر بیشترین مقدار $-dV$ است. راستایی که از b به آن نقطه متصل می‌شود عمود است بر سطح هم‌پتانسیل در نقطهٔ b و جهت میدان الکتریکی در نقطهٔ b را نمایش می‌دهد.

اگر نقش سطحهای هم‌پتانسیل را برای توزیع بار مشخصی بدانیم، می‌توانیم خطهای میدان را با ترسیم خطوط عمود برسطحهای هم‌پتانسیل پیدا کنیم. در شکل ۲۸ـ۱۹ سطحهای هم‌پتانسیل و خطهای میدان مربوط به سه مورد توزیع بار را که قبلاً بررسی کرده‌ایم، روی یک نمودار نشان داده‌ایم. این سه مورد عبارت‌اند از: بار نقطه‌ای، برگهٔ باردار بینهایت بزرگ، و دوقطبی. این نمودارها خطهای میدان مربوط به شکلهای ۲۶ـ۱۰، ۲۶ـ۱۱ و ۲۶ـ۱۲ را نشان می‌دهد که شکل سطحهای هم‌پتانسیل بر آنها نهاده شده است. توجه کنید که خطهای میدان هرجا که سطحهای هم‌پتانسیل را قطع می‌کنند بر هم عمودند.



شکل ۲۸ـ۱۹ خطهای میدان الکتریکی (خط پُر) و مقاطع سطحهای هم‌پتانسیل (خط‌چینها) برای (الف) بار مثبت نقطه‌ای، (ب) برگهٔ بینهایت با بار مثبت، که از امتداد لبه‌اش مشاهده شده است، و (ج) دوقطبی الکتریکی.

۲۸ـ۹ پتانسیل رسانای باردار

در بخش ۲۷ـ۶ دو ویژگی رسانای باردار منزوی را استنتاج کردیم: (۱) میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، (۲) بار روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد. ویژگی مهم سوم رسانای باردار از بررسی پتانسیل الکتریکی آن حاصل می‌شود.

فرض کنید رسانایی با شکل دلخواه در اختیار داریم، که به آن بار خالصی را منتقل می‌کنیم. بارها آزادند که حرکت کنند و به‌سرعت خودشان را روی سطح خارجی رسانا توزیع می‌کنند تا به حالت تعادل برسند. در واقع، بارهای هم‌علامت یکدیگر را می‌رانند تا به توزیعی برسند که در آن میانگین فاصلهٔ بین آنها به بیشترین مقدار ممکن برسد، به‌طوری که انرژی پتانسیل این آرایش از بارها کمینه مقدارش را پیدا کند.

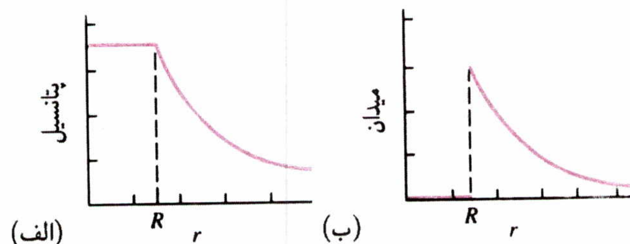
اگر بارها روی سطح یک رسانا در حالت تعادل باشند، در آن صورت سطح رسانا باید یک سطح هم‌پتانسیل باشد. اگر چنین نباشد، بعضی از قسمتهای رسانا باید در پتانسیل بالاتر یا پایین‌تری نسبت به سایر قسمتها باشد. در چنین حالتی بارهای مثبت به سمت ناحیه‌های با پتانسیل پایین‌تر حرکت می‌کنند و بارهای منفی به سمت ناحیه‌های با پتانسیل بیشتر جابه‌جا می‌شوند. ولی، این رفتار با این فرض که بارها در حال تعادل قرار دارند متناقض است و بنابراین سطح رسانا باید یک سطح هم‌پتانسیل باشد.

اگر میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر باشد، در آن صورت می‌توانیم بار آزمون را در امتداد هر مسیری در داخل رسانا جابه‌جا کنیم و یا از سطح رسانا به داخل رسانا ببریم و هیچ کار خالصی توسط بارهای سطحی روی بار آزمون انجام نشود. یعنی، اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه‌ای برابر با صفر است، و از آن‌رو پتانسیل در تمام نقطه‌های رسانا مقدار یکسانی خواهد داشت. بنابراین ویژگی سومی را برای رساناها به‌دست آوردیم: کل رسانا در پتانسیل یکسانی قرار دارد. این نتیجه‌گیری فقط در الکتروستاتیک معتبر است؛ وقتی دربارهٔ جریانهای شارنده در رساناها بحث می‌کنیم، ممکن است که بین نقاط متفاوت یک رسانا، اختلاف پتانسیل وجود داشته باشد.

توجه کنید که در اینجا دربارهٔ شکل رسانا هیچ‌گونه فرضی نکردیم. اگر رسانا کره باشد، بار به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع خواهد شد. برای رساناهایی که به شکل کره نیستند، چگالی بار روی سطح رسانا یکنواخت نخواهد بود، ولی باز هم سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است. حتی در رسانایی که دارای کاواکهای داخلی است، اعم از اینکه این کاواکها حاوی بار باشند یا نباشند، تمام نقطه‌های رسانا (روی سطح و داخل آن) در یک پتانسیل قرار دارند.

این نتیجه‌گیری که سطح رسانا هم‌پتانسیل است، با بحث ارائه‌شده در بخش ۲۸ـ۸، مبنی بر اینکه خطهای میدان الکتریکی همواره بر سطحهای هم‌پتانسیل عمودند، سازگار است. در بخش ۲۷ـ۶، برای اثبات اینکه میدان الکتریکی درست در بیرون سطح رسانا بر آن سطح عمودند از قانون گاؤس استفاده کردیم که اگر سطح رسانا هم‌پتانسیل است، باید این گزاره درست باشد.

می‌توانیم نتیجه‌های صریحی را برای یک رسانای کروی توپر که حامل بار یکنواخت توزیع‌شدهٔ کل q روی سطح آن است به‌دست آوریم. در بخش ۲۵ـ۵، ویژگی یک پوستهٔ کروی یکنواخت باردارشده را مورد بررسی قرار دادیم: نیروی وارد بر یک بار خارج از پوسته، همانند جایگزینی پوسته با یک بار نقطه‌ای در مرکزش است. چنین ویژگی، این امکان را فراهم می‌آورد که ما از عبارت مربوط به بار نقطه‌ای برای پتانسیل الکتریکی (معادلهٔ ۲۸ـ۱۸) و میدان الکتریکی (معادلهٔ ۲۶ـ۶) برای مکانهایی که در آنها $r > R$ است استفاده کنیم.



شکل ۲۸ـ۲۰ (الف) پتانسیل مربوط به یک رسانای کروی باردار. (ب) میدان الکتریکی یک رسانای باردار.

در داخل پوسته، نیروی وارد بر بار نقطه‌ای صفر است. یعنی، اینکه پتانسیل باید همه جا در داخل رسانا و از جمله روی سطح آن، مقدار یکسانی داشته باشد. مقدار پتانسیل روی سطح رسانا از معادلهٔ (۲۸ـ۱۸) به‌دست می‌آید، که در $r = R$ محاسبه شده باشد، و در نتیجه پتانسیل داخل رسانا برابر است با

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \qquad r < R \tag{۲۸ـ۴۰}$$

در شکل ۲۸ـ۲۰ میدان و پتانسیل مربوط به رسانای کروی منزوی را نشان داده‌ایم. در $r < R$ میدان الکتریکی صفر است و برای $r > R$ به‌صورت $1/r^2$ کاهش می‌یابد. پتانسیل برای $r < R$ ثابت است و برای $r > R$ به‌صورت $1/r$ کاسته می‌شود.

تخلیهٔ هاله‌ای (اختیاری)

گرچه بار سطحی روی رسانای کروی به‌طور یکنواخت توزیع می‌شود، ولی برای رساناهای با اشکال مختلف چنین نیست.* در حوالی نقطه‌ها یا لبه‌های تیز، چگالی سطحی بار، و در نتیجه میدان الکتریکی درست در بیرون سطح ـــ می‌تواند مقدارهای بسیار زیادی داشته باشد.

برای مشاهدهٔ کیفی چگونگی این رویداد، دو کره به شعاعهای متفاوت را که با سیم نازکی به‌هم متصل شده‌اند (شکل ۲۸ـ۲۱) در نظر بگیرید. فرض کنید که کل مجموعه به پتانسیل دلخواه V رسیده باشد. پتانسیلهای (یکسان) دو کره با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۴۰)



شکل ۲۸ـ۲۱ دو کرهٔ رسانا که با سیم نازک و بسیار بلندی به‌هم متصل شده‌اند.

* برای بحث دقیقی د[ر] مورد این پدیده، رجوع کنید به مقالهٔ "مغلطهٔ برفگیر" نوشتهٔ ریچارد پرایس و رونالد کرولی در شمارهٔ سپتامبر ۱۹۸۵ (صفحهٔ ۸۴۳) مجلهٔ "امریکن ژورنال أو فیزیکس".

عبارت‌اند از

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R^2}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{۲۸ـ۴۱}$$

فرض می‌کنیم که دو کرهٔ باردار آن قدر از هم دورند که بار یکی از آنها تأثیری در توزیع بار دیگری ندارد.

نسبت چگالی سطحی بار دو کره عبارت است از

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\dfrac{q_1}{4\pi R_1^2}}{\dfrac{q_2}{4\pi R_2^2}} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}$$

که با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۸ـ۴۱) نتیجه می‌دهد

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{۲۸ـ۴۲}$$

معادلهٔ (۲۸ـ۴۲) نشان می‌دهد که کرهٔ کوچکتر چگالی بار سطحی بیشتری دارد. با یادآوری این موضوع که برای بار خارجی، میدان چنان است که گویی کره را با بار نقطه‌ای در مرکزش جایگزین کرده‌ایم، می‌توانیم میدان را درست در خارج از سطح کره به‌صورت زیر بیان کنیم

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{۲۸ـ۴۳}$$

بنابر معادلهٔ (۲۸ـ۴۲)، چگالی بار سطحی برای کرهٔ با شعاع کوچکتر بیشتر است، و از آن‌رو میدان درست در خارج از سطح کره با شعاع کوچکتر نیز بزرگتر است. هرچه شعاع کره کوچکتر باشد، میدان الکتریکی درست در خارج از سطح آن بزرگتر است.

در نزدیکی رسانای نوک‌تیز (یعنی، رسانایی با شعاع بسیار کوچک) میدان الکتریکی ممکن است آن‌قدر بزرگ باشد که مولکولهای هوای اطرافش را یونیده کند؛ در نتیجه هوا که معمولاً نارساناست می‌تواند بار الکتریکی را از رسانا به خارج از آن هدایت و حمل کند. این اثر را تخلیهٔ هاله‌ای می‌خوانیم. افشانه‌های الکتروستاتیکی رنگ برای انتقال بار به قطرات ریز رنگ از اثر تخلیهٔ هاله‌ای استفاده می‌کنند و سپس این قطره‌های باردار را به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی شتاب می‌دهند. دستگاههای فتوکپی که مبتنی بر زیراکس خشک هستند از یک سیم برای ایجاد تخلیهٔ هاله‌ای استفاده می‌کنند، که بار را به یک سطح

سلنیوم‌اندود منتقل می‌کند؛ در منطقه‌هایی که در معرض تابش نور هستند بار خنثی می‌شود و بقیهٔ منطقه‌های باردار یک گَرد نرم سیاه را جذب می‌کند و تصویر را به‌وجود می‌آورد.

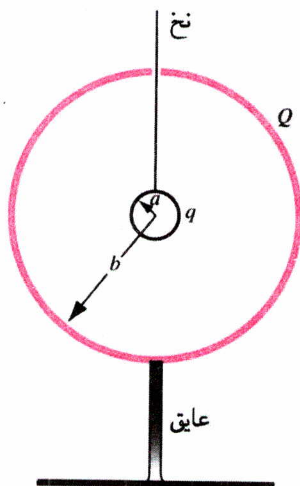
۲۸ـ۱۰ شتابدهندهٔ الکتروستاتیکی (اختیاری)

در بسیاری از مطالعات مربوط به علوم هسته‌ای واکنشهای هسته‌ای دخیل‌اند، که هنگامی رخ می‌دهند که باریکه‌ای از ذرات بر هدفی فرود آیند. یکی از روشهایی که برای شتاب دادن ذرات جهت واکنشهای هسته‌ای به‌کار می‌رود برمبنای روش الکتروستاتیک است. ذره‌ای با بار مثبت q در اختلاف پتانسیل منفی ΔV "سقوط" می‌کند و بنابراین انرژی پتانسیل آن، بنابر معادلهٔ (۲۸ـ۱۴)، به اندازهٔ $\Delta U = q\Delta V$، کم می‌شود. افزایش انرژی جنبشی متناظر با این کاهش انرژی پتانسیل $\Delta K = -\Delta U$ است و با فرض اینکه ذره از حالت سکون شروع به حرکت کند، انرژی جنبشی نهایی آن برابر است با

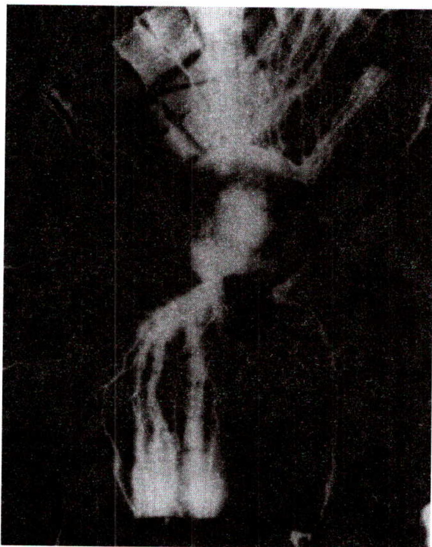
$$K = -q\,\Delta V \qquad (۲۸ـ۴۴)$$

برای اتمهای یونیده، q مثبت است. برای دستیابی به باریکه‌ای با بیشترین انرژی ممکن، به بالاترین اختلاف پتانسیل علاقه‌مندیم. در کاربردهای مورد توجه در فیزیک هسته‌ای، به منظور غلبه بر نیروی رانشی کولنی بین ذرات فرودی و هدف، ذراتی با انرژی جنبشی چندین میلیون الکترون‌ـولت (MeV) مورد نیاز است. انرژیهای جنبشی در محدودهٔ MeV به اختلاف پتانسیلهایی در محدودهٔ میلیون ولت نیاز دارد.

یک وسیلهٔ الکتروستاتیکی که می‌تواند این اختلاف پتانسیل زیاد را تولید کند، در شکل ۲۸ـ۲۲ نشان داده شده است. یک کرهٔ کوچک رسانا به شعاع a که حامل بار q است در داخل یک پوستهٔ کروی رسانا به شعاع b قرار می‌گیرد که حامل بار Q است. یک مسیر رسانا به‌صورت لحظه‌ای بین دو رسانا به‌وجود می‌آید و بار q، بدون توجه به اینکه در آن زمان چه مقدار بار Q روی پوسته قرار دارد، به‌طور کامل به‌رسانای خارجی منتقل می‌شود. (زیرا بار روی رسانا همواره به سطح خارجی آن جابه‌جا می‌شود.) اگر سازوکار مناسبی برای قرار دادن بار q روی کرهٔ داخلی از چشمهٔ خارجی وجود داشته باشد، اصولاً می‌توانیم بار Q روی کرهٔ خارجی و پتانسیل مربوط به آن را بدون هیچ محدودیتی افزایش دهیم. در عمل، پتانسیل نهایی را جرقه‌هایی که در هوا پدید می‌آیند محدود می‌کند (شکل ۲۸ـ۲۳).



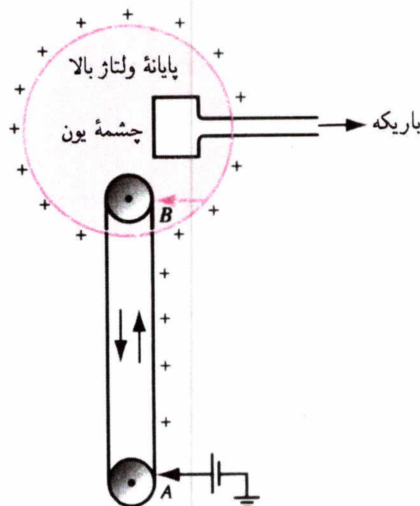
شکل ۲۸ـ۲۲ کرهٔ کوچک باردار که در داخل پوستهٔ کروی باردار بزرگتر آویخته شده است.



شکل ۲۸ـ۲۳ مولد الکتروستاتیکی با پتانسیل ۲٫۷ میلیون ولت، که به علت رسانش از طریق هوا جرقه می‌زند.

این اصل شناخته‌شدهٔ الکتروستاتیک را اولین بار رابرت جی. وان دوگراف در اوایل دههٔ ۱۹۳۰ برای شتاب دادن ذرات هسته‌ای به‌کار برد و این شتابدهنده به شتابدهندهٔ وان دوگراف شهرت یافت. با این وسیله می‌توان به‌آسانی به پتانسیلهایی تا حدود چند میلیون ولت دست یافت، پتانسیل حدی را نشت بار از طریق پایهٔ عایق یا فروریزش الکتریکی هوا (یا گاز عایق‌کننده با فشار بالا) که پایانهٔ ولتاژ بالا را در بر می‌گیرد تعیین می‌کند.

شکل ۲۸ـ۲۴ طرح مقدماتی یک شتابدهندهٔ وان دوگراف را نشان



شکل ۲۸ـ۲۴ نمودار شتابدهندهٔ وان دوگراف. بار مثبت در نقطهٔ A روی تسمهٔ متحرک افشانده می‌شود و در نقطهٔ B از روی آن جمع و به پایانه منتقل می‌شود، در نتیجه پایانه برای باردارشدن به پتانسیل V می‌رسد. یونهای دارای بار مثبت از پایانه رانده می‌شوند تا باریکه شتابدهنده را به‌وجود آورند.

می‌دهد. بار از یک کاوهٔ نوک‌تیز (که به آن نقطهٔ هاله‌ای می‌گوییم) در نقطهٔ A بر روی تسمه‌ای از مواد عایق (اغلب از لاستیک) افشانده می‌شود. تسمه بارها را به پایانهٔ ولتاژ بالا حمل می‌کند، که در آنجا نقطهٔ هاله‌ای دیگر، B، آن را از روی تسمه برمی‌دارد و به رسانای خارجی منتقل می‌کند. در داخل این پایانه چشمه‌ای از یونهای مثبت قرار دارد، که ممکن است هستهٔ هیدروژن (پروتون) یا هلیم (ذرهٔ آلفا) باشد. یونها از پتانسیل بالا "سقوط" می‌کنند و انرژی جنبشی چندین MeV به‌دست می‌آورند. پایانه در مخزنی از گاز عایق قرار دارد که مانع از جرقه‌زنی می‌شود.

یک نوع هوشمندانهٔ این طرح مقدماتی با استفاده از همین ولتاژ بالا یونها را تا دوبرابر شتاب می‌دهد و در نتیجه انرژی جنبشی مضاعفی را کسب می‌کند. چشمه‌ای از یونهای منفی را، که با افزودن الکترونی به یک اتم خنثی درست شده است، در خارج از پایانه قرار می‌دهیم. این یونهای منفی "به سمت" پایانهٔ با پتانسیل مثبت "سقوط" می‌کنند. در داخل پایانهٔ ولتاژ بالا، باریکهٔ یونها از اتاقکی متشکل از گاز یا یک ورقهٔ نازک عبور می‌کنند که برای کندن چند الکترون از یونهای منفی طراحی شده است و با این عمل آنها را به یونهای مثبت تبدیل می‌کند. سپس این یونهای مثبت از پتانسیل مثبت "سقوط! یا در واقع فرار می‌کنند". این نوع شتابدهنده‌های وان دوگراف "چندمرحله‌ای" اخیراً از یک ولتاژ نهایی ۲۵ میلیون ولت برای شتاب دادن یونهایی نظیر کربن یا اکسیژن تا انرژیهای جنبشی افزون بر ۱۰۰ MeV استفاده کرده‌اند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۴ اختلاف پتانسیل بین دو کرهٔ شکل ۲۸ـ۲۲ را محاسبه کنید.

حل. اختلاف پتانسیل $V(b)-V(a)$ شامل دو بخش است: یک بخش مربوط به کرهٔ کوچک و بخش دیگر مربوط به پوستهٔ کروی بزرگ. این بخشها را می‌توان به‌طور جداگانه محاسبه و به‌صورت جبری با هم جمع کرد. ابتدا پوستهٔ کروی را درنظر می‌گیریم. شکل ۲۸ـ۲۰(الف) نشان می‌دهد که پتانسیل در تمام نقطه‌های داخلی یکسان و مقدار آن همان پتانسیل روی سطح پوسته است. به این ترتیب، سهم پوسته بزرگ کروی در اختلاف پتانسیل $V(b)-V(a)$ صفر است.

آنچه باقی می‌ماند محاسبهٔ اختلاف فقط با درنظرگرفتن کرهٔ کوچک است. برای تمام نقطه‌های خارجی کرهٔ کوچک، می‌توان آن را بار نقطه‌ای در نظر گرفت و اختلاف پتانسیل را با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲۸ـ۱۷) به‌دست آورد:

$$V(b)-V(a)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

این رابطه، اختلاف پتانسیل کرهٔ داخلی و پوستهٔ خارجی را به‌دست می‌دهد. توجه داشته باشید که در اینجا اختلاف پتانسیل مستقل از مقدار بار Q روی پوستهٔ خارجی است. اگر بار q مثبت باشد، اختلاف پتانسیل همواره منفی است، که نشان می‌دهد پوستهٔ خارجی همواره در پتانسیل کمتری قرار دارد. اگر بار مثبت بتواند بین دو کره جریان یابد، همواره از پتانسیل بالاتر به پتانسیل پایین‌تر جاری می‌شود، یعنی از کرهٔ داخلی به کرهٔ خارجی می‌رود، بدون توجه به اینکه در هر زمان چه مقدار بار روی سطح پیوستهٔ کروی خارجی قرار دارد.

چندگزینه‌ای

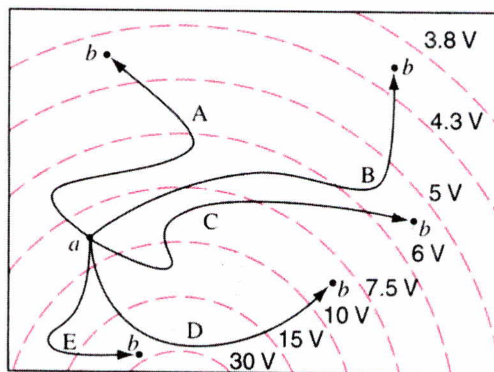
۲۸ـ۱ انرژی پتانسیل

۲۸ـ۲ انرژی پتانسیل الکتریکی

۲۸ـ۳ پتانسیل الکتریکی

۱. یک بار نقطه‌ای منفی از موقعیت a به چندین موقعیت نهایی b در شکل ۲۸ـ۲۵ بُرده شده است. کدام مسیر به بیشترین مقدار کار خارجی برای جابه‌جایی این ذره نیاز دارد؟

۲. الکترونی از حالت سکون در ناحیه‌ای از فضا که میدان الکتریکی در آن صفر نیست رها شده است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟



شکل ۲۸ـ۲۵ پرسش چندگزینه‌ای ۱.

(الف) الکترون به سمت ناحیه‌ای که در پتانسیل بالاتری قرار دارد به حرکت در می‌آید.

(ب) الکترون به سمت ناحیه‌ای که در پتانسیل پایین‌تر قرار دارد به حرکت در می‌آید.

(ج) الکترون در امتداد خطی که در پتانسیل ثابت قرار دارد به حرکت در می‌آید.

(د) تا وقتی جهت میدان الکتریکی را ندانیم، چیزی نمی‌توانیم بگوییم.

۲۸ـ۴ محاسبهٔ پتانسیل از میدان

۳. در شرایط الکتروستاتیک در داخل رسانای باردار،

(الف) $V = 0$ (ب) $\partial V/\partial x = 0$ (ج) $\partial^2 V/\partial x^2 = 0$

(د) دو گزینه از گزینه‌های (الف)، (ب)، یا (ج) باید درست باشد.

(ه) هر سه گزینه باید درست باشد.

۴. خطهای میدان الکتریکی در نزدیکی جسم A به‌هم نزدیکترند تا در نزدیکی جسم B. از این موضوع، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(الف) پتانسیل در نزدیکی جسم A بیشتر از پتانسیل در نزدیکی جسم B است.

(ب) پتانسیل در نزدیکی جسم A کمتر از پتانسیل در نزدیکی جسم B است.

(ج) پتانسیل در نزدیکی جسم A برابر با پتانسیل در نزدیکی جسم B است.

(د) دربارهٔ پتانسیل در نزدیکی اجسام A و B هیچ اظهارنظری نمی‌توان کرد.

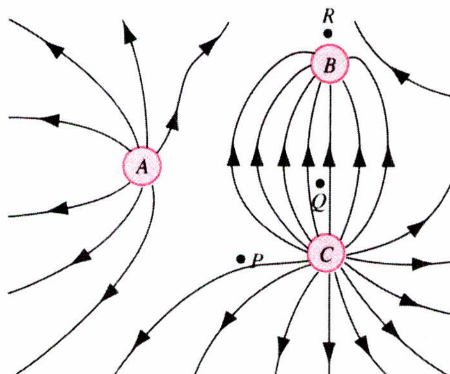
۵. در شکل ۲۸ـ۲۶ خطهای میدان الکتریکی را در نزدیکی سه بار نقطه‌ای A، B، و C نشان داده‌ایم.

(۱) کدام نقطه دارای بیشترین پتانسیل است؟

(الف) P (ب) Q (ج) R (د) هر سه نقطه دارای پتانسیل یکسان‌اند.

(۲) کدام نقطه دارای کمترین پتانسیل است؟

(الف) P (ب) Q (ج) R (د) هر سه نقطه پتانسیل یکسان دارند.



شکل ۲۸ـ۲۶ پرسش چندگزینه‌ای ۵.

۲۸ـ۵ پتانسیل ناشی از بارهای نقطه‌ای

۶. یک بار نقطه‌ای منفرد مثبت q در موقعیت نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۲۷(الف) قرار گرفته است، و پتانسیل در نقطهٔ P برابر با V_0 است (البته فرض کرده‌ایم که در بینهایت $V = 0$ است).

(۱) بار دیگر $q' = +q$ را در فاصلهٔ مساوی از P قرار داده‌ایم (مطابق شکل ۲۸ـ۲۷(ب)). در این حالت پتانسیل در نقطهٔ P برابر است با

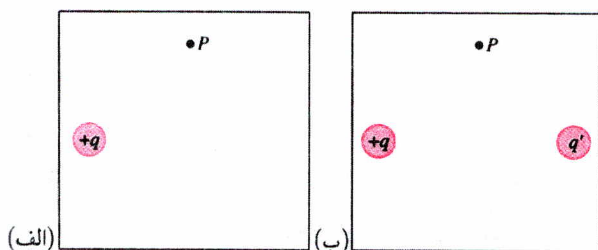
(الف) $4V_0$ (ب) $2V_0$ (ج) $\sqrt{2}V_0$ (د) $V_0/2$

(ه) V_0

(۲) به‌جای یک بار مثبت، یک بار منفی $q' = -q$ را در موقعیت نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۲۷(ب) قرار دهید. حالا پتانسیل در نقطهٔ P چقدر است؟

(الف) $4V_0$ (ب) $2V_0$ (ج) $\sqrt{2}V_0$ (د) $V_0/2$

(ه) V_0



شکل ۲۸ـ۲۷ پرسش چندگزینه‌ای ۶.

۷. برای اینکه دوبار مثبت یکسان $+q$ را از بینهایت بیاوریم و در فاصلهٔ a از هم قرار دهیم، ۱ mJ کار نیاز است.

(۱) برای اینکه سه بار مثبت یکسان $+q$ را از بینهایت بیاوریم و در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a قرار دهیم، چقدر کار باید انجام داد؟

(الف) ۲mJ (ب) ۳mJ (ج) ۴mJ (د) ۹mJ

(۲) برای اینکه چهار بار مثبت یکسان $+q$ را از بینهایت بیاوریم. و در چهار رأس یک چهاروجهی منتظم به ضلع a قرار دهیم، چقدر کار باید انجام داد؟

(الف) ۳mJ (ب) ۴mJ (ج) ۶mJ (د) ۱۶mJ

۸. بار نقطه‌ای $+q$ در مبدأ مختصات قرار گرفته است، و یک بار نقطه‌ای دیگر، $+۲q$، در $x = a$ واقع شده است، که در اینجا a مثبت است؛ در این حالت $V(\infty) = ۰$ است.

(۱) کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) در نزدیکی بارها و خارج از محور x، پتانسیل الکتریکی ممکن است صفر شود.

(ب) بزرگی پتانسیل الکتریکی روی محور x دارای یک بیشینه است.

(ج) پتانسیل الکتریکی در ناحیهٔ بین دو بار می‌تواند برابر با صفر شود.

(د) پتانسیل الکتریکی فقط روی محور x می‌تواند برابر با صفر شود.

(۲) در کدام‌یک از نواحی زیر روی محور x، ممکن است نقطه‌ای وجود داشته باشد که در آن پتانسیل الکتریکی برابر با صفر شود؟

(الف) $-\infty < x < ۰$ (ب) $۰ < x < a$ (ج) $a < x < \infty$

(د) V در ناحیه $-\infty < x < \infty$ صفر نمی‌شود.

۹. بار نقطه‌ای $+q$ در مبدأ مختصات قرار گرفته است و یک بار نقطه‌ای دیگر، $-۲q$، در $x = a$ واقع شده، که در اینجا a مثبت است؛ در این حالت $V(\infty) = ۰$ است.

(۱) کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) در نزدیکی بارها و خارج از محور x، پتانسیل الکتریکی ممکن است برابر صفر شود.

(ب) در نزدیکی بارها و خارج از محور x، ممکن است که بزرگی پتانسیل الکتریکی بیشینه باشد.

(ج) پتانسیل الکتریکی فقط بین دو بار ممکن است صفر شود.

(د) پتانسیل الکتریکی فقط روی محور x ممکن است برابر صفر شود.

(۲) در کدام ناحیه یا ناحیه‌های زیر ممکن است نقطه‌ای وجود داشته باشد که در آن پتانسیل الکتریکی برابر با صفر شود؟

(الف) $-\infty < x < ۰$ (ب) $۰ < x < a$ (ج) $a < x < \infty$

(د) V در ناحیهٔ $-\infty < x < \infty$ صفر نمی‌شود.

۲۸ـ۶ پتانسیل الکتریکی توزیعهای پیوستهٔ بار

۱۰. پتانسیل الکتریکی $V(z)$ را روی محور یک حلقهٔ بار یکنواخت مثبت در نظر بگیرید؛ در اینجا $V(\infty) = ۰$ است.

(۱) $V(z)$ بیشترین مقدارش را در کجا دارد؟

(الف) $z = ۰$ (ب) $۰ < |z| < \infty$ (ج) $|z| = ۰$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) درست‌اند.

(۲) $V(z)$ در کجا ممکن است برابر صفر شود؟

(الف) $z = ۰$ (ب) $۰ < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) درست‌اند.

۱۱. پتانسیل الکتریکی $V(z)$ را روی محور یک قرص با بار یکنواخت مثبت در نظر بگیرید؛ در اینجا $V(\infty) = ۰$ است.

(۱) $V(z)$ بیشترین مقدارش را در کجا دارد؟

(الف) $z = ۰$ (ب) $۰ < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) درست‌اند.

(۲) $V(z)$ در کجا ممکن است برابر صفر شود؟

(الف) $z = ۰$ (ب) $۰ < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) درست‌اند.

۲۸ـ۷ محاسبهٔ میدان از پتانسیل

۱۲. بار مثبت کوچک در مبدأ مختصات قرار گرفته است و نیرویی الکتروستاتیکی، درامتداد محور x، بر آن وارد می‌شود. از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که در مبدأ مختصات:

(الف) $V \neq ۰$ (ب) $\partial V/\partial x \neq ۰$ (ج) $\partial^۲ V/\partial x^۲ \neq ۰$

(د) دو پاسخ از سه پاسخ (الف)، (ب)، یا (ج) باید درست باشد.

(ه) هر سه پاسخ باید درست باشد.

۱۳. یک دوقطبی الکتریکی موازی با محور x در مبدأ مختصات قرار گرفته است و نیرویی الکتروستاتیکی، در امتداد محور x، بر آن وارد می‌شود. از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که در مبدأ مختصات:

(الف) $V \neq ۰$ (ب) $\partial V/\partial x \neq ۰$ (ج) $\partial^۲ V/\partial x^۲ \neq ۰$

(د) دو پاسخ از سه پاسخ (الف)، (ب)، یا (ج) باید درست باشد.

(ه) هر سه پاسخ باید درست باشد.

۲۸ـ۸ سطحهای هم‌پتانسیل

۱۴. کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره دربارهٔ شار الکتریکی، Φ_E،

گذرنده از سطح هم‌پتانسیل بسته درست است؟

(الف) $\Phi_E = ۰$ (ب) $\Phi_E > ۰$ (ج) $\Phi_E < ۰$

(د) Φ_E با بار خالص موجود در داخل سطح متناسب است.

۲۸ـ۹ پتانسیل رسانای باردار

۱۵. یک رسانای کروی کوچک در آغاز حامل بار $+q$ است. این کره را به داخل یک قوطی رسانا فرو می‌بریم.

(۱) وقتی که این کره را در داخل قوطی پایین می‌بریم، قبل از آنکه با دیوارهٔ قوطی تماس پیدا کند، کدام‌یک از کمیتهای زیر ثابت می‌ماند؟ (ممکن است که بیش از یک پاسخ درست وجود داشته باشد.)

(الف) پتانسیل قوطی (ب) پتانسیل کره (ج) بار روی سطح کره (د) بار خالص موجود روی کره و قوطی

(۲) این کره با قوطی تماس پیدا می‌کند. کدام‌یک از کمیتهای زیر قبل و بعد از اینکه کره با قوطی تماس پیدا کرد یکسان باقی می‌ماند؟ (ممکن است که بیش از یک پاسخ درست وجود داشته باشد.)

(الف) پتانسیل قوطی (ب) پتانسیل کره (ج) بار روی سطح کره (د) بار خالص موجود روی کره و قوطی

۱۶. دوکرهٔ رسانای کوچک ($r = ۱\,\text{cm}$) در فاصلهٔ یک متر از یکدیگر قرار گرفته‌اند و حامل بار مثبت یکسانی هستند. پتانسیل الکتریکی یک کره برابر با $V_۰$ است (در اینجا فرض کرده‌ایم که در بینهایت $V = ۰$ باشد).

(۱) پتانسیل کره دیگر چقدر است؟

(الف) بیشتر از $V_۰$ است. (ب) کمتر از $V_۰$ است.

(ج) برابر با $V_۰$ است.

(د) بدون اطلاعات بیشتر، نمی‌توان آن را تعیین کرد.

(۲) کره‌ها را به‌هم نزدیک کرده‌ایم تا سرانجام با هم تماس پیدا کرده‌اند. پتانسیل الکتریکی دو کره اکنون برابر V است. ارتباط V با $V_۰$ چگونه است؟

(الف) $V = V_۰$ (ب) $V_۰ < V < ۲V_۰$ (ج) $V = ۲V_۰$

(د) $۲V_۰ < V$

۲۸ـ۱۰ شتابدهندهٔ الکتروستاتیکی

پرسشها

۱. آیا می‌توانیم پتانسیل زمین را به‌جای صفر، $+۱۰۰\,\text{V}$ اختیار کنیم؟ این فرض چه تأثیری در مقدارهای اندازه‌گیری‌شدهٔ مربوط به (الف) پتانسیلها و (ب) اختلاف پتانسیلها خواهد داشت؟

۲. اگر روی یک تکیه‌گاه عایق‌بندی‌شده قرار داشتید و پتانسیل شما نسبت به زمین به اندازهٔ $۱۰\,\text{kV}$ افزایش می‌یافت، چه اتفاقی می‌افتاد؟

۳. چرا اغلب الکترون‌ولت یکای انرژی مناسب‌تری از ژول است؟

۴. چگونه پروتون‌ولت را با الکترون‌ولت مقایسه می‌کنید؟ جرم پروتون ۱۸۴۰ برابر جرم الکترون است.

۵. آیا برای انتقال بار الکتریکی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در یک میدان الکتروستاتیکی مقدار کار مورد نیاز به‌ازای واحد بار به مقدار انتقال‌یافته بستگی دارد؟

۶. اختلاف پتانسیل چه اتفاقی با اختلاف انرژی پتانسیل دارد؟ مثالهایی بیاورید که در آنها هر اصطلاح به‌صورت صحیح به‌کار رفته باشد.

۷. مجموع انرژی کلیهٔ الکترونهایی را که در مدت یک ثانیه به صفحهٔ یک نوسان نمای پرتو کاتدی برخورد می‌کنند برآورد کنید.

۸. چرا می‌توان یک اتاق را در برابر نیروهای الکتریکی حفاظت کرد ولی حفاظت آن در برابر نیروهای گرانشی امکان‌پذیر نیست؟

۹. فرض کنید زمین بار خالصی دارد که برابر با صفر نیست. چرا هنوز می‌توان زمین را نقطهٔ مرجع استاندارد پتانسیل اختیار کرد و به آن پتانسیل $V = ۰$ را نسبت داد؟

۱۰. آیا ممکن است بین دو رسانایی که بارهای هم‌علامت به مقدار مساوی دارند اختلاف پتانسیلی وجود داشته باشد؟

۱۱. مثالهایی را مطرح کنید که در آنها علامت پتانسیل جسم باردار مخالف علامت بار مربوط به آن جسم باشد.

۱۲. آیا دو سطح هم‌پتانسیل متفاوت می‌توانند یکدیگر را قطع کنند؟

۱۳. یک کارگر برقکار به‌طور تصادفی دچار برق‌گرفتگی شد و درگذشت و روزنامه‌ای در مورد این حادثه چنین نوشت: "او برحسب تصادف، کابل ولتاژ بالا را لمس کرد و $۲۰۰۰۰\,\text{V}$ برق از تنش عبور کرد." این گزاره را نقد کنید.

۱۴. به کوهنوردان گرفتار آذرخش و توفانهای تندری توصیه می‌شود که (الف) به‌سرعت از قله‌ها و ستیغها فاصله بگیرند و (ب) هر دو پا را درکنار هم قرار دهند و در فضای باز خم شوند تا فقط پاهای آنها با زمین در تماس باشد. اساس این توصیهٔ خوب چیست؟

۱۵. اگر $\vec{\mathbf{E}}$ در نقطه‌ای برابر با صفر باشد، آیا لازم است که V هم در آن نقطه برابر با صفر باشد؟ برای اثبات پاسخ خود مثال بیاورید.

۱۶. اگر $\vec{\mathbf{E}}$ را تنها در یک نقطه بدانید، آیا می‌توانید V را در آن نقطه

محاسبه کنید؟ اگر پاسخ شما منفی است، چه اطلاعات بیشتری نیاز دارید؟

۱۷. در شکل ۲۸ـ۱۸، میدان الکتریکی E در طرف چپ شکل بیشتر است یا در طرف راست آن؟

۱۸. آیا قرص نارسانای مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۱۲ که به‌طور یکنواخت باردار شده سطحی با پتانسیل ثابت است؟ در این‌باره توضیح دهید.

۱۹. دیدیم که در داخل رسانای توخالی، از میدانهای ناشی از بارهای خارجی مصون هستیم. اگر خارج از رسانای توخالی که حاوی مقداری بار است قرار داشته باشیم، آیا از میدان ناشی از این بارها مصون هستیم؟ دربارهٔ پاسخ مثبت یا منفی خود توضیح دهید.

۲۰. آیا اگر سطح رسانای باردار هم‌پتانسیل باشد، به معنی آن است که توزیع بار روی آن سطح یکنواخت است؟ آیا اگر بزرگی میدان الکتریکی روی سطح رسانای باردار ثابت باشد، به معنی آن است که توزیع بار روی آن سطح یکنواخت است؟

۲۱. در بخش ۲۸ـ۹ یادآور شدیم که، باری که به داخل یک رسانای منزوی منتقل شود، بدون توجه به اینکه چقدر بار روی سطح خارجی آن قرار دارد، کاملاً به سطح خارجی انتقال می‌یابد. آیا می‌توان این کار را برای همیشه ادامه داد؟ اگر نمی‌شود، چه عاملی مانع آن است؟

۲۲. چرا اتم منزوی نمی‌تواند گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی داشته باشد؟

۲۳. یونها و الکترونها مانند مراکز چگالش عمل می‌کنند؛ یعنی در هوا قطره‌های ریز آب در اطراف آنها شکل می‌گیرند. دربارهٔ علت این موضوع توضیح دهید.

۲۴. اگر V در سراسر ناحیه‌ای از فضا ثابت باشد، دربارهٔ $\vec{\mathbf{E}}$ در آن ناحیه چه می‌توان گفت؟

۲۵. در فصل ۱۴ دیدیم شدت میدان گرانشی در داخل پوستهٔ کروی ماده برابر صفر است. شدت میدان الکتریکی نه تنها در داخل یک رسانای باردار کروی منزوی صفر است بلکه در داخل هر رسانای منزوی با هر شکلی صفر است. آیا شدت میدان گرانشی در داخل، مثلاً، یک پوستهٔ مکعبی از ماده صفر است؟ اگر صفر نیست، از چه نظر تشابه بین میدانها کامل نیست؟

۲۶. چگونه می‌توانید اطمینان حاصل کنید که پتانسیل الکتریکی در ناحیهٔ مشخصی از فضا دارای مقدار ثابتی است؟

۲۷. سه بار نقطه‌ای را که در فاصلهٔ محدودی از یکدیگر قرار گرفته‌اند طوری مرتب کنید که انرژی پتانسیل الکتریکی آن صفر شود.

۲۸. باری را روی یک رسانای عایق‌بندی‌شده به شکل مکعب کامل، قرار داده‌ایم. چگالی نسبی بار در نقطه‌های مختلف روی مکعب (سطحی، یالها، کنجها) چگونه است؟ اگر مکعب در هوا باشد، چه بر سر بار خواهد آمد؟

۲۹. دیدیم (بخش ۲۸ـ۹) که پتانسیل در داخل رسانا مانند پتانسیل در سطح آن است. (الف) اگر رسانا شکل نامنظمی داشته باشد و کاواک داخل آن نیز نامنظم باشد چه اتفاقی خواهد افتاد؟ (ب) اگر کاواک با یک "سوراخ کرم‌خوردگی" کوچک به خارج وصل شود چه خواهد شد؟ (ج) اگر کاواک بسته باشد ولی یک بار نقطه‌ای در داخل آن معلق باشد چه خواهد شد؟ دربارهٔ پتانسیل داخل مادهٔ رسانا و در نقاط مختلف درون کاواکها بحث کنید.

۳۰. یک پوستهٔ رسانای کروی عایق‌بندی‌شده حامل مقداری بار منفی است. اگر یک جسم فلزی که حامل بار مثبت است در تماس با جدار داخلی پوسته قرار گیرد چه اتفاقی می‌افتد؟ سه مورد زیر را که در آن اندازهٔ بار مثبت (الف) کمتر از بار منفی، (ب) برابر بار منفی، و (ج) بیشتر از بار منفی است بررسی کنید.

۳۱. یک کرهٔ فلزی بدون بار از یک رشته نخ ابریشمی آویزان و در داخل یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار دارد. اندازهٔ شدت میدان الکتریکی برای نقاط داخل کره چقدر است؟ آیا اگر کره حامل باری باشد جوابهای شما تغییر خواهد کرد؟

تمرینها

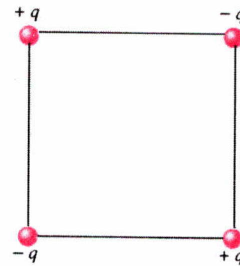
۲۸ـ۱ انرژی پتانسیل

۲۸ـ۲ انرژی پتانسیل الکتریکی

۱. در مدل کوارکی ذرات بنیادی، پروتون از سه کوارک: دو کوارک "بالا" که بار هرکدام $+۲/۳e$ و یک کوارک "پایین" با بار $-۱/۳e$، تشکیل شده است. فرض کنید سه کوارک در فاصلهٔ مساوی از یکدیگر قرار داشته باشند. فاصلهٔ بین آنها $۱٫۳۲ \times ۱۰^{-۱۵}$ در نظر بگیرید و (الف) انرژی پتانسیل برهم‌کنش بین دو کوارک "بالا" و (ب) انرژی پتانسیل الکتریکی کل این مجموعه را محاسبه کنید.

۲. رابطه‌ای برای کار مورد نیاز یک عامل خارجی به منظور قرار دادن چهار بار الکتریکی به‌صورت نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۲۸ به‌دست آورید. طول هر ضلع مربع a است.

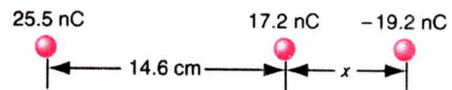
۳. یک دهه پیش از آنکه اینشتین نظریهٔ نسبیت خود را منتشر کند، جی. جی. تامسون مطرح کرد که الکترون ممکن است از اجزای کوچکی تشکیل یافته باشد و جرم الکترون ناشی از برهم‌کنش الکتریکی این اجزاست. علاوه بر آن، اظهار کرد که انرژی الکترون برابر با $mc^۲$ است.



شکل ۲۸ـ۲۸ تمرین ۲.

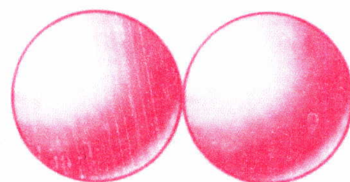
با بهره‌گیری از روش زیر جرم الکترون را به‌طور تقریبی برآورد کنید: فرض کنید الکترون از سه جزء کاملاً یکسان تشکیل شده است که آنها را از بینهایت آوردیم و در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع که طول هر ضلع آن برابر با شعاع کلاسیک الکترون، یعنی $۲٫۸۲ \times ۱۰^{-۱۵}\text{m}$ است، قرار داده‌ایم. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی کل این مجموعه را تعیین کنید. (ب) این مقدار را بر $c^۲$ تقسیم و نتیجهٔ به‌دست‌آمده را با مقدار پذیرفته‌شدهٔ جرم الکترون ($۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\text{kg}$) مقایسه کنید. اگر تعداد اجزا را بیشتر در نظر بگیریم نتیجهٔ بهتری به‌دست می‌آید. امروزه، الکترون را یک تک‌ذرهٔ تقسیم‌نشدنی درنظر می‌گیریم.

۴. بارهای شکل ۲۸ـ۲۹ در مکان ثابتی در فضا قرار دارند. فاصلهٔ x را چنان تعیین کنید که انرژی پتانسیل الکتریکی این مجموعه برابر با صفر شود.



شکل ۲۸ـ۲۹ تمرین ۴.

۵. شکل ۲۸ـ۳۰ نمایش ایده‌آلی از هستهٔ اورانیوم ^{۲۳۸}U $(Z = ۹۲)$ را در آستانهٔ شکافت نشان می‌دهد. (الف) نیروی رانشی وارد بر هر یک از دو شکافت‌پاره و (ب) انرژی پتانسیل الکتریکی متقابل شکافت‌پاره‌ها را محاسبه کنید. فرض کنید که شکافت‌پاره‌ها از نظر اندازه و بار یکسان و هر دو کروی و مماس با یکدیگر باشند. شعاع هستهٔ در آغاز کروی اورانیوم برابر ۸٫۰ فرمی است. فرض کنید که مادهٔ خارج از هسته‌ای است که چگالی ثابتی داشته باشد.


شکل ۲۸ـ۳۰ تمرین ۵.

۲۸ـ۳ پتانسیل الکتریکی

۶. اختلاف پتانسیل دو سطح تخت رسانای موازی که در فاصلهٔ $d = ۱٫۰\ \text{cm}$ از یکدیگر قرار دارند، ΔV، برابر $۱۰٫۳\,\text{kV}$ است. الکترونی از یکی از این دو صفحه مستقیماً به صفحهٔ دیگر پرتاب می‌شود. اگر الکترون درست در زمان رسیدن به سطح دوم به حالت سکون درآید، سرعت اولیهٔ الکترون به هنگام پرتاب چقدر بوده است؟ از آثار نسبیتی چشم بپوشید.

۷. در یک آذرخش نوعی، اختلاف پتانسیل بین نقاط تخلیه در حدود $۱٫۰ \times ۱۰^۹\text{V}$ و مقدار باری که انتقال پیدا می‌کند در حدود $۳۰\ \text{C}$ است. (الف) در این آذرخش چقدر انرژی آزاد می‌شود؟ (ب) اگر تمام انرژی آزادشده را صرف شتاب‌دادن یک اتومبیل ۱۲۰۰ کیلوگرمی می‌کردیم سرعت نهایی آن چقدر می‌شد؟ (ج) اگر از این انرژی برای ذوب‌کردن یخ استفاده می‌کردیم، چقدر یخ را در ۰°C ذوب می‌کرد؟

۸. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ تخلیه در یک آذرخش معین $۱٫۲۳ \times ۱۰^۹\text{V}$ است. اندازهٔ تغییر در انرژی پتانسیل الکتریکی الکترونی که بین دو نقطه جابه‌جا می‌شود چقدر است؟ پاسخهای خود را برحسب (الف) ژول و (ب) الکترون‌ولت بیان کنید.

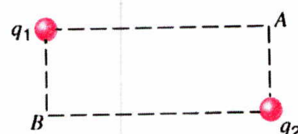
۹. ذره‌ای با بار q را در مکان ثابتی در نقطهٔ P نگه داشته‌ایم و ذرهٔ دیگری به جرم m را که حامل همان بار q است، ابتدا در حالت سکون در فاصلهٔ $r_۱$ از نقطهٔ P نگه می‌داریم. سپس ذرهٔ دوم را رها می‌کنیم و ذرهٔ اول آن را می‌راند. سرعت ذرهٔ دوم را در لحظه‌ای که در فاصلهٔ $r_۲$ از P قرار دارد معین کنید. فرض کنید $q = ۳٫۱\mu\text{C}$، $m = ۱۸\text{mg}$، $r_۱ = ۰٫۹۰\ \text{mm}$، و $r_۲ = ۲٫۵\ \text{mm}$ است.

۱۰. الکترونی با سرعت اولیهٔ $۳٫۴۴ \times ۱۰^۵\text{m/s}$، مستقیماً به‌طرف پروتونی که در حال سکون قرار دارد، پرتاب می‌شود. اگر فاصلهٔ الکترون از پروتون در آغاز زیاد باشد، در چه فاصله‌ای از پروتون سرعت لحظه‌ای آن دوبرابر سرعت اولیه‌اش خواهد شد؟

۱۱. (الف) پتانسیل الکتریکی هستهٔ اتم هیدروژن در فاصلهٔ میانگین الکترونی که گرد آن می‌چرخد ($r = ۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\text{m}$)؛ (ب) انرژی پتانسیل الکتریکی اتم وقتی الکترون در این فاصله قرار دارد؛ و (ج) انرژی جنبشی الکترون را، با فرض اینکه مدار الکترون دایره‌ای با این شعاع به مرکز هسته باشد، محاسبه کنید. (د) برای یونش اتم هیدروژن چقدر انرژی لازم است؟ تمام انرژیها را برحسب الکترون‌ولت بیان کنید، و فرض کنید که در فاصلهٔ بینهایت $V = ۰$ است.

۱۲. در مستطیل نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۳۱، طول اضلاع ۵٫۰ cm و ۱۵ cm و بارها $q_۱ = -۵٫۰\mu\text{C}$ و $q_۲ = +۲٫۰\mu\text{C}$

است. (الف) پتانسیل الکتریکی در رأسهای B و A چقدر است؟ (ب) چه مقدار کار خارجی لازم است انجام شود تا بار سومی به اندازهٔ $q_3 = +3{,}0\mu C$ را در امتداد قطر مستطیل از B به A ببریم؟ (ج) آیا در این فرایند کار خارجی به انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی تبدیل شده است یا برعکس؟ دربارهٔ پاسختان توضیح دهید.



شکل ۲۸ـ۳۱ تمرین ۱۲.

۴ـ۲۸ محاسبهٔ پتانسیل از میدان

۱۳. دو صفحهٔ بزرگ رسانای موازی در فاصلهٔ $12{,}0\ \mathrm{cm}$ از هم قرار دارند و هر دو حامل بارهای مساوی و با علامت مخالف روی سطحهایی هستند که مقابل هم قرار گرفته‌اند. بر الکترونی که در وسط دو صفحه قرار گرفته است نیروی $3{,}90 \times 10^{-15}\mathrm{N}$ وارد می‌شود. (الف) شدت میدان الکتریکی را در محل الکترون معین کنید. (ب) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها را به‌دست آورید.

۱۴. یک برگهٔ باردار نامتناهی دارای چگالی بار $\sigma = 0{,}12\mu\mathrm{C/m^2}$ است. سطحهای هم‌پتانسیلی که اختلاف پتانسیل آنها $48\ \mathrm{V}$ است در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند؟

۱۵. شمارگر گایگر دارای یک استوانهٔ فلزی به قطر $2{,}10\ \mathrm{cm}$ است که در امتداد محور آن رشته‌سیمی به قطر $1{,}34 \times 10^{-4}\mathrm{cm}$ کشیده شده است. اگر پتانسیل $855\ \mathrm{V}$ بین آنها برقرار شود، شدت میدان الکتریکی را در سطح (الف) سیم و (ب) استوانه معین کنید. (راهنمایی: از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۰، فصل ۲۷ استفاده کنید.)

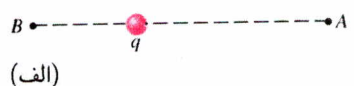
۱۶. در آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان (نگاه کنید به بخش ۲۶ـ۶)، میدان الکتریکی ثابت $1{,}92 \times 10^{5}\mathrm{N/C}$ بین دو صفحه‌ای که در فاصلهٔ $1{,}50\ \mathrm{cm}$ از هم قرار دارند دایر است. اختلاف پتانسیل بین دو صفحه را تعیین کنید.

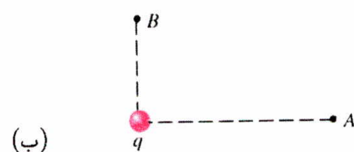
۵ـ۲۸ پتانسیل ناشی از بارهای نقطه‌ای

۱۷. هستهٔ طلا حاوی بار مثبتی برابر با بار ۷۹ پروتون و شعاع آن $7{,}0$ فرمی است؛ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۷ را ببینید. ذرهٔ آلفایی (که از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده است) در فاصله‌های بسیار دور از هستهٔ طلا دارای انرژی جنبشی K است و مستقیماً به سمت آن حرکت می‌کند. ذرهٔ آلفا آن‌قدر به هسته نزدیک می‌شود تا درست با سطح هستهٔ طلا تماس پیدا کرده جهت سرعتش تغییر کند. (الف) انرژی جنبشی K را محاسبه کنید. (ب) انرژی واقعی ذرهٔ آلفایی که در آزمایش رادرفورد و همکارانش مورد استفاده قرار گرفت و به کشف مفهوم اتم دارای هسته انجامید برابر $5{,}0\ \mathrm{MeV}$ بود. از این موضوع چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۸. سرعت فرار الکترون را از سطح یک کرهٔ دارای بار یکنواخت به شعاع $1{,}22\ \mathrm{cm}$ و بار کل $1{,}76 \times 10^{-15}\mathrm{C}$، محاسبه کنید. از نیروهای گرانشی چشم بپوشید.

۱۹. بار نقطه‌ای $q = +1{,}16\mu\mathrm{C}$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ A را در فاصلهٔ $2{,}06\ \mathrm{m}$ از آن و نقطهٔ B را در فاصلهٔ $1{,}17\ \mathrm{m}$ در طرف دیگر آن، مطابق شکل ۲۸ـ۳۲(الف)، اختیار کنید. (الف) اختلاف پتانسیل $V_A - V_B$ را معین کنید. (ب) همین کار را برای وقتی که نقاط A و B در محل نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۳۲(ب) اختیار شده‌اند تکرار کنید.





شکل ۲۸ـ۳۲ تمرین ۱۹.

۲۰. بخش اعظم موادی که حلقه‌های زحل را تشکیل می‌دهند (نگاه کنید به شکل ۲۸ـ۳۳) ذرات غبار بسیار ریز با شعاعهایی از مرتبهٔ $1{,}0\mu\mathrm{m}$ هستند. این دامنه‌های ریز در ناحیه‌ای قرار دارند که حاوی



شکل ۲۸ـ۳۳ تمرین ۲۰.

گاز یونیده رقیقی است که الکترونهای اضافی را جمع می‌کنند. اگر پتانسیل الکتریکی در سطح این دانه‌ها برابر با $-۴۰۰\ \mathrm{V}$ باشد، آنها چند الکترون اضافی جمع کرده‌اند؟

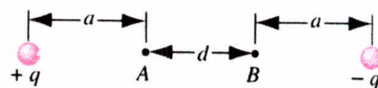
۲۱. وقتی یک فضاپیما در ناحیهٔ حاوی گاز یونیدهٔ رقیقی در یون‌سپهر زمین حرکت می‌کند، پتانسیل آن قبل از اینکه یک دور کامل بزند، نوعاً به اندازهٔ $-۱٫۰\ \mathrm{V}$ تغییر می‌کند. با فرض اینکه فضاپیما کره‌ای به شعاع $۱۰\ \mathrm{m}$ باشد، مقدار بارگردآوری‌شده را برآورده کنید.

۲۲. فرض کنید که بار منفی موجود در یک سکهٔ مسی را برداریم و به فاصلهٔ بسیار دوری از زمین منتقل کنیم ــ شاید به یک کهکشان دوردست ــ و بار مثبت آن را به‌طور یکنواخت روی سطح زمین توزیع کنیم. پتانسیل الکتریکی در سطح زمین چه تغییری خواهد کرد؟ (مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵ـ۱ را ببینید.)

۲۳. در نزدیکی سطح زمین اغلب یک میدان الکتریکی با شدت تقریبی $۱۰۰\ \mathrm{V/m}$ مشاهده می‌شود. اگر این میدان در تمامی سطح زمین یکسان باشد، پتانسیل الکتریکی یک نقطه روی سطح زمین چقدر است؟ فرض کنید که در بینهایت $V = ۰$ است.

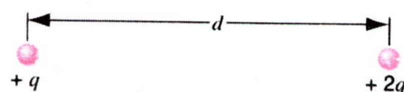
۲۴. مولکول آمونیاک، $NH_۳$، دارای یک گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی به مقدار $۱٫۴۷\ \mathrm{D}$ است، که در آن D یکای دبی و مقدار آن $۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۳۰}\ \mathrm{C \cdot m}$ است. پتانسیل الکتریکی ناشی از مولکول آمونیاک را در نقطه‌ای به فاصلهٔ $۵۲٫۰\ \mathrm{nm}$ از مرکز دوقطبی و روی محور آن، محاسبه کنید. فرض کنید که در بینهایت $V = ۰$ است.

۲۵. (الف) در شکل ۲۸ـ۳۴، رابطه‌ای برای پتانسیل $V_A - V_B$ به‌دست آورید. (ب) آیا پاسخی را که به‌دست آورده‌اید در این حالتها مورد انتظار شماست: وقتی $d = ۰$ است؟ وقتی $a = ۰$ است؟ و وقتی $q = ۰$ است؟



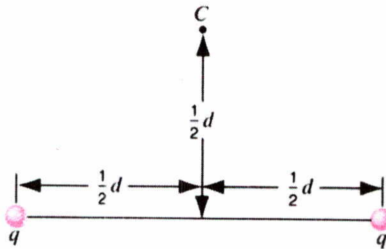
شکل ۲۸ـ۳۴ تمرین ۲۵.

۲۶. در شکل ۲۸ـ۳۵، محل نقطه‌هایی را مشخص کنید که (الف) در آنجا $V = ۰$ و (ب) در آنجا $E = ۰$ است؛ البته در صورتی که چنین نقطه‌هایی وجود داشته باشند. فقط نقطه‌های روی محور را مورد توجه قرار دهید و فرض کنید که در بینهایت $V = ۰$ است.



شکل ۲۸ـ۳۵ تمرین ۲۶.

۲۷. دو بار نقطه‌ای $q = +۲٫۱۳\,\mu\mathrm{C}$ در فضا در فاصلهٔ $d = ۱٫۹۶\ \mathrm{cm}$ از یکدیگر، مطابق شکل ۲۸ـ۳۶، ثابت شده‌اند. (الف) پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ C چقدر است؟ فرض کنید که در بینهایت $V = ۰$ است. (ب) بار سومی به مقدار $Q = +۱٫۹۱\,\mu\mathrm{C}$ را به‌آرامی از بینهایت به نقطهٔ C می‌آوریم. چقدر کار باید انجام دهیم؟ (ج) وقتی بار سوم در جای خود قرار گرفت، انرژی پتانسیل U این پیکربندی چقدر است؟



شکل ۲۸ـ۳۶ تمرین ۲۷.

۲۸ـ۶ پتانسیل الکتریکی توزیعهای پیوستهٔ بار

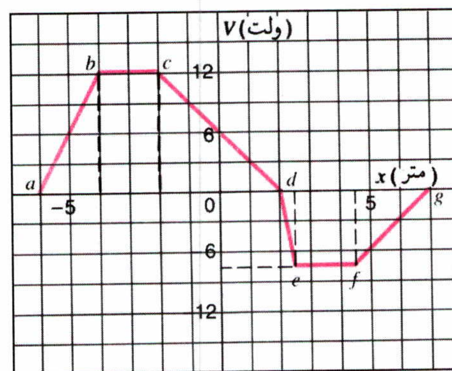
۲۸. در چه فاصله‌ای از مرکز و در امتداد محور یک قرص یکنواخت باردارشده به شعاع R، پتانسیل الکتریکی نصف مقدار پتانسیل در مرکز قرص و روی سطح آن خواهد شد؟

۲۹. بار الکتریکی $-۹٫۱۲\ \mathrm{nC}$ را به‌طور یکنواخت روی حلقه‌ای به شعاع $۱٫۴۸\ \mathrm{m}$ که در صفحهٔ yz قرارگرفته و مرکزش در مبدأ مختصات است توزیع می‌کنیم. ذره‌ای که حامل بار $-۵٫۹۳\ \mathrm{pC}$ است روی محور x در فاصلهٔ $x = ۳٫۰۷\ \mathrm{m}$ قرار گرفته است. کار یک عامل خارجی را برای آوردن این بار نقطه‌ای به مبدأ مختصات محاسبه کنید.

۲۸ـ۷ محاسبهٔ میدان از پتانسیل

۳۰. فرض کنید که پتانسیل الکتریکی روی محور x مطابق نمودار شکل ۲۸ـ۳۷ تغییر می‌کند. در بین بازه‌های نشان داده‌شده در این شکل (از رفتار نقطه‌های انتهایی بازه‌ها چشم‌پوشی کنید) بازه‌هایی را تعیین کنید که برای آنها E_x دارای (الف) بیشترین قدرمطلق و (ب) کمترین قدرمطلق است. (ج) E_x را برحسب x رسم کنید.

۳۱. دو صفحهٔ فلزی بزرگ موازی که در فاصلهٔ $۱٫۴۸\ \mathrm{cm}$ از هم قرار گرفته‌اند حامل بارهای مساوی و با علامت مخالف روی سطحهای مقابل هم هستند. صفحهٔ منفی به زمین متصل شده است و پتانسیل



شکل ۲۸ـ۳۷ تمرین ۳۰.

آن را صفر اختیار می‌کنیم. اگر پتانسیل در وسط این دو صفحه برابر با $+۵٫۵۲\ V$ باشد، میدان الکتریکی در این ناحیه چقدر است؟

۳۲. از معادلهٔ (۲۸ـ۳۰) رابطه‌ای را برای E در نقطه‌های روی محور یک حلقهٔ دارای بار یکنواخت به‌دست آورید.

۳۳. شیب پتانسیل شعاعی، $\partial V/\partial r$، را روی سطح هستهٔ طلا محاسبه کنید. مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸ـ۷ را ببینید.

۳۴. تمرین ۳۹ فصل ۲۶ مربوط به محاسبهٔ رادرفورد از میدان الکتریکی در فاصلهٔ r از مرکز یک اتم است. او پتانسیل الکتریکی را نیز به‌صورت زیر ارائه داد:

$$V = \frac{Ze}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{۱}{r} - \frac{۳}{۲R} + \frac{r^۲}{۲R^۳}\right)$$

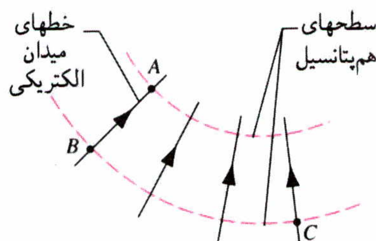
(الف) نشان دهید که چگونه عبارت مربوط به میدان الکتریکی در تمرین ۳۹ فصل ۲۶ از این عبارت مربوط به V به‌دست می‌آید. (ب) چرا به‌ازای $r \to \infty$ عبارت بالا برای V، به سمت صفر میل نمی‌کند؟

۳۵. پتانسیل الکتریکی V در فضای بین صفحه‌های یک لامپ تخلیهٔ خاص که اکنون دور انداخته شده است از رابطهٔ $V = (۱۵۳۰\ V/m^۲)x^۲$ به‌دست می‌آید، که در اینجا x فاصله از یکی از صفحات است. مقدار و جهت میدان الکتریکی را در فاصلهٔ $x = ۱٫۲۸\,cm$ محاسبه کنید.

۲۸ـ۸ سطحهای هم‌پتانسیل

۳۶. دو توزیع بار خطی به موازات محور z قرارگرفته‌اند. یکی از آنها، دارای بار $+\lambda$ در واحد طول است و در فاصلهٔ a در طرف راست محور قرار دارد. توزیع دیگر، دارای بار $-\lambda$ در واحد طول است و در فاصلهٔ a در طرف چپ محور قرار دارد (این خطها و محور z جملگی در یک صفحه قرار دارند). برخی از سطحهای هم‌پتانسیل را رسم کنید.

۳۷. در جابه‌جایی از نقطهٔ A به نقطهٔ B در امتداد یک خط میدان الکتریکی، میدان الکتریکی شکل ۲۸ـ۳۸ مقدار $۳٫۹۴ \times ۱۰^{-۱۹}J$ کار روی یک الکترون انجام می‌دهد. اختلاف پتانسیل الکتریکی در حالتهای زیر چقدر است؟ (الف) $V_B - V_A$، (ب) $V_C - V_A$، و (ج) $V_C - V_B$.



شکل ۲۸ـ۳۸ تمرین ۳۷.

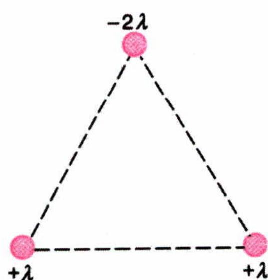
۳۸. بار نقطه‌ای $q = ۱٫۵ \times ۱۰^{-۸}C$ را در نظر بگیرید. (الف) شعاع سطح هم‌پتانسیل دارای پتانسیل $۳۰\ V$ چقدر است؟ فرض کنید که در بینهایت $V = ۰$ است. (ب) آیا فاصلهٔ بین سطحهایی که اختلاف پتانسیل آنها از یکدیگر مقدار ثابتی (مثلاً $۱٫۰\ V$) است، برابر است؟

۳۹. در شکل ۲۸ـ۳۹(الف) خطهای میدان الکتریکی و (ب) فصل مشترک سطحهای هم‌پتانسیل با صفحهٔ شکل را به‌صورت کیفی رسم کنید. (راهنمایی: رفتار را در نزدیکی هر یک از دو بار و در فاصله‌های بسیار دور از آنها بررسی کنید.)



شکل ۲۸ـ۳۹ تمرین ۳۹.

۴۰. سه خط بار موازی طویل، دارای چگالی طولی بار نسبی نشان داده‌شده در شکل ۲۸ـ۴۰ هستند. برخی از خطهای میدان الکتریکی و تعدادی از فصل مشترک سطحهای هم‌پتانسیل با صفحهٔ شکل را رسم کنید.



شکل ۲۸ـ۴۰ تمرین ۴۰.

۲۸ـ۹ پتانسیل یک رسانای باردار

۴۱. یک پوستهٔ کروی رسانای نازک با شعاع خارجی ۲۰ cm حامل بار ۳٫۰+ μC است. (الف) اندازهٔ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ و (ب) پتانسیل V این توزیع بار را برحسب فاصلهٔ r از مرکز پوسته ترسیم کنید. (فرض کنید در بینهایت $V = ۰$ است.)

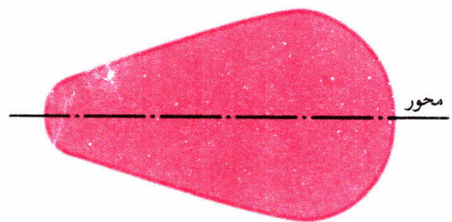
۴۲. دو کرهٔ رسانای ۱ و ۲ را به فاصلهٔ بسیار زیاد از یکدیگر در نظر بگیرید که قطر دومی دوبرابر قطر اولی است. کرهٔ کوچکتر در آغاز حامل بار مثبت q و کرهٔ بزرگتر بدون بار است. اکنون دو کره را با یک رشتهٔ سیم نازک و دراز به‌هم متصل می‌کنیم. (الف) پتانسیلهای نهایی $V_۱$ و $V_۲$ دو کره چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند؟ (ب) بارهای نهایی $q_۱$ و $q_۲$ روی دو کره را برحسب بار q تعیین کنید.

۴۳. اگر زمین بار خالصی معادل یک الکترون بر مترمربع به‌ازای کل مساحتش داشت (فرضی بسیار غیرطبیعی)، (الف) پتانسیل زمین چقدر می‌شد؟ (ب) میدان الکتریکی ناشی از زمین درست روی سطح آن چقدر بود؟

۴۴. بار الکتریکی ۱۵ nC را می‌توان به‌راحتی با مالش به‌دست آورد. این مقدار بار، پتانسیل یک کرهٔ رسانای منزوی با شعاع ۱۶ cm را چقدر (نسبت به $V = ۰$ در بینهایت) افزایش می‌دهد؟

۴۵. (الف) مقدار بار و (ب) چگالی بار روی سطح یک کرهٔ رسانا به شعاع ۱۵٫۲ cm را که پتانسیل آن ۲۱۵ V است تعیین کنید. (فرض کنید در بینهایت $V = ۰$ است.)

۴۶. جسم فلزی شکل ۲۸ـ۴۱ یک جسم دوار حول محور افقی است. اگر این جسم دارای بار منفی باشد، چندتایی از سطحهای هم‌پتانسیل و خطهای میدان الکتریکی آن را به‌طور تقریبی رسم کنید. برای انجام این کار از استدلال فیزیکی استفاده کنید و نه از تحلیل ریاضی.



شکل ۲۸ـ۴۱ تمرین ۴۶.

۴۷. دو کرهٔ رسانا، یکی به شعاع ۵٫۸۸ و دیگری به شعاع ۱۲٫۲ cm را در نظر بگیرید که هرکدام دارای بار الکتریکی ۲۸٫۶ nC هستند و در آغاز در فاصلهٔ بسیار دوری از هم قرار دارند. اگر این دو کره را با یک رشته سیم رسانا به‌هم متصل کنیم، (الف) بار نهایی واقع بر آنها و (ب) پتانسیل هر یک از دو کره را تعیین کنید، فرض کنید در بینهایت $V = ۰$ است.

۴۸. یک کرهٔ فلزی باردار به شعاع ۱۶٫۲ cm حامل ۳۱٫۵ nC بار خالص است. (الف) پتانسیل الکتریکی را در سطح کره معین کنید. (ب) در چه فاصله‌ای از سطح کره پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ ۵۵۰ V کاهش می‌یابد؟

۲۸ـ۱۰ شتابدهندهٔ الکتروستاتیکی

۴۹. (الف) برای رساندن پتانسیل کرهٔ فلزی منزوی به شعاع ۱٫۰ m به ۱٫۰ MV چقدر بار لازم است؟ این محاسبه را برای کره‌ای به شعاع ۱٫۰ cm تکرار کنید. فرض کنید در بینهایت $V = ۰$ است. (ب) چرا در شتابدهندهٔ الکتروستاتیکی از یک کرهٔ بزرگ استفاده می‌کنیم در حالی که با بهره‌گیری از یک کره کوچکتر و مقدار کمتری بار می‌توان به همان پتانسیل دست یافت؟ (راهنمایی: چگالیهای بار را محاسبه کنید.)

۵۰. فرض کنید که اختلاف پتانسیل بین پوستهٔ داخلی پتانسیل ـــ بالای یک شتابدهندهٔ وان دوگراف و نقطه‌ای که بارها روی تسمهٔ متحرک پاشیده می‌شود برابر با ۳٫۴۱ MV باشد. اگر تسمه بار را با آهنگ ۲٫۸۳ mC/s به پوسته منتقل کند، حداقل توان مورد نیاز برای به حرکت درآوردن تسمه چقدر است؟

مسئله‌ها

۱. (الف) الکترون در چه اختلاف پتانسیلی باید سقوط کند، تا با توجه به مکانیک نیوتونی سرعت، v، آن برابر با سرعت مسیر نور، c، شود؟ (ب) وقتی $v \to c$ مکانیک نیوتونی با شکست مواجه می‌شود، بنابراین، با بهره‌گیری از رابطهٔ صحیح نسبیتی زیر برای انرژی جنبشی (معادلهٔ ۲۰ـ۲۷ را ببینید)

$$K = mc^۲ \left[\frac{۱}{\sqrt{۱ - (v/c)^۲}} - ۱ \right]$$

به‌جای عبارت نیوتونی $K = \frac{۱}{۲} mv^۲$، سرعت واقعی الکترون را پس از سقوط در این اختلاف پتانسیل، محاسبه‌شده در قسمت (الف)، تعیین کنید. این سرعت را به‌صورت کسر مناسبی از سرعت نور بیان کنید.

۲. فرض کنید که الکترون پوسته‌ای توخالی با شعاع $۲٫۸۲ \times ۱۰^{-۱۵}$m است که بار e به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است، سپس تمرین ۳ را تکرار کنید.

۳. فرض می‌کنیم ذره‌ای با بار (مثبت) Q در مکان ثابت P قرار دارد. ذرهٔ دومی به جرم m و بار (منفی) $-q$ با سرعتی ثابت در دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز P در حرکت است. رابطه‌ای برای کار W که یک عامل خارجی باید روی ذرهٔ دوم انجام دهد به‌دست آورید تا شعاع حرکت دایره‌ای حول P به r_2 افزایش یابد.

۴. میدان الکتریکی در داخل یک کرهٔ نارسانا به شعاع R که چگالی بار در آن یکنواخت است، به‌صورت شعاعی بوده و بزرگی آن به شکل زیر است:

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

که در اینجا q کل بار موجود در کره و r فاصلهٔ نقطهٔ موردنظر از مرکز کره است. (الف) پتانسیل V را در داخل کره معین کنید، فرض کنید که در $r = 0$ داشته باشیم $V = 0$. (ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی بین یک نقطه روی سطح کره و مرکز کره چقدر است؟ اگر بار q مثبت باشد، کدام نقطه در پتانسیل بالاتری قرار دارد؟ (ج) نشان دهید که برای $r < R$ پتانسیل در فاصلهٔ r از مرکز کره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم در $r = \infty$ پتانسیل صفر است. چرا این نتیجه، با آنچه در قسمت (الف) به‌دست آورده‌ایم تفاوت دارد؟

۵. سه بار $+122\ \mathrm{mC}$ در سه رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $1{,}72\ \mathrm{m}$ قرار گرفته‌اند. اگر انرژی با آهنگ ۸۳۱ ولت تأمین شود، چند روز طول می‌کشد تا یکی از این بارها را به وسط خطی که دو بار دیگر را به‌هم متصل می‌کند ببریم؟

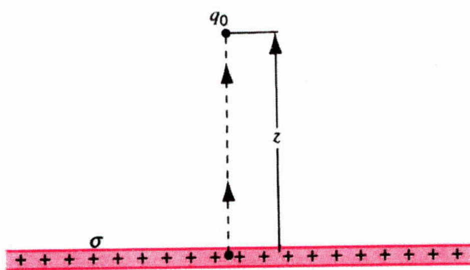
۶. ذره‌ای به جرم m، بار $q > 0$، و انرژی جنبشی اولیهٔ K (از "بینهایت") به‌طرف یک هستهٔ سنگین با بار Q، که فرض می‌کنیم در دستگاه مختصات ثابت است، پرتاب می‌شود. (الف) اگر هدف "کامل" باشد، وقتی که ذرهٔ پرتابه به‌طور لحظه‌ای متوقف می‌شود، فاصلهٔ آن از مرکز هستهٔ هدف چقدر است؟ (ب) برای یک هدف ناقص مشخص، کمترین فاصلهٔ ذرهٔ پرتابه از هسته دوبرابر فاصله‌ای است که در قسمت (الف) معین کردیم. سرعت ذرهٔ پرتابه را در این نزدیکترین فاصله از مرکز هسته معین کنید. فرض کنید ذره به سطح هسته نمی‌رسد.

۷. یک قطرهٔ کروی آب حامل بار $32{,}0\ \mathrm{pC}$ و پتانسیل سطح آن $512\ \mathrm{V}$ است. (الف) شعاع قطره چقدر است؟ (ب) اگر دو تا از این قطره‌ها با همین بار و همین شعاع به‌هم ملحق شوند و تشکیل یک قطرهٔ کروی واحد بدهند، پتانسیل در سطح این قطرهٔ جدید چقدر است؟ فرض کنید در بینهایت $V = 0$ است.

۸. در شکل ۲۸ـ۴۲ مقطع یک برگهٔ "نامتناهی" از بار مثبت با چگالی σ را نشان داده‌ایم. (الف) وقتی بار آزمون کوچک مثبت q_0 را از مکان اولیه‌ای واقع بر برگهٔ باردار به مکان نهایی که در فاصلهٔ عمودی z از برگه قرار دارد، می‌بریم، میدان الکتریکی چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ (ب) با استفاده از نتیجه‌های قسمت (الف) نشان دهید که پتانسیل الکتریکی برگهٔ نامتناهی از بار را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

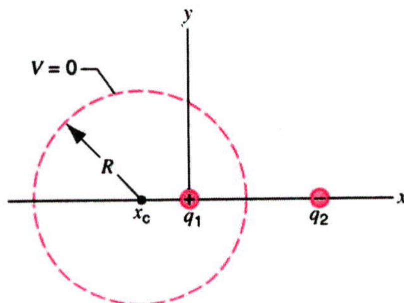
$$V = V_0 - \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) z$$

که در اینجا V_0 پتانسیل در سطح برگه است.



شکل ۲۸ـ۴۲ مسئلهٔ ۸.

۹. بار نقطه‌ای $q_1 = +6e$ در مبدأ یک دستگاه مختصات راستگوشه قرار گرفته است و یک بار الکتریکی نقطه‌ای دیگر، $q_2 = -10e$، در نقطهٔ $x = 9{,}60\ \mathrm{nm}$ و $V = 0$ قرار دارد. مکان هندسی تمام نقاطی از صفحهٔ xy که برای آنها $V = 0$ است دایره است، که، مطابق شکل ۲۸ـ۴۳، مرکزش روی محور x است. البته، در اینجا فرض کرده‌ایم در بینهایت $V = 0$ است. (الف) مکان x_c، یعنی مرکز دایره و (ب) شعاع R دایره را معین کنید. (ج) آیا سطح هم‌پتانسیل $V = 5\ \mathrm{V}$ نیز دایره است؟



شکل ۲۸ـ۴۳ مسئلهٔ ۹.

۱۰. بار مثبت Q را روی یک طوق دایره‌ای تخت نارسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b توزیع کرده‌ایم. این بار چنان توزیع شده است که چگالی بار (بار بر واحد سطح) آن از رابطهٔ $\sigma = k/r^3$

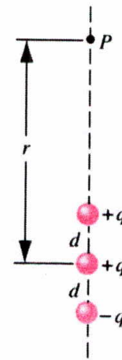
به‌دست می‌آید، که در آن r فاصلهٔ هر نقطه از مرکز طوق است. نشان دهید پتانسیل در مرکز طوق (با فرض اینکه در بینهایت، $V = ۰$ است) برابر است با

$$V = \frac{Q}{۸\pi\epsilon_۰}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

۱۱. نشان دهید که برای مجموعهٔ بارهای الکتریکی شکل ۲۸ـ۴۴، پتانسیل $V(r)$ نقاط روی محور قائم، با فرض اینکه $r \gg d$ باشد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

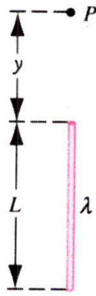
$$V = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{۲}\left(۱ + \frac{۲d}{r}\right)$$

در اینجا فرض می‌کنیم در بینهایت $V = ۰$ است. (راهنمایی: این پیکربندی بار را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای متشکل از یک بار منزوی و یک دوقطبی در نظر گرفت.)



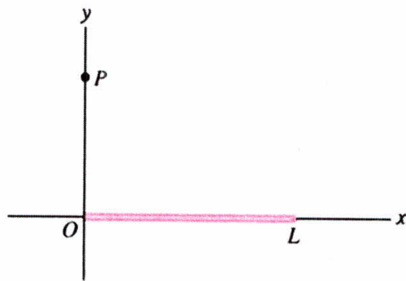
شکل ۲۸ـ۴۴ مسئلهٔ ۱۱.

۱۲. روی میلهٔ نازکی به‌طول L بار را با چگالی طولی ثابت λ (بار به‌ازای واحد طول) توزیع کرده‌ایم. (الف) پتانسیل الکتریکی این توزیع را در نقطهٔ P که به فاصلهٔ y از یک سر میله و در امتداد آن قرار دارد (با فرض صفر بودن پتانسیل در بینهایت) معین کنید (شکل ۲۸ـ۴۵ را ببینید). (ب) با استفاده از نتیجهٔ به‌دست‌آمده در قسمت (الف) مؤلفهٔ y (در امتداد میله) میدان الکتریکی در نقطهٔ P را محاسبه کنید. (ج) مؤلفهٔ میدان الکتریکی در راستای عمود بر میله را در نقطهٔ P تعیین کنید.



شکل ۲۸ـ۴۵ مسئلهٔ ۱۲.

۱۳. روی میلهٔ نازکی به طول L که در امتداد محور x طوری قرارگرفته است که یک سر آن در مبدأ مختصات است ($x = ۰$)، همانند شکل ۲۸ـ۴۶، توزیع بار به ازای واحد طول به‌صورت $\lambda = kr$ است، که در اینجا k مقداری ثابت و r فاصله از مبدأ مختصات است. (الف) با فرض اینکه پتانسیل الکتروستاتیکی در بینهایت برابر صفر باشد، پتانسیل V را در نقطهٔ P روی محور y معین کنید. (ب) مؤلفهٔ قائم میدان الکتریکی، E_y، را در نقطهٔ P از نتیجهٔ قسمت (الف) و به‌طور مستقیم محاسبه کنید. (ج) چرا نمی‌توان مؤلفهٔ افقی میدان الکتریکی، E_x، در نقطهٔ P را با بهره‌گیری از نتیجه قسمت (الف) به‌دست آورد؟ (د) در چه فاصله‌ای از میله در امتداد محور y پتانسیل، نصف پتانسیل الکتریکی در سر طرف چپ میله است؟



شکل ۲۸ـ۴۶ مسئلهٔ ۱۳.

۱۴. دوکرهٔ رسانای کاملاً یکسان به شعاع $۱۵٫۰\ \mathrm{cm}$ در فاصلهٔ $۱۰٫۰\ \mathrm{m}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. اگر پتانسیل یکی از کره‌ها $+۱۵۰۰\ \mathrm{V}$ و کرهٔ دیگر $-۱۵۰۰\ \mathrm{V}$ باشد بار روی هر کدام از آنها چقدر است؟ در این رابطه چه فرضهایی را پذیرفته‌اید؟ فرض کنید که پتانسیل در بینهایت صفر است.

۱۵. فرض کنید که زمین کرهٔ رسانایی به شعاع $۶۳۷۰\ \mathrm{km}$ و در ابتدا بدون بار است. یک کرهٔ فلزی به شعاع $۱۳\ \mathrm{cm}$ که حامل $-۶٫۲\ \mathrm{nC}$ بار است به زمین متصل می‌شود، یا به عبارتی با زمین تماس الکتریکی پیدا می‌کند. نشان دهید که این فرایند به‌طور مؤثر کره را تخلیه می‌کند. این کار را با محاسبهٔ نسبت تعداد الکترونهای اضافی که پس از اتصال به زمین روی کره باقی می‌ماند به تعدادی که در آغاز روی کره قرار داشت، انجام دهید.

۱۶. یک کرهٔ مسی به شعاع $۱٫۰۸\ \mathrm{cm}$ دارای پوشش بسیار نازک نیکل است. برخی از اتمهای نیکل پرتوزا هستند و هنگام واپاشی یک

الکترون گسیل می‌دارند. نصف این الکترونها وارد کرهٔ مسی می‌شوند و هر کدام از آنها 100 keV انرژی در آنجا تخلیه می‌کنند. نصف دیگر این الکترونها می‌گریزند و با خود بار الکتریکی $-e$ را به خارج می‌برند. پوشش نیکلی دارای فعالیت $10{,}0$ mCi (مساوی $10{,}0$ میلی‌کوری$= 3{,}70 \times 10^8$ واپاشی در هر ثانیه) است. این کره از یک ریسمان نارسانا و طویل آویخته و از محیط اطرافش منزوی شده است. چقدر طول می‌کشد تا پتانسیل کره به اندازهٔ 1000 V افزایش پیدا کند؟

۱۷. یک پوستهٔ نازک رسانای کروی منزوی را در نظر بگیرید که به‌طور یکنواخت با چگالی ثابت σ باردار شده است. چقدر کار باید انجام شود تا بار آزمون کوچک q_0 (الف) از سطح پوسته از طریق یک سوراخ کوچک به داخل پوسته برود؛ (ب) از یک نقطه روی سطح خارجی بدون توجه به مسیر حرکت به نقطهٔ دیگری روی پوسته برود؛ (ج) از نقطه‌ای در داخل پوسته به نقطهٔ دیگری در آنجا برود و (د) از هر نقطه‌ای مانند P در خارج از پوسته روی هر مسیری که ممکن است پوسته را سوراخ کند یا نکند و مجدداً به P باز گردد؟ (ه) در شرایط توصیف‌شده در بالا، آیا اینکه پوسته رسانا باشد یا نباشد اهمیتی دارد؟

۱۸. الکترود ولتاژ بالای یک شتابدهندهٔ الکتروستاتیکی عبارت است از یک پوستهٔ کروی فلزی باردار با پتانسیل $V = +9{,}15$ MV (نسبت به $V = 0$ در بینهایت). (الف) فروریزش الکتریکی در گاز این ابزار وقتی صورت می‌گیرد که میدان برابر $E = 100$ MV/m شود. برای پیشگیری از وقوع این رویداد، چه محدودیتی را باید بر شعاع r پوسته اعمال کرد؟ (ب) یک تسمهٔ متحرک لاستیکی طویل بارها را با آهنگ $320\,\mu$C/s به پوسته منتقل می‌کند، در عین حال به واسطهٔ نشت، پتانسیل پوسته ثابت می‌ماند. حداقل توان مورد نیاز برای انتقال بار چقدر است؟ (ج) عرض تسمه $w = 48{,}5$ cm است و با سرعت $v = 33{,}0$ m/s حرکت می‌کند. چگالی بار سطحی روی تسمه چقدر است؟

مسئله‌های کامپیوتری

۱. چگالی بار روی میله‌ای به‌طول L که در امتداد محور x قرار دارد و در وسط آن بر مبدأ مختصات منطبق است با عبارت $\lambda = (1{,}0\,\mu\text{C/m})\sin^2(\pi x/L)$ مشخص شده است. (الف) به‌صورت عددی نموداری از پتانسیل ناشی از این میله را در صفحهٔ xy ایجاد کنید و از این نمودار برای ترسیم خطهای هم‌پتانسیل استفاده کنید. (ب) از این نمودار، خطهای میدان الکتریکی را ترسیم کرده و نتیجه‌های خودتان را با مسئلهٔ کامپیوتری ۲ فصل ۲۶ مقایسه کنید.

۲. به‌صورت عددی تحقیق کنید که در فضای دوبعدی خطهای هم‌پتانسیل در اطراف دو بار مساوی با علامتهای مخالف، به شکل دایره‌اند. آیا این دایره‌ها هم‌مرکزند؟

۲۹

خواص الکتریکی مواد

با آنکه مواد معمولی از لحاظ الکتریکی خنثی هستند، یعنی تعداد مساوی از بارهای مثبت و منفی را در برمی‌گیرند، هنگام قرار گرفتن در میدانهای الکتریکی، می‌توانند رفتارهای بسیار متفاوتی از خود بروز دهند. برخی از مواد می‌توانند در میدانهای بسیار ضعیف، رسانای الکتریسیته باشند در حالی‌که برخی دیگر حتی در میدانهای بسیار بسیار قوی نارسانا باقی می‌مانند. در برخی از مواد که بارهای الکتریکی مجاز به جابه‌جایی نیستند، خواص الکتریکی آنها در صورت اعمال یک میدان به‌وسیلهٔ چرخش دوقطبیها معین می‌شود، در حالی‌که در برخی دیگر، میدان اعمال‌شده می‌تواند سبب ایجاد دوقطبیهایی بشود که قبلاً وجود نداشتند.

در این فصل، رفتار اساسی دو نوع ماده را مورد توجه قرار می‌دهیم: رساناها و عایقها. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توانیم رفتار آنها را در میدانهای اعمال‌شده برمبنای مدلهای ساده‌ای از نیروها و حرکت بارها درک کنیم. گرچه شناخت دقیق خواص الکتریکی مواد نیازمند روشهای مکانیک کوانتومی است، می‌توانیم با بهره‌گیری از مدلهای کلاسیکی، که از رفتار کوانتومی چشم‌پوشی می‌کند، اطلاعات زیادی به‌دست آوریم.

۲۹ـ۱ انواع ماده

مواد طبیعی و مصنوعی گسترهٔ وسیعی از خواص الکتریکی نشان می‌دهند. بخشی از این خواص با رفتار اتمها یا مولکولهای منفرد مشخص می‌شود و بخشی به‌وسیلهٔ برهم‌کنشهای بین اتمها یا مولکولهای موجود در کل ماده. توانایی یک ماده در رساندن الکتریسیته ممکن است به شرایط ماده، مانند دما یا فشار آن، نیز بستگی داشته باشد.

رساناها (به‌عنوان مثال، اغلب فلزها) موادی هستند که بارهای الکتریکی در آنها به‌آسانی جاری می‌شود. در بسیاری از فلزها، هر اتم یک یا چند الکترون بیرونی یا والانس خودش را به کل ماده می‌دهد، و ما اغلب الکترونها را به‌صورت تشکیل‌دهندهٔ "گازی" در داخل ماده در نظر می‌گیریم تا متعلق به هر اتم خاص. هرگاه میدان الکتریکی به ماده اعمال شود این الکترونها آزادند حرکت کنند. در شرایط استاتیکی میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، حتی اگر رسانا عامل مقداری بار خالص باشد. (اگر چنین نباشد، الکترونهای آزاد شتاب خواهند گرفت، که این موضوع فرض استاتیکی بودن توزیع بار را نقض می‌کند.) در بخش ۲۹ـ۲، اثر اعمال میدان الکتریکی خارجی به رسانا در شرایط استاتیکی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

از طرف دیگر، در مادهٔ عایق، الکترونها به‌صورتی نسبتاً محکم به اتمهایشان بسته شده‌اند و این آزادی را ندارند که تحت تأثیر میدانهای الکتریکی اعمال‌شده در شرایط عادی حرکت کنند. مادهٔ عایق می‌تواند حامل هر توزیع بار الکتریکی در روی سطح و در داخل خود باشد، و (برخلاف یک رسانا) میدان الکتریکی در داخل جسم عایق می‌تواند مقادیر غیرصفر را اختیار کند.

مادهٔ عایق را اغلب می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از مولکولهایی

در نظر گرفت که به‌آسانی یونیده نمی‌شوند. در این حالت امکان دارد که خواص الکتریکی ماده به گشتاورهای دوقطبی الکتریکی مولکولها وابسته باشد. موادی را که در آنها مولکولها دارای گشتاورهای دوقطبی دائمی هستند مواد قطبیده می‌گوییم، و میدانهای الکتریکی می‌توانند گشتاورهای دوقطبی مولکولها را همسو کنند، این مطلب را در بخش ۲۶ـ۷ مورد بحث قرار دادیم. در برخی از مواد، حتی پس از حذف میدان اعمال‌شده، همسویی دوقطبیها باقی می‌ماند؛ به این دسته از مواد فروالکتریک می‌گوییم (در مقایسه با مواد فرومغناطیس، که در آنها گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی، حتی پس از حذف میدان مغناطیسی خارجی، همسو باقی می‌مانند). حتی مواد ناقطبیده می‌توانند این آثار را بروز دهند، زیرا میدان الکتریکی اعمال‌شده می‌تواند در مولکولها گشتاور دوقطبی القا کند. این آثار را در بخش ۲۹ـ۵ مورد بحث قرار می‌دهیم.

مادهٔ عادی معمولاً از لحاظ الکتریکی خنثی است. در صورت عدم حضور میدان الکتریکی خارجی، این خنثی بودن نه تنها به اتمهای منفرد اعمال می‌شود که در مورد کل ماده نیز برقرار است. اعمال میدان الکتریکی می‌تواند سبب کندن یا برداشتن یک یا چند الکترون از اتمهای ماده شود. این فرایند را یونش می‌خوانیم و اتمهای دارای بار مثبتِ به‌جای‌مانده از این فرایند را که با کمبود الکترون مواجه‌اند یون می‌گوییم. در مادهٔ عایق، یک میدان الکتریکی به‌قدر کافی قوی می‌تواند اتمها را یونیده کند، و در نتیجهٔ این فرایند الکترونهایی در دسترس قرار می‌گیرند که می‌توانند در ماده حرکت کنند. در چنین شرایطی، جسم عایق می‌تواند خیلی شبیه رسانا عمل کند. این حالت را فروریزش الکتریکی می‌خوانیم که معمولاً به میدانهایی در گسترهٔ $10^6 \mathrm{V/m}$ در هوا تا $10^7 \mathrm{V/m}$ در پلاستیکها و سرامیکها نیاز دارد.

در فاصلهٔ بین رساناها و عایقها، نیمرساناها قرار می‌گیرند. در مادهٔ نیمرسانا، شاید یک اتم از هر 10^{10} تا 10^{12} اتم، یک الکترون را جهت شارش الکتریسیته در ماده به اشتراک بگذارد (برخلاف مادهٔ رسانا، که در آن هر اتم نوعاً یک الکترون را جهت شارش الکتریسیته به اشتراک می‌گذارد). نیمرساناهایی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند، علاوه بر تعداد زیادی مواد مرکب، شامل سیلیسیم و ژرمانیم هستند.

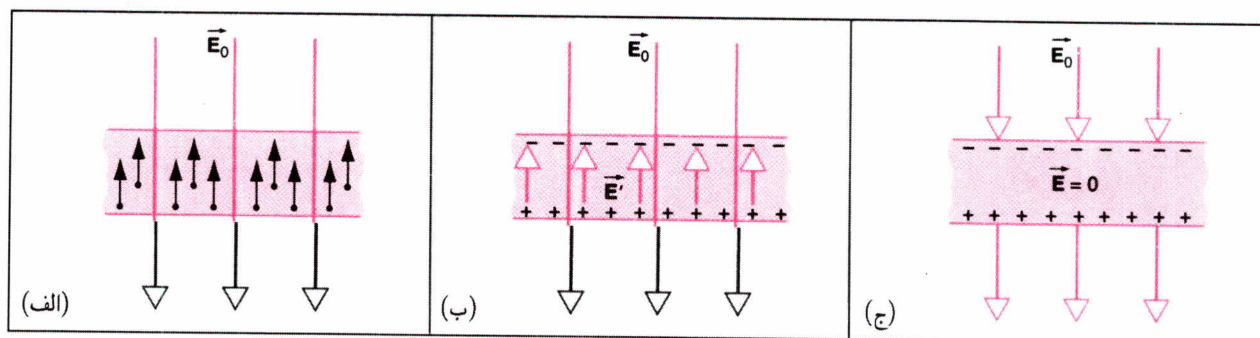
حتی بهترین رساناها (مس، نقره، و طلا) مقاومت کم ولی قطعاً غیرصفری را در برابر شارش الکتریسیته از خود بروز می‌دهند. تحت شرایط معینی، که اغلب شامل سرمایش تا دماهای بسیار بسیار پایین است، بارهای الکتریکی می‌توانند بدون هیچ‌گونه مقاومتی در داخل برخی از مواد جریان پیدا کنند. این خاصیت مواد را ابررسانایی یا ابررسانندگی می‌گوییم و موادی را که در چنین شرایطی قرار می‌گیرند ابررسانا می‌خوانیم. برخی از مواد که ممکن است در دمای اتاق رساناهای نسبتاً ضعیفی باشند می‌توانند در دماهای خیلی پایین ابررسانا شوند.

در این فصل، واکنش مواد رسانا و عایق را نسبت به اعمال میدانهای الکتریکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. درک رفتار مربوط به نیمرساناها و ابررساناها نیازمند روشهای مکانیک کوانتومی است، که در فصل ۴۹ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۲۹ـ۲ جسم رسانا در میدان الکتریکی: شرایط استاتیکی

تصور کنید که یک رسانای بزرگ به شکل مکعب‌مستطیل از یک رسانا مانند مس را، مطابق شکل ۲۹ـ۱(الف)، در میدان الکتریکی یکنواخت قرار داده‌ایم. می‌توانیم مس را به‌صورت "گازی" از الکترونها در نظر بگیریم که آزادند در یک شبکه از یونهای مس که در مکانهای ثابتی قرار گرفته‌اند، حرکت کنند. میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}_\circ$ نیرویی برابر با $\vec{\mathbf{F}} = -e\vec{\mathbf{E}}_\circ$ به الکترونها وارد می‌کند، که سبب می‌شود الکترونها مخالف جهت میدان حرکت کنند. الکترونها به‌سرعت به سمت سطح بالایی مس حرکت می‌کنند، و کمبود الکترونی (بار مثبت) را در سطح پایینی مس از خود به‌جای می‌گذارند. وقتی که یک جسم رسانا را در میدان خارجی قرار می‌دهیم، بارها تقریباً به‌طور لحظه‌ای به توزیع مجدد خود می‌پردازند، به‌طوری که پس از آن شرایط استاتیکی برقرار می‌شود.

دو رویهٔ رسانا را می‌توان به‌صورت دو صفحهٔ باردار در نظر گرفت، که میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}'$ را ایجاد می‌کنند (شکل ۲۹ـ۱(ب)). در داخل مس، میدان الکتریکی خالص $\vec{\mathbf{E}}$ حاصل‌جمع برداری دو میدان است: $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_\circ + \vec{\mathbf{E}}'$. از لحاظ بزرگی، حاصل‌جمع، برابر با تفاضل دو میدان می‌شود، زیرا دو میدان در جهتهای مخالف اثر می‌کنند: یعنی، داریم $E = E_\circ - E'$. داخل مکعب مسی در شرایط استاتیکی، میدان الکتریکی خالص E باید برابر صفر باشد، که این مطلب را در بخش ۲۷ـ۶ مورد بحث قرار دادیم. (در بخش ۲۷ـ۶، تأثیر وجود میدان الکتریکی خارجی را بررسی نکردیم؛ ولی نتیجه به همان صورت باقی می‌ماند، میدان الکتریکی در داخل رسانا باید صفر باشد، زیرا در غیر این‌صورت الکترونهای آزاد در داخل رسانا شتاب خواهند گرفت، و از آن‌رو فرض مربوط به حالت استاتیکی نقض خواهد شد.)

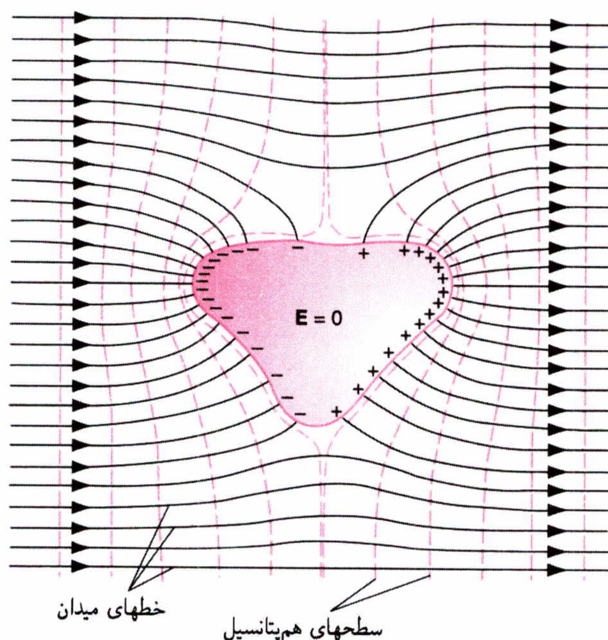


شکل ۲۹ـ۱ (الف) یک مکعب بزرگ رسانا در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار داده شده است. الکترونهای موجود در ماده در پاسخ به اثر میدان به سمت بالا به حرکت در می‌آیند. (ب) الکترونها، روی رویهٔ بالا انباشته می‌شوند، و یونهای مثبت را در پایین به‌جای می‌گذارند. این بارها میدان الکتریکی $\vec{E}'$ را به‌وجود می‌آورند. (ج) در داخل مکعب رسانا، میدان برایند برابر با صفر است.

میدان اعمال‌شدهٔ الکتریکی E_0 باید به‌قدر کافی الکترون به سطح رسانا منتقل کند که مقدار این میدان الکتریکی E' برابر E_0 است، و سبب می‌شود میدان خالص ایجادشده در داخل مس برابر صفر شود (شکل ۲۹ـ۱ (ج)). در خارج از تختهٔ رسانا، برگه‌های باردار روی دو رویهٔ رسانا میدانهای الکتریکی را ایجاد می‌کنند که حذف می‌شود، و سبب می‌شود میدان خالص در این نواحی بدون تغییر باقی بماند.

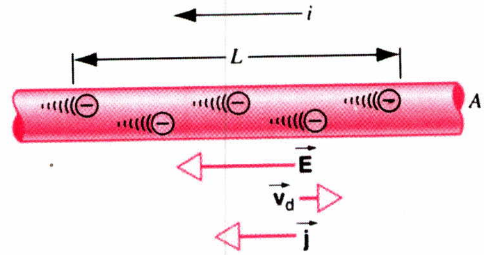
شکل ۲۹ـ۲ یک رسانای بدون بار با شکل نامنظم را نشان می‌دهد که در میدان الکتریکی در اصل یکنواخت قرار داده شده است. بار دیگر، الکترونهای آزاد در رسانا به‌سرعت به سمت رویهٔ جسم می‌روند و توزیع باری را به‌وجود می‌آورند که دقیقاً در داخل رسانا میدانی ایجاد می‌کنند که میدان اعمال‌شدهٔ خارجی را خنثی کرده اثر آن را از بین می‌برند. در خارج رسانا، میدان عبارت است از حاصل‌جمع (برداری) میدان یکنواخت اصلی و میدان ناشی از بارهایی که روی سطح رسانا قرارگرفته‌اند. توجه کنید که خطهای میدان از بارهای مثبت سرچشمه می‌گیرند و به بارهای منفی ختم می‌شوند. همچنین توجه کنید که چگالی بار در قسمتهایی از رویه که شعاع انحنای کمتری دارند بیشتر است؛ که این موضوع را در بخش ۲۸ـ۹ مورد بحث قرار دادیم، و نیز اینکه هر جا چگالی بار بیشتر باشد میدان قوی‌تر است (خطهای میدان به‌هم نزدیک‌ترند.)

در سطح رسانا در شکل ۲۹ـ۲، خطهای میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمودند. اگر این رفتار واقعیت نداشت، در آن‌صورت میدان الکتریکی مؤلفه‌ای موازی با سطح رسانا داشت، که سبب حرکت بارها می‌شد. از آنجا که حرکت بارها فرض حالت استاتیکی را نقض می‌کند، چنین مؤلفه‌ای برای میدان الکتریکی وجود نخواهد داشت و میدان باید عمود بر سطح رسانا باشد.



شکل ۲۹ـ۲ یک رسانای بدون بار را در میدان الکتریکی خارجی قرار داده‌ایم. الکترونهای رسانش چنان خودشان را روی سطح رسانا توزیع می‌کنند که میدان در داخل رسانا را به صفر کاهش دهند. توجه کنید که وقتی رسانا در میدان از پیش یکنواخت قرار داده می‌شود خطهای نیرو (خطهای پر) و سطحهای هم‌پتانسیل (خط‌چینها) واپیچیده می‌شوند. همچنین توجه کنید که چگونه خطهای میدان الکتریکی از بارهای مثبت سرچشمه می‌گیرند و به بارهای منفی ختم می‌شوند.

این شکل همچنین سطحهای هم‌پتانسیل برای این حالت را نشان می‌دهد. در فاصله‌های بسیار دور از رسانا، جایی که میدان یکنواخت است، سطحهای هم‌پتانسیل صفحه‌هایی تخت هستند. وقتی به سمت رسانا حرکت می‌کنیم و به آن نزدیک می‌شویم، سطحهای هم‌پتانسیل واپیچیده می‌شوند، تا اینکه در سطح رسانا، سطح هم‌پتانسیل دقیقاً همان سطح رسانا می‌شود؛ همان‌طور که در بخش ۲۸ـ۹، مورد بحث قرار دادیم سطح رسانا سطح هم‌پتانسیل است.



شکل ۲۹ـ۵ میدان الکتریکی سبب سوق الکترونها به طرف راست می‌شود. جریان متداول (جهت فرضی جاری‌شدن بار مثبت) به سمت چپ شکل است. چگالی جریان $\vec{j}$ نیز چنان رسم شده است که گویی حاملهای بار مثبت‌اند. به‌طوری که $\vec{j}$ و $\vec{E}$ در یک جهت قرار گرفته‌اند.

واحد حجم) برابر با n باشد، در آن‌صورت مقدار بار خالصی که از این رویه می‌گذرد برابر $q = enAL$ است، و چگالی جریان چنین خواهد شد:

$$j = \frac{q}{At} = \frac{enAL}{AL/v_d} = env_d \qquad (۲۹ـ۶)$$

که این عبارت را می‌توان به‌صورت برداری زیر نوشت

$$\vec{j} = -en\vec{v}_d \qquad (۲۹ـ۷)$$

علامت منفی یادآوری می‌کند که جهت چگالی جریان خلاف جهت حرکت الکترونهاست.

همان‌طورکه در مثالهای زیر نشان داده‌ایم، سرعت سوق الکترونها در مواد معمولی در مقایسه با سرعت کاتوره‌ای حرکت گرمایی الکترونها (نوعاً از مرتبهٔ $۱۰^۶ \text{m/s}$) بسیار کوچک است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۲ سر یک سیم آلومینیمی به قطر ۲٫۵ mm را به سر سیمی مسی با قطر ۱٫۸ mm جوش داده‌ایم. این سیم مرکب حامل جریان پایای $i = ۱٫۳\,\text{A}$ است. چگالی جریان در هر یک از دو قسمت سیم چقدر است؟

حل. چگالی جریان را به‌صورت ثابتهای (متفاوتی) در هر یک از دو قسمت سیم در نظر می‌گیریم. البته این ثابتها در نزدیکی محل اتصال دو سیم دیگر اعتبار ندارند. چگالی جریان با معادلهٔ (۲۹ـ۴)، $j = i/A$، مشخص شده است. مساحت مقطع A سیم آلومینیمی چنین است

$$A_{\text{Al}} = \frac{۱}{۴}\pi d^۲ = \left(\frac{\pi}{۴}\right)(۲٫۵ \times ۱۰^{-۳}\text{m})^۲ = ۴٫۹۱ \times ۱۰^{-۶}\text{m}^۲$$

به‌طوری که در قسمت آلومینیمی

$$j_{\text{Al}} = \frac{۱٫۳\,\text{A}}{۴٫۹۱ \times ۱۰^{-۶}\text{m}^۲} = ۲٫۶ \times ۱۰^۵ \text{A/m}^۲ = ۲۶\,\text{A/cm}^۲$$

می‌توانیم نشان دهیم که مساحت سطح مقطع سیم مسی برابر با $۲٫۵۴ \times ۱۰^{-۶}\text{m}^۲$ است، و در نتیجه

$$j_{\text{Cu}} = \frac{۱٫۳\,\text{A}}{۲٫۵۴ \times ۱۰^{-۶}\text{m}^۲} = ۵٫۱ \times ۱۰^۵ \text{A/m}^۲ = ۵۱\,\text{A/cm}^۲$$

این واقعیت که سیمها از مواد متفاوتی ساخته شده‌اند در این موضوع دخالتی ندارد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ سرعت سوق الکترونهای رسانش در داخل سیم مسی مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۲ چقدر است؟

حل. در سیم مسی، به‌طور متوسط به‌ازای هر اتم تقریباً یک الکترون رسانش وجود دارد. بنابراین تعداد الکترونهای رسانش در واحد حجم، n، برابر با تعداد اتمها در واحد حجم است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{n}{N_{\text{A}}} = \frac{\rho_{\text{m}}}{M}$$

یا

$$\frac{\text{تعداد اتمها در یک متر مکعب}}{\text{تعداد اتمها در یک مول}} = \frac{\text{جرم یک متر مکعب}}{\text{جرم یک مول}}$$

که در اینجا ρ_{m} چگالی (جرمی) مس است، N_{A} ثابت آووگادرو، و M جرم مولی مس* است. به این ترتیب

$$n = \frac{N_{\text{A}}\rho_{\text{m}}}{M} =$$

$$\frac{(\text{الکترون به‌ازای هر مول } ۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳})(\text{کیلوگرم بر مترمکعب } ۸٫۹۶ \times ۱۰^۳)}{\text{کیلوگرم بر مترمکعب } ۶۳٫۵ \times ۱۰^{-۳}}$$

$$= ۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸} \text{ الکترون در هر مترمکعب}^*$$

و از آن‌رو، با استفاده از معادلهٔ (۲۹ـ۶) $(v_d = j/ne)$ داریم

$$v_d = \frac{۵٫۱ \times ۱۰^۵ \text{A/m}^۲}{(\text{الکترون در هر مترمکعب } ۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸})(\text{کولن به‌ازای هر الکترون } ۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹})}$$

$$= ۳٫۸ \times ۱۰^{-۵}\text{ m/s} = ۱۴\text{ cm/h}$$

حال باید بتوانیم نشان دهیم که برای سیم آلومینیمی، داریم $v_d = ۲٫۷ \times ۱۰^{-۵}\text{m/s} = ۹٫۷\text{ cm/h}$. آیا می‌توانید، با استفاده

* در اینجا از شاخص پایین m استفاده می‌کنیم که نشان دهیم چگالی مورد بحث در این مسئلهٔ نمونهٔ چگالی جرمی ($\text{kg/m}^۳$) است و نه چگالی بار ($\text{C/m}^۲$).

از مفهومها یا واژه‌های فیزیکی، توضیح دهید که، چرا با آنکه جریان یکسانی از سیمها می‌گذرد، سرعت سوق در آلومینیم کمتر از سرعت سوق در مس است؟

اگر الکترونها با این سرعت کم سوق داده می‌شوند، چرا به نظر می‌رسد که آثار الکتریکی بلافاصله پس از بستن یک کلید، مانند وقتی که چراغهای اتاق را روشن می‌کنید، پدیدار می‌شوند؟ ابهام در این مورد ناشی از آن است که بین سرعت سوق و سرعت سیر تغییرات پیکربندی میدان الکتریکی در امتداد سیمها تفاوت قائل نمی‌شویم. سرعت اخیر به سرعت سیر نور میل می‌کند. همین‌طور که وقتی شیر آب متصل به شیلنگی پر از آب را باز می‌کنیم، موج فشار با سرعتی برابر با سرعت سیر صوت در آب در طول شیلنگ به حرکت در می‌آید. سرعت حرکت آب در شیلنگ، که می‌توان آن را با یک مادهٔ رنگی اندازه گرفت، بسیار کمتر از سرعت انتشار این موج است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۴ یک نوار سیلیسیمی به عرض $w = ۳٫۲$ mm و ضخامت $d = ۲۵۰\,\mu$m حامل جریان i با شدت ۱۹۰ mA است. سیلیسیم که با مقدار کنترل‌شده‌ای از ناخالصی فسفر "آلاییده" شده باشد یک نیمرسانای نوع n است. آلایش این اثر را دارد که تعداد حاملهای بار (در این مورد الکترونها) بر واحد حجم، یعنی n، را در مقایسه با تعداد مربوط به سیلیسیم خالص، تا حد بسیار زیادی افزایش می‌دهد. در این مورد، برای n داریم: $n = ۸٫۰ \times ۱۰^{۲۱}\text{m}^{-۳}$. (الف) چگالی جریان در این نوار چقدر است؟ (ب) سرعت سوق چقدر است؟

حل. (الف) از معادلهٔ (۲۹ـ۴) داریم

$$j = \frac{i}{wd} = \frac{۱۹۰ \times ۱۰^{-۳}\text{A}}{(۳٫۲ \times ۱۰^{-۳}\text{m})(۲۵۰ \times ۱۰^{-۶}\text{m})}$$

$$= ۲٫۴ \times ۱۰^{۵}\text{A/m}^{۲}$$

(ب) از معادلهٔ (۲۹ـ۶) داریم

$$v_\text{d} = \frac{j}{ne} = \frac{۲٫۴ \times ۱۰^{۵}\text{A/m}^{۲}}{(۸٫۰ \times ۱۰^{۲۱}\text{m}^{-۳})(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})}$$

$$= ۱۹۰ \text{ m/s}$$

سرعت سوق (۱۹۰ m/s) الکترونها در این نیمرسانای سیلیسیمی بسیار بیشتر از سرعت سوق ($۳٫۸ \times ۱۰^{-۵}$m/s) الکترونهای رسانش در رسانای مس فلزی مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ است، با آنکه چگالی جریانها در این دو مورد قابل مقایسه‌اند. تعداد حاملهای بار در این نیمرسانا ($۸٫۰ \times ۱۰^{۲۱}\text{m}^{-۳}$) بسیار کمتر از حاملهای بار در رسانای مسی ($۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸}\text{m}^{-۳}$) است. اگر بخواهیم چگالی جریان یکسانی داشته باشیم، تعداد کمتر حاملهای بار در نیمرسانا باید سریع‌تر از تعداد زیادتر حاملهای بار در مس سوق داده شوند.

۲۹ـ۴ مواد اهمی

الکترونها در مادهٔ رسانا، در فاصلهٔ بین برخوردها با یونهای شبکه، به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ شتاب می‌گیرند، و در نتیجه سرعت سوق آنها متناسب با شدت میدان $\vec{\mathbf{E}}$ است. چگالی جریان $\vec{\mathbf{j}}$ نیز متناسب با $\vec{\mathbf{v}}_\text{d}$ است، در نتیجه منطقی به نظر می‌رسد که $\vec{\mathbf{j}}$ متناسب با $\vec{\mathbf{E}}$ باشد. در واقع، چنین رفتاری را برای گروه گسترده‌ای از مواد مشاهده می‌کنیم. ضریب تناسب بین چگالی جریان و میدان الکتریکی، رسانندگی الکتریکی ماده، یعنی σ، است:

$$\vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} \qquad (۲۹\text{ـ}۸)$$

اگر مقدار σ بزرگ باشد، مبین آن است که ماده، رسانای خوبی برای جریان الکتریکی است. رسانندگی خاصیت مربوط به ماده است، و نه مربوط به هر نمونهٔ ویژه‌ای از ماده. یکای SI رسانندگی زیمنس بر متر (S/m) است که در اینجا زیمنس به‌صورت زیر تعریف شده است

ولت/آمپر ۱ = ۱ زیمنس

رایج‌تر است که مواد را برحسب مقاومت ویژهٔ آنها مشخص می‌کنند. مقاومت ویژهٔ ماده وارون رسانندگی الکتریکی ماده است:

$$\rho = ۱/\sigma \qquad (۲۹\text{ـ}۹)$$

که در این حالت معادلهٔ (۲۹ـ۸) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{j}} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۰)$$

یکای مقاومت ویژه اهم‌متر است، که در آن اهم (با نماد Ω) به‌صورت زیر تعریف شده است

آمپر/ولت ۱ = ۱ اهم

توجه کنید که $^{-۱}$(۱ زیمنس) = ۱ اهم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۱ یک ورق بزرگ نازک مسی را در یک میدان الکتریکی یکنواخت به مقدار $E_\circ = ۴۵۰\ \mathrm{N/C}$ قرار داده‌ایم، که بر ورق مسی عمود است (مانند شکل ۲۹ـ۱). چگالی بار سطحی ورق مسی را که از این عمل ناشی می‌شود معین کنید.

حل. میدان الکتریکی سبب پدیدار شدن چگالی بار مثبت σ روی سطح پایینی رسانا و چگالی بار منفی به مقدار مساوی روی سطح بالایی رسانا می‌شود. میدان الکتریکی در داخل رسانا (ورق) باید صفر باشد، یعنی اینکه دو توزیع بار باید چنان با هم ترکیب شوند که در داخل ورق یک میدان الکتریکی به مقدار $E_\circ$ و در جهت عکس میدان اعمال‌شده ایجاد کنند. اگر ورق را با ابعاد بسیار بزرگ در نظر بگیریم، میدان ناشی از توزیع بار مثبت، بنابر معادلهٔ (۲۶ـ۲۰)، برابر است با $E_+ = \sigma/۲\epsilon_\circ$، و اندازهٔ میدان ناشی از بار منفی برابر $E_- = \sigma/۲\epsilon_\circ$ است. این دو میدان در یک جهت قرار دارند و برای اینکه میدان کل $E_\circ$ را به‌دست آوریم باید آنها را با هم جمع کنیم

$$E_\circ = \sigma/۲\epsilon_\circ + \sigma/۲\epsilon_\circ = \sigma/\epsilon_\circ$$

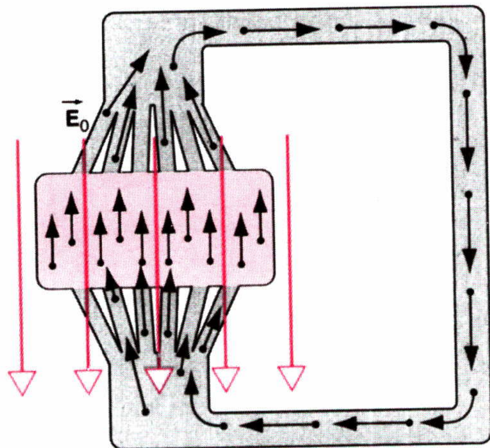
و از اینجا چگالی بار روی هر کدام از دو سطح ورق برابر است با

$$\sigma = \epsilon_\circ E_\circ = (۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} \mathrm{C^۲/N \cdot m^۲})(۴۵۰\ \mathrm{N/C})$$
$$= ۳٫۹۸ \times ۱۰^{-۹} \mathrm{C/m^۲}$$

توجه کنید که در خارج از ورق مسی، میدانهای ناشی از دو رویهٔ بار همدیگر را خنثی می‌کنند. به‌طوری که میدان خارجی همان $E_\circ$ باقی می‌ماند. این موضوع فقط در مورد هندسهٔ تخت (مسطح) مربوط به این مسئله واقعیت دارد و در حالت کلی صادق نیست؛ مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۲ را ببینید.

۲۹ـ۳ جسم رسانا در میدان الکتریکی: شرایط دینامیکی

در شکل ۲۹ـ۱ (الف)، الکترونها تحت تأثیر میدان الکتریکی اعمال‌شده از قسمت پایینی تختهٔ مسی به سمت بالا به حرکت در می‌آیند تا زمانی که غلظت الکترونها در رویهٔ بالایی تخته (و چگالی یونهای مثبت در رویهٔ پایینی) میدانی ایجاد کنند که اثر میدان خارجی اعمال‌شده را در داخل تختهٔ مسی حذف کند و مانع از جریان الکترونهای بیشتری



شکل ۲۹ـ۳ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}_\circ$ سبب می‌شود که الکترونها در تختهٔ مسی به حرکت در آیند. الکترونها را می‌توان در سطح بالایی تخته گردآوری کرده و از طریق یک مسیر خارجی به رویهٔ پایینی تختهٔ مسی منتقل کرد.

شود. تصور کنید، سازوکاری وجود داشت که الکترونها را از رویهٔ بالایی برمی‌داشت و آنها را از طریق یک مسیر خارجی حمل، و به رویهٔ پایینی تختهٔ مسی تزریق می‌کرد (که این موضوع به‌صورت نموداری در شکل ۲۹ـ۳ ترسیم شده است). در این حالت، هیچ‌گونه تجمع بار الکتریکی در رویه‌های بالایی و پایینی تختهٔ مسی پدید نمی‌آید و شرایط الکتروستاتیکی بخش پیشین را نمی‌توان در مورد تختهٔ مسی به‌کار گرفت. به‌ویژه، نتیجهٔ استنتاج‌شده در قسمت آخری آن بخش دیگر معتبر نیست ــ میدان الکتریکی در داخل تختهٔ مسی هنگامی که بارها جریان دارند، در حالت کلی صفر نیست.

حلقهٔ پیوستهٔ الکترونهای شارشی، نمایش ساده‌ای از مدار الکتریکی است، و حرکت الکترونها (یا هر نوع ذرهٔ باردار دیگری) را جریان الکتریکی می‌خوانیم.

ابتدا جاری شدن یک بار الکتریکی را که از یک نقطهٔ مشخص در قسمت داخلی ماده می‌گذرد بررسی می‌کنیم (شکل ۲۹ـ۴). مقدار بار dq از سطح کوچکی به مساحت A در زمان dt عبور می‌کند. مثلاً، سطح A ممکن است مساحت سطح مقطع سیمی باشد که بار در آن جاری می‌شود. جریان الکتریکی i را به‌صورت مقدار بار خالصی که در یکای بازهٔ زمانی از سطح می‌گذرد تعریف می‌کنیم:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (۲۹\text{ـ}۱)$$

برای اینکه جریان الکتریکی وجود داشته باشد، باید مقدار خالصی بار از رویه عبور کند. اگر اتمهای خنثی از سطح بگذرند، با آنکه بارها از سطح می‌گذرند، هیچ جریانی جاری نمی‌شود، زیرا تعداد مساوی

بار مثبت و منفی از سطح می‌گذرد. اگر الکترونها به‌صورت کاتوره‌ای در جسم حرکت کنند، به‌طوری که تعداد مساوی در هر دو جهت از سطح بگذرند، جریانی جاری نمی‌شود زیرا بار خالصی که از سطح می‌گذرد صفر است.

جریان الکتریکی دارای جهت است، که به‌صورت جهت جاری‌شدن بار مثبت تعریف می‌شود. با آنکه جریان دارای جهت است، یک کمیت اسکالر است و بردار نیست، زیرا جریانها از قانونهای مربوط به جمع برداری پیروی نمی‌کنند.

یکای SI جریان آمپر (A) است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

۱ آمپر = ۱ کولن بر ثانیه

اگر جریان ثابت باشد، آنگاه معادلهٔ (۲۹ـ۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$i = \frac{q}{t} \qquad (۲۹\text{ـ}۲)$$

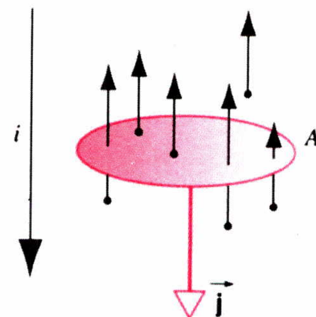
بار خالصی که از هر سطح می‌گذرد با انتگرال‌گیری روی جریان معین می‌شود:

$$q = \int i\, dt \qquad (۲۹\text{ـ}۳)$$

کمیتِ برداری مرتبط با آن عبارت است از چگالی جریان $\vec{\mathbf{j}}$ یا جریان در یکای سطح، که مقدار آن به‌صورت زیر تعریف شده است

$$j = \frac{i}{A} \qquad (۲۹\text{ـ}۴)$$

جهت بردار $\vec{\mathbf{j}}$ به‌صورت جهت جاری‌شدن بار مثبت تعریف می‌شود. نظر به آنکه در شکل ۲۹ـ۴ الکترونها به سمت بالا حرکت می‌کنند، جهت بردار $\vec{\mathbf{j}}$ به سمت پایین است. یعنی، الکترونها در جهت $-\vec{\mathbf{j}}$ به حرکت در می‌آیند.



شکل ۲۹ـ۴ الکترونها از سطح مقطع A عبور می‌کنند. جهت جریان i و بردار چگالی جریان $\vec{\mathbf{j}}$ برخلاف جهت حرکت الکترونها هستند.

جریانی را که از هر سطحی عبور می‌کند می‌توان با انتگرال‌گیری چگالی جریان روی سطح معین کرد:

$$i = \int \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (۲۹\text{ـ}۵)$$

که در این معادله $d\vec{\mathbf{A}}$ عنصر سطح رویه است و انتگرال روی تمامی سطحی گرفته می‌شود که می‌خواهیم جریان را در آنجا محاسبه کنیم. بردار $d\vec{\mathbf{A}}$ به‌صورت عمود بر عنصر سطح رویه گرفته می‌شود به‌طوری که $\vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ برای یک جریان مثبت i، مثبت باشد.

چگالی جریان و سرعت سوق

همین که الکترونها خودشان را در مس یافتند، به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی شتاب می‌گیرند، که این میدان به الکترونها نیروی $-e\vec{\mathbf{E}}$ را وارد می‌آورد. در بخش ۲۹ـ۲ شرایط استاتیکی را بررسی کردیم، که در آن حالت، میدان الکتریکی در داخل رسانا همواره صفر است. در اینجا بارهای در حال حرکت را مورد توجه قرار می‌دهیم، به‌طوری که دیگر شرایط استاتیکی برقرار نیست و $\vec{\mathbf{E}}$ در داخل رسانا می‌تواند غیرصفر باشد.

الکترونها با یونهای شبکه برخورد کرده به آنها انرژی منتقل می‌کنند. بنابراین حرکت هر الکترون منفرد، بسیار نامنظم و تشکیل شده است از بازه‌های کوتاه شتاب‌گیری در جهت مخالف میدان الکتریکی که در پی آن برخوردی با یک یون صورت می‌گیرد و ممکن است الکترون را در هر راستایی بفرستد، سپس بازهٔ دیگری از شتاب‌گیری و تکرار مراحل به همین ترتیب. اثر خالص و نهایی این فرایند سوق‌دادن الکترون در جهت مخالف جهت میدان است. هیچ‌گونه شتابدهی خالصی روی الکترونها صورت نمی‌گیرد، زیرا آنها به‌طور پیوسته در برخورد با شبکهٔ یونهای مس انرژی از دست می‌دهند. در نتیجه، انرژی از میدان اعمال‌شده به شبکه (به‌صورت انرژی داخلی رسانا، که اغلب به‌صورت افزایش دما مشاهده می‌شود) انتقال پیدا می‌کند. در نتیجه، الکترونها را می‌توان چنین توصیف کرد که با سرعت سوق ثابت $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$ در جهت مخالف جهت میدان حرکت می‌کنند. این موضوع در شکل ۲۹ـ۵ نشان داده شده است.

حرکت الکترونها را در قسمتی از رسانا به طول L در نظر بگیرید. الکترونها با سرعت سوق v_{d} حرکت می‌کنند، به‌طوری که مسافت L را در زمان $t = L/v_{\mathrm{d}}$ می‌پیمایند. مساحت مقطع رسانا برابر A است، در نتیجه در زمان t تمامی الکترونهایی که در حجم AL قرار دارند از رویهٔ سمت راست رسانا می‌گذرند. اگر چگالی الکترونها (تعداد بر

جدول ۲۹ـ۱ مقاومت ویژهٔ برخی از مواد در دمای اتاق (۲۰°C)

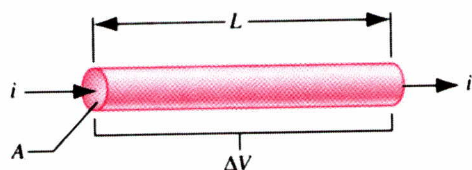
ماده	مقاومت ویژه $\rho(\Omega\cdot\mathrm{m})$	ضریب دمایی مقاومت ویژه α_{av} (بر C°)
فلزات نوعی		
نقره	$۱٫۶۲\times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۱\times ۱۰^{-۳}$
مس	$۱٫۶۹\times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۳\times ۱۰^{-۳}$
آلومینیم	$۲٫۷۵\times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۴\times ۱۰^{-۳}$
تنگستن	$۵٫۲۵\times ۱۰^{-۸}$	$۴٫۵\times ۱۰^{-۳}$
آهن	$۹٫۶۸\times ۱۰^{-۸}$	$۶٫۵\times ۱۰^{-۳}$
پلاتین	$۱۰٫۶\times ۱۰^{-۸}$	$۳٫۹\times ۱۰^{-۳}$
منگانین[۱]	$۴۸٫۲\times ۱۰^{-۸}$	$۰٫۰۰۲\times ۱۰^{-۳}$
نیمرساناهای نوعی		
سیلیسیم خالص	$۲٫۵\times ۱۰^{۳}$	-۷۰×۱۰^{-۳}
سیلیسیم نوع n[۲]	$۸٫۷\times ۱۰^{-۴}$	
سیلیسیم نوع p[۳]	$۲٫۸\times ۱۰^{-۳}$	
عایقهای نوعی		
آب خالص	$۲٫۵\times ۱۰^{۵}$	
شیشه	$۱۰^{۱۰}$ تا $۱۰^{۱۴}$	
پلی‌استیرن	$> ۱۰^{۱۴}$	
کوارتز گداخته	$\approx ۱۰^{۱۶}$	

۱. آلیاژی که به گونه‌ای خاص طراحی شده است که αی آن کوچک باشد.
۲. سیلیسیم خالص که با ناخالصی فسفری تا چگالی $۱۰^{۲۳}\mathrm{m}^{-۳}$ حامل بار "آلاییده" شده باشد.
۳. سیلیسیم خالص که با ناخالصی آلومینیمی تا چگالی $۱۰^{۲۳}\mathrm{m}^{-۳}$ حامل بار "آلاییده" شده باشد.

معادله‌های (۲۹ـ۸) و (۲۹ـ۱۰) فقط در مواد همسانگرد، یعنی موادی که خاصیتهای الکتریکی آنها در تمام راستاها یکسان است، معتبرند. در این مواد، $\vec{\mathbf{j}}$ همواره هم‌جهت با $\vec{\mathbf{E}}$ است.

در جدول ۲۹ـ۱ برخی از مقدارهای مربوط به مقاومت ویژه مواد گوناگونی را آورده‌ایم. در یک عایق کامل باید داشته باشیم $\rho = \infty$ (یا $\sigma = ۰$). توجه کنید که حتی عایقهای خوب رسانندگی ضعیفی دارند.

می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ (۲۹ـ۱۰) مقاومت ویژهٔ هر ماده‌ای را با اعمال میدان الکتریکی و اندازه‌گیری چگالی جریان، معین کنیم. درمی‌یابیم که مقاومت ویژهٔ برخی از مواد، ثابت نیست بلکه به شدت میدان الکتریکی وابسته است. یعنی، اگر میدان الکتریکی را دو برابر کنیم چگالی جریان دو برابر نمی‌شود. برای برخی مواد دیگر، درمی‌یابیم



شکل ۲۹ـ۶ اختلاف پتانسیل ΔV به دو سر رسانای استوانه‌ای‌شکل به طول L و مساحت سطح مقطع A اعمال شده است و جریان i را در آن برقرار کرده است.

که در گسترهٔ وسیعی از شدت میدانها، مقاومت ویژه به شدت میدان الکتریکی اعمال‌شده بستگی ندارد. برای این دسته از مواد، نمودار E برحسب j به‌صورت یک خط راست است، که شیب این خط مقاومت ویژهٔ ρ است. این مواد را مواد اهمی می‌خوانیم. به‌طور هم‌ارز، می‌گوییم این مواد از قانون اهم پیروی می‌کنند.

مقاومت ویژهٔ (یا رسانندگی) ماده از اندازه و جهت میدان الکتریکی اعمال‌شده مستقل است.

اغلب مواد همگن، از جمله فلزهای رسانا مانند مس، درگسترهٔ معینی از مقدارهای مربوط به میدان الکتریکی اعمال‌شده، از قانون اهم پیروی می‌کنند. اگر میدان به‌قدرکافی شدید باشد، تمام مواد در تناقض با قانون اهم رفتار خواهند کرد.

مقدارهای مقاومت ویژهٔ ارائه‌شده در جدول ۲۹ـ۱، ویژگیهای موادی است که در جدول فهرست شده‌اند. ممکن است نیاز داشته باشیم که مقاومت یک جسم مشخص، مثلاً یک قطعه مس با ابعاد معین، را نیز بدانیم. در شکل ۲۹ـ۶ یک رسانای همگن، همسانگرد به طول L و مساحت سطح مقطع یکنواخت A را نشان داده‌ایم که به آن اختلاف پتانسیل ΔV را اعمال کرده‌ایم. در داخل این جسم میدان الکتریکی یکنواخت $E = \Delta V/L$ برقرار است. چگالی جریان روی مساحت A نیز یکنواخت است، یعنی $j = i/A$. در این حالت مقاومت ویژه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

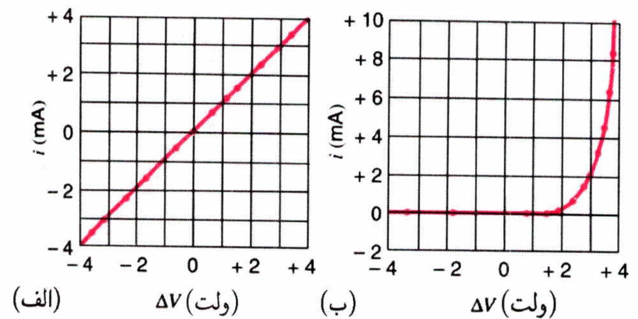
$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{\Delta V/L}{i/A} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۱)$$

خارج‌قسمت $\Delta V/i$ را، که در معادلهٔ بالا ظاهر شده است، مقاومت R تعریف می‌کنیم:

$$R = \frac{\Delta V}{i} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۲)$$

از ترکیب معادله‌های (۲۹ـ۱۱) و (۲۹ـ۱۲)، به عبارتی برای مقاومت دست پیدا می‌کنیم:

$$R = \rho\frac{L}{A} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۳)$$



شکل ۲۹ـ۷ (الف) نمودار جریان‌ـولتاژ مربوط به ماده‌ای که از قانون اهم پیروی می‌کند، در این مورد یک مقاومت ۱۰۰۰ اهمی. (ب) نمودار جریان‌ـولتاژ مربوط به ماده‌ای که از قانون اهم پیروی نمی‌کند، در این مورد یک دیود پیوندی pn.

مقاومت R ویژگی یک جسم مشخص است که نه تنها به ماده‌ای که از آن ساخته شده بستگی دارد، بلکه به طول آن جسم و مساحت سطح مقطع آن نیز وابسته است؛ مقاومت ویژه در حالت کلی ویژگی ماده است. یکای مقاومت الکتریکی اهم (Ω) است.

معادلهٔ (۲۹ـ۱۲) مبنای دیگری برای بیان قانون اهم ارائه می‌دهد. برای یک جسم مشخص، می‌توانیم جریان i را برای اختلاف پتانسیلهای گوناگون اندازه‌گیری و جریان i را به‌صورت تابعی از ΔV رسم کنیم. اگر این نمودار یک خط راست ارائه دهد، در آن صورت جسم یک ماده اهمی است و از قانون اهم پیروی می‌کند. گزارهٔ معادلی از قانون اهم به شرح زیر است:

مقاومت جسم، مستقل از مقدار یا علامت اختلاف پتانسیل اعمال شده است.

مقاومتهای معمولی که در مدارهای الکتریکی به‌کار می‌روند، در گسترهٔ اختلاف پتانسیلهایی که به‌طور متداول در مدارها مورد استفاده قرار می‌گیرند، اهمی هستند. قطعه‌های نیمرسانا، مانند دیودها و ترانزیستورها، معمولاً غیراهمی هستند. در شکل ۲۹ـ۷ نمودارهای جریان‌ـولتاژ را برای قطعه‌های اهمی و غیراهمی با هم مقایسه کرده‌ایم.

به یاد داشته باشید که رابطهٔ $\Delta V = iR$ بیانی از قانون اهم نیست. این معادله تعریفی از مقاومت به‌دست می‌دهد که در هر دو مورد اجسام اهمی و غیراهمی صادق است. حتی در مورد قطعات غیراهمی هم مقدار مقاومت R را می‌توانیم برای مقدار مشخص ΔV به‌دست آوریم؛ برای ΔV متفاوت، با مقدار دیگری از R روبه‌رو می‌شویم. در مورد قطعات اهمی، به‌ازای هر مقدار ΔV مقدار یکسانی برای R به‌دست می‌آوریم.

ΔV، i، و R کمیتهایی ماکروسکوپی هستند، که در مورد یک جسم مشخص یا ناحیه‌ای گسترده به‌کار می‌روند، کمیتهای میکروسکوپی متناظر با آنها عبارت‌اند از $\vec{\mathbf{E}}$، $\vec{\mathbf{j}}$، و ρ (یا σ)؛ این کمیتها در هر نقطه‌ای از جسم دارای مقدار مشخصی هستند. کمیتهای ماکروسکوپی از طریق معادلهٔ (۲۹ـ۱۲) به‌هم مرتبط می‌شوند ($\Delta V = iR$)، و کمیتهای میکروسکوپی از طریق معادلهٔ (۲۹ـ۱۰) ($\vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{j}}$).

کمیتهای ماکروسکوپی ΔV، i، و R وقتی که اندازه‌گیریهای الکتریکی را روی اجسام رسانای واقعی انجام می‌دهیم اهمیت اساسی دارند. این کمیتها همانهایی هستند که سنجه‌ها مقدارهایشان را نمایش می‌دهند. کمیتهای میکروسکوپی $\vec{\mathbf{E}}$، $\vec{\mathbf{j}}$، و ρ وقتی اهمیت دارند که رفتار بنیادی ماده (و نه نمونه‌هایی از آنها) مورد نظر است، مانند آنچه معمولاً در زمینه‌های پژوهشی در فیزیک حالت جامد (یا مادهٔ چگال) صورت می‌گیرد. به همین دلیل بخش ۲۹ـ۵ از دیدگاه اتمی به موضوع مقاومت ویژهٔ یک فلز می‌پردازد و نه مقاومت یک نمونهٔ فلزی.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۵ یک قطعه آهن مکعب‌مستطیل‌شکل دارای ابعاد $15\,\text{cm} \times 1{,}2\,\text{cm} \times 1{,}2\,\text{cm}$ است. (الف) مقاومت این قطعه بین دو سر مربعی آن چقدر است؟ (ب) مقاومت بین دو رخ مستطیل مقابل هم چقدر است؟ مقاومت ویژهٔ آهن در دمای اتاق $9{,}68 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$ است.

حل. (الف) مساحت رخ مربعی برابر است با $(1{,}2 \times 10^{-2}\text{m})^2$ یا $1{,}44 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$. از معادلهٔ (۲۹ـ۱۳) داریم

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9{,}68 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m})(0{,}15\,\text{m})}{1{,}44 \times 10^{-4}\text{m}^2}$$

$$= 1{,}0 \times 10^{-4}\Omega = 100\,\mu\Omega$$

(ب) مساحت رخ مستطیل‌شکل برابر است با $(1{,}2 \times 10^{-2}\text{m})(0{,}15\,\text{m})$ یا $1{,}80 \times 10^{-3}\text{m}^2$. از معادلهٔ (۲۹ـ۱۳) داریم

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9{,}68 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m})(1{,}2 \times 10^{-2}\text{m})}{1{,}80 \times 10^{-3}\text{m}^2}$$

$$= 6{,}5 \times 10^{-7}\Omega = 0{,}65\,\mu\Omega$$

در هر دو مورد فرض می‌کنیم اختلاف پتانسیل طوری به قطعه اعمال می‌شود که سطحهایی که مقاومت بین آنها را اندازه‌گیری می‌کنیم سطحهای هم‌پتانسیل هستند. در آن صورت میدان الکتریکی بین دو

رویه یکنواخت بوده و از آن‌رو چگالی جریان نیز یکنواخت است. اگر چنین نباشد، معادلهٔ (۲۹ـ۱۳) معتبر نیست.

شباهت بین جریان و شار گرمایی (اختیاری)

شباهت زیادی بین جریان بار الکتریکی که به‌وسیلهٔ اختلاف پتانسیل برقرار شده و شارگرمایی حاصل از اختلاف دما وجود دارد. تیغهٔ نازکی از یک مادهٔ رسانای الکتریکی به ضخامت Δx و مساحت A را در نظر بگیرید. فرض کنید که اختلاف پتانسیل ΔV را بین دو رخ مقابل آن برقرار کرده‌ایم. جریان i از معادلهٔ (۲۹ـ۱۲) $(i = \Delta V/R)$ و (۲۹ـ۱۳) $(R = \rho L/A)$ به‌دست می‌آید، یعنی داریم

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\rho \Delta x/A} = \sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

که در تساوی آخر از رابطهٔ $\sigma = \rho^{-1}$ استفاده کردیم. در حالت حدی مربوط به تیغه‌ای به ضخامت dx معادلهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۴)$$

علامت منفی در معادلهٔ (۲۹ـ۱۴) حاکی از آن است که بار مثبت در جهت کاهش V حرکت می‌کند؛ یعنی، dq/dt وقتی مثبت است که dV/dx منفی باشد.

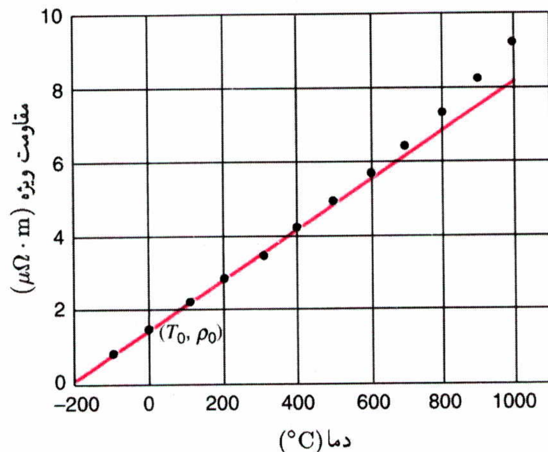
معادلهٔ مشابه برای شار گرمایی عبارت است از (نگاه کنید به بخش ۲۳ـ۲)

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۵)$$

که نشان می‌دهد k، رسانندگی گرمایی، متناظر با σ است و dT/dx، گرادیان یا شیب دما، متناظر با dV/dx، گرادیان با شیب پتانسیل است. برای فلزات خالص، شباهت معادله‌های (۲۹ـ۱۴) و (۲۹ـ۱۵) فراتر از یک تشابه صرفاً ریاضی است. در این فلزها الکترونهای آزاد هم انرژی گرمایی و هم بار الکتریکی را حمل می‌کنند؛ به لحاظ تجربی، رسانندهٔ الکتریکی خوب (مانند نقره) رسانای خوب گرمایی نیز هست و رسانندگی الکتریکی σ با رسانندگی گرمایی k ارتباط مستقیم دارد.

تغییر مقاومت ویژه برحسب دما (اختیاری)

شکل ۲۹ـ۸ خلاصهٔ بعضی از اندازه‌گیریهای تجربی مقاومت ویژهٔ مس را در دماهای مختلف نشان می‌دهد. برای استفادهٔ عملی از این اطلاعات، بهتر است آن را به‌صورت معادله بیان کنیم. در گسترهٔ



شکل ۲۹ـ۸ نقطه‌ها اندازه‌گیریهای برگزیده‌ای از مقاومت ویژهٔ مس را در دماهای مختلف نشان می‌دهد. در هر گسترهٔ دمایی معین تغییر مقاومت ویژه برحسب T را می‌توان با یک خط راست تقریب زد؛ مثلاً خط رسم‌شده در شکل به‌خوبی با داده‌های بین حدود $-۱۰۰°C$ تا $۴۰۰°C$ همخوانی دارد.

محدودی از دما، رابطهٔ بین مقاومت ویژه و دما تقریباً خطی است. با استفاده از دو نقطه برای تعیین شیب خط، می‌توانیم برای هر ناحیه‌ای در شکل ۲۹ـ۸، که مایل باشیم یک خط راست برازش کنیم. با انتخاب نقطهٔ مرجع، مانند نقطه‌ای که در شکل با برچسب $T_\circ$ و $\rho_\circ$ نشانه‌گذاری شده است، می‌توانیم مقاومت ویژهٔ ρ را برای هر دمای دلخواهی مانند T، از معادلهٔ تجربی خط راست شکل ۲۹ـ۸، که به‌صورت زیر است، به‌دست آوریم:

$$\rho - \rho_\circ = \rho_\circ \alpha_{\rm av}(T - T_\circ) \qquad (۲۹\text{ـ}۱۶)$$

(این عبارت خیلی شبیه معادلهٔ مربوط به انبساط گرمایی طول، $\Delta L = \alpha L \Delta T$، است که آن را در بخش ۲۱ـ۴ مشاهده کردیم.) در اینجا شیب خط را به‌صورت $\rho_\circ \alpha_{\rm av}$ نوشته‌ایم. اگر معادلهٔ (۲۹ـ۱۶) را برای $\alpha_{\rm av}$ حل کنیم، خواهیم داشت:

$$\alpha_{\rm av} = \frac{۱}{\rho_\circ} \frac{\rho - \rho_\circ}{T - T_\circ} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۷)$$

کمیت $\alpha_{\rm av}$ عبارت است از میانگین (یا متوسط) ضریب دمایی مقاومت ویژه برای ناحیه‌ای از دماها بین دو نقطه‌ای که برای تعیین شیب خط مورد استفاده قرارگرفته‌اند. می‌توانیم ضریب دمایی مقاومت ویژه را به‌صورت کلی‌تر زیر بیان کنیم:

$$\alpha = \frac{۱}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \qquad (۲۹\text{ـ}۱۸)$$

که تغییر نسبی مقاومت ویژه، یعنی $d\rho/\rho$ را به‌ازای تغییر دمای dT نشان می‌دهد. یعنی، α بستگی مقاومت ویژه به دما را در دمای

معین به‌دست می‌دهد، در حالی‌که $\alpha_{\rm av}$ میانگین وابستگی به دما را در محدودهٔ یک بازهٔ معین ارائه می‌دهد. ضریب α معمولاً تابع دماست.

در اغلب منظورهای کاربردی، معادلهٔ (۲۹ـ۱۶) نتیجه‌هایی به‌دست می‌دهد که گسترهٔ دقت آنها قابل قبول است. مقدارهای نوعی $\alpha_{\rm av}$ در جدول ۲۹ـ۱ نشان داده شده‌اند. برای کارهای دقیق‌تر، مانند استفاده از دماسنج، مقاومت پلاتینی برای اندازه‌گیری دما (نگاه کنید به بخش ۲۱ـ۳) تقریب خطی کافی نیست. در این مورد می‌توان جمله‌هایی از مرتبه $(T - T_\circ)^۲$ یا $(T - T_\circ)^۳$ را به‌منظور بهبود در دقت محاسبه‌ها، به طرف راست معادلهٔ (۲۹ـ۱۶) اضافه کرد. ضریبهای مربوط به این جمله‌های اضافی را باید، شبیه تعیین ضریب $\alpha_{\rm av}$ در معادلهٔ (۲۹ـ۱۶)، به‌صورت تجربی تعیین کرد.

۲۹ـ۵ قانون اهم: دیدگاه میکروسکوپی

چنانکه قبلاً گفتیم، قانون اهم یک قانون بنیادی الکترومغناطیس نیست زیرا به ویژگیهای محیط رسانده بستگی دارد. این قانون از لحاظ صوری بسیار ساده است، شگفت اینکه در حالی‌که بسیاری از مواد به‌خوبی از آن پیروی می‌کنند، برخی از مواد به هیچ‌وجه تابع آن نیستند. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان فهمید چرا فلزات از قانون اهم پیروی می‌کنند، یعنی چرا مقاومت ویژهٔ آنها، ρ، ثابت است (و مثلاً، به میدان الکتریکی اعمال‌شده بستگی ندارد).

در فلز، الکترونهای والانس به تک‌تک اتمها وابسته نیستند بلکه آزادند که در داخل شبکه به هر سو حرکت کنند و به آنها الکترونهای رسانش می‌گوییم. در فلز مس به‌ازای هر اتم یک الکترون از این نوع وجود دارد و ۲۸ الکترون باقی‌مانده پیوندشان را با هستهٔ مس حفظ می‌کنند تا هسته‌های یونی را به‌وجود آورند.

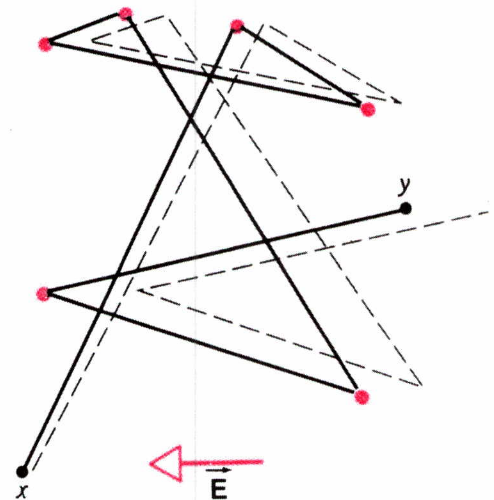
نظریهٔ رسانندگی الکتریکی در فلزها اغلب براساس مدل الکترون آزاد است، که در آن (در تقریب نخست) فرض می‌شود که الکترونهای رسانش می‌توانند آزادانه در سرتاسر مادهٔ رسانا حرکت کنند، کم‌وبیش مانند حرکت مولکولهای گاز موجود در یک ظرف. در واقع، مجموعهٔ الکترونهای رسانش را گاهی اوقات گاز الکترونی می‌نامیم. گرچه، بعدها خواهیم دید که نمی‌توان تأثیر هسته‌های یونی بر این ”گاز“ را نادیده گرفت.

توزیع سرعت کلاسیک ماکسولی (بخش ۲۲ـ۴ را ببینید) گاز الکترونی نشان می‌دهد که الکترونهای رسانش دارای توزیع سرعت بسیار گسترده‌ای از صفر تا بینهایت هستند که مقدار میانگین کاملاً مشخصی دارد. با این همه، در بررسی حرکت الکترونها نمی‌توان مکانیک کوانتومی را، که دیدگاهی بسیار متفاوت دارد، نادیده گرفت. در توزیع کوانتومی (بخش ۴۹ـ۴ را ببینید) الکترونهایی که در رسانش الکتریکی سهیم‌اند در بازهٔ بسیار باریکی از انرژی جنبشی و در نتیجه بازهٔ باریکی از سرعتها متمرکز شده‌اند. به همین دلیل، با تقریب بسیار خوبی می‌توان فرض کرد که الکترونها با سرعت متوسط یکنواختی حرکت می‌کنند. برای مس، این سرعت در حدود $v_{\rm av} = ۱{,}۶ \times ۱۰^۶ {\rm m/s}$ است. به‌علاوه در حالی‌که سرعت میانگین ماکسولی به شدت تابع دماست، سرعت مؤثری که از توزیع کوانتومی حاصل می‌شود تقریباً مستقل از دماست.

در نبود میدان الکتریکی، الکترونها باز هم مانند مولکولهای گاز موجود در یک ظرف، به‌صورت کاتوره‌ای حرکت می‌کنند. گاهی یک الکترون با یک هستهٔ یونی در شبکه برخورد می‌کند، و در این فرایند متحمل یک تغییر ناگهانی در جهت حرکتش می‌شود. درست مانند مورد مربوط به برخورد مولکولهای گاز، می‌توان مسافت آزاد میانگین λ و زمان آزاد میانگین τ را به میانگین مسافت و زمان بین برخوردها نسبت داد. (برخورد الکترونها با یکدیگر پدیده‌ای بسیار نادرست است و تأثیری در خواص الکتریکی رسانا ندارد.)

در بلور فلزی کامل (که هیچ نقص و ناخالصی ندارد) در دمای صفر مطلق، بنابر پیش‌بینیهای فیزیک کوانتومی، برخوردهای الکترون‌ـ‌شبکه صورت نمی‌گیرد، یعنی برای بلورهای کامل وقتی $T \to \circ\,{\rm K}$ داریم $\lambda \to \infty$. در بلورهای واقعی برخوردها به دلیلهای زیر صورت می‌گیرد (۱) هسته‌های یونی در هر دمایی مانند T حول وضعیت تعادلشان به‌صورت کاتوره‌ای نوسان می‌کنند؛ (۲) ممکن است ناخالصیها، یعنی اتمهای خارجی، وجود داشته باشند؛ و (۳) بلور می‌تواند شامل ناکاملیهای شبکه، مانند اتمهای گمشده یا اتمهای جابه‌جا شده، باشد. در نتیجه مقاومت ویژهٔ فلز را می‌توان به‌صورتهای زیر افزایش داد (۱) بالابردن دمای آن، (۲) افزودن اندکی ناخالصی به آن، و (۳) قرار دادن آن تحت کشش شدید، مثلاً با کشیدن آن از حدیده، برای افزایش تعداد ناکاملیهای شبکه.

وقتی که میدان الکتریکی به فلز اعمال می‌کنیم، الکترونها حرکت کاتوره‌ای خود را تصحیح و به آرامی در جهت عکس میدان الکتریکی، با سرعت سوق میانگین $v_{\rm d}$ حرکت می‌کنند. این سرعت سوق (با ضریبی در حدود $۱۰^{۱۰}$؛ نگاه کنید به مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳) از سرعت میانگین مؤثر $v_{\rm av}$ کوچکتر است. شکل ۲۹ـ۹ رابطهٔ بین این دو سرعت را نشان می‌دهد. خطهای پُر، مسیرهای کاتوره‌ای ممکن برای الکترون



شکل ۲۹_۹ پاره‌خطهای پُر نشان می‌دهند که یک الکترون در حرکت از x به y در مسیرش شش برخورد انجام می‌دهد. خط‌چینها نشان می‌دهند که اگر میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ اعمال شود، مسیر احتمالی چگونه خواهد شد. به رانده‌شدن تدریجی و مداوم در جهت $-\vec{\mathbf{E}}$ توجه کنید. (در واقع، خط‌چینها باید تا حدودی خمیده باشند تا مسیر سهموی را که الکترونها بین برخوردها می‌پیمایند نشان دهند.)

را در نبود میدان خارجی نشان می‌دهد؛ این الکترون برای رفتن از x به y شش برخورد انجام می‌دهد. خط‌چینها نشان می‌دهند که وقتی میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ اعمال می‌شود، همین رویداد چگونه ممکن است رخ دهد. توجه داشته باشید که الکترون به‌طور مداوم به سمت راست سوق داده می‌شود، تا مسیر آن به‌جای y در y' خاتمه یابد. در آماده‌سازی شکل ۲۹_۹، فرض کرده‌ایم که سرعت سوق v_{d} برابر $0.02v_{\text{av}}$ باشد؛ در واقع، این سرعت در حدود $10^{-10}v_{\text{av}}$ است. به‌طوری که "رانده‌شدن" یا "سوق یافتن" در این شکل بسیار اغراق‌آمیز نمایش یافته است.

می‌توانیم سرعت سوق v_{d} را برحسب میدان اعمال‌شدهٔ E و سرعت v_{av} و λ محاسبه کنیم. وقتی به الکترونی در فلز میدانی اعمال می‌شود، به آن نیروی eE وارد می‌کند، که این نیرو بنابر قانون دوم نیوتون در الکترون شتاب a ایجاد می‌کند.

$$a = \frac{eE}{m}$$

الکترونی را که با یک هستهٔ یونی برخورد کرده است در نظر بگیرید. در حالت کلی، برخورد، تمایل به رانده‌شدن را موقتاً از بین می‌برد و الکترون پس از برخورد، جهتی واقعاً کاتوره‌ای پیدا می‌کند. در خلال بازهٔ زمانی تا برخورد بعدی، سرعت الکترون به‌طور متوسط به اندازهٔ $a(\lambda/v_{\text{av}})$ یا $a\tau$ تغییر می‌کند، که در اینجا τ میانگین زمان بین برخوردهاست. این تغییر سرعت همان سرعت سوق v_{d} است، یا*

$$v_{\text{d}} = a\tau = \frac{eE\tau}{m} \qquad (۲۹_۱۹)$$

سرعت سوق v_{d} را می‌توان برحسب چگالی جریان (معادلهٔ ۲۹_۶) نیز بیان کرد، که در این مورد داریم

$$v_{\text{d}} = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m}$$

از ترکیب این معادله با معادلهٔ (۲۹_۱۰) $(\rho = E/j)$ سرانجام می‌رسیم به

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \qquad (۲۹_۲۰)$$

توجه کنید که در این معادله m، n، و e مقدارهای ثابت‌اند. به این ترتیب معادلهٔ (۲۹_۲۰) را می‌توان به این حکم که فلزها از قانون اهم پیروی می‌کنند تلقی کرد، اگر بتوانیم نشان دهیم که τ ثابت است. به‌ویژه، باید نشان دهیم که زمان τ به میدان الکتریکی اعمال‌شدهٔ E بستگی ندارد. در این حالت ρ تابع میدان الکتریکی E نیست، که این عدم وابستگی، معیاری است از اینکه یک ماده از قانون اهم پیروی می‌کند. کمیت τ تابع توزیع سرعت الکترونهای رسانش است. دیدیم که این توزیع سرعت فقط اندکی از میدانهای الکتریکی نسبتاً شدید تأثیر می‌پذیرد، زیرا v_{av} از مرتبهٔ $10^{6}\,\text{m/s}$ است، و v_{d} (نگاه کنید به مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹_۳) از مرتبهٔ $10^{-4}\,\text{m/s}$، نسبت این سرعتها به یکدیگر 10^{10} است. مقدار τ (مثلاً، برای فلز مس در دمای 20°C) در نبود میدان الکتریکی هر چه باشد، پس از اعمال میدان اصولاً تغییر

* شاید وسوسه‌انگیز باشد که معادلهٔ (۲۹_۱۹) را به‌صورت $v_{\text{d}} = \frac{1}{2}a\tau$ بنویسیم و چنین استدلال کنیم که سرعت $a\tau$ سرعت نهایی الکترون است، و در نتیجه سرعت میانگین نصف آن مقدار می‌شود. این ضریب اضافی $\frac{1}{2}$ درست بود اگر یک الکترون نوعی را تعقیب می‌کردیم و سرعت سوق را، میانگین تغییر سرعت آن، در میانگین زمان بین دو برخورد، τ، در نظر می‌گرفتیم. ولی، سرعت سوق با چگالی جریان j متناسب است و باید با توجه به میانگین سرعت تمام الکترونها در یک لحظه از زمان محاسبه شود. برای هر الکترون، تغییر سرعت در هر لحظه مانند t برابر at است، که در اینجا t زمانی است که الکترون پس از آخرین برخورد سپری کرده است. چون شتاب a برای تمام الکترونها یکسان است، میانگین مقدار at در یک زمان معین برابر $a\tau$ است، که در آن τ میانگین زمان سپری‌شده از آخرین برخورد است، که برابر همان میانگین زمان برخوردهاست. برای بحث بیشتر دربارهٔ این موضوع می‌توان به مراجع زیر رجوع کرد:

1. *Electricity and Magnetism*, 2nd ed., by Edward purcell (McGraw-Hill, 1985), Section 4.4.

2. Drift Speed and Collision Time, by Donald E. Tilley, *American Journal of Physics*, June 1976, p. 597.

نمی‌کند. به این ترتیب طرف راست معادلهٔ (۲۹ـ۲۰) مستقل از E است (که به معنی استقلال ρ از E است)، و این ماده از قانون اهم پیروی می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۶ (الف) زمان آزاد میانگین، بین برخوردهای الکترونهای رسانش مس، τ، چقدر است؟ (ب) مسافت آزاد میانگین λ، بین این برخوردها چقدر است؟ فرض کنید که سرعت میانگین مؤثر، v_{av}، برابر با $۱٫۶ \times ۱۰^{۶}\mathrm{m/s}$ است.

حل. (الف) از معادلهٔ (۲۹ـ۲۰) داریم

$$\tau = \frac{m}{ne^{۲}\rho}$$

$$= \frac{۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg}}{(۸٫۴۹\times۱۰^{۲۸}\mathrm{m}^{-۳})(۱٫۶۰\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})^{۲}(۱٫۶۹\times۱۰^{-۸}\Omega\cdot\mathrm{m})}$$

$$= ۲٫۴۸ \times ۱۰^{-۱۴}\mathrm{s}$$

در انجام این محاسبه، مقدار n، یعنی تعداد الکترونهای رسانش در واحد حجم برای فلز مس را از مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ گرفتیم و مقدار مربوط به ρ را از جدول ۲۹ـ۱.

(ب) مسافت آزاد میانگین را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\lambda = \tau v_{av} = (۲٫۴۸ \times ۱۰^{-۱۴}\mathrm{s})(۱٫۶ \times ۱۰^{۶}\mathrm{m/s})$$

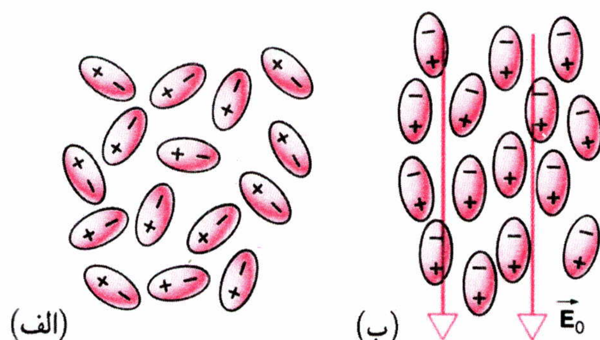
$$= ۴٫۰ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{m} = ۴۰\ \mathrm{nm}$$

این مسافت در حدود ۱۵۰ برابر فاصلهٔ بین نزدیکترین همسایه‌های یونی در شبکه مس است. بررسی کامل برمبنای فیزیک کوانتومی نشان می‌دهد که نمی‌توان "برخورد" را برهم‌کنش مستقیم الکترون و یون در نظر گرفت. بلکه باید آن را به‌صورت برهم‌کنش الکترون و ارتعاشهای گرمایی شبکه، ناکاملیهای شبکه، اتمهای ناخالصی شبکه در نظر گرفت. الکترون می‌تواند آزادانه شبکهٔ "ایده‌آل" را یعنی شبکه‌ای که به لحاظ هندسی "کامل و بی‌نقص" است در دماهای نزدیک به صفر مطلق بپیماید. در این شرایط مسافت آزاد میانگین، تا حد ۱۰ cm مشاهده شده است.

۲۹ـ۶ جسم عایق در میدان الکتریکی

تا به اینجا فقط دربارهٔ رفتار مواد رسانا در میدانهای الکتریکی گفتگو کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم که وقتی میدان الکتریکی خارجی را به مادهٔ عایق اعمال می‌کنیم چه اتفاقی می‌افتد. یعنی، آزمایش شکل ۲۹ـ۱ را با جایگزین کردن مادهٔ رسانا با یک مادهٔ عایق تکرار می‌کنیم.

در جسم عایق، بارهای الکتریکی نمی‌توانند آزادانه حرکت کنند. وقتی که جسم عایق در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد هیچ جریانی حاصل نمی‌شود. الکترونها خیلی محکم به اتمها و مولکولهای خود بسته شده‌اند. میدان الکتریکی، در عوض حرکت دادن بارهای الکتریکی در داخل ماده، تنها کاری که می‌تواند در مادهٔ عایق انجام دهد اندک بازآرایی بارهای الکتریکی در داخل اتمهاست. با این همه، این تأثیر کوچک می‌تواند تأثیری بسیار جدی در میدان الکتریکی در داخل عایق داشته باشد.

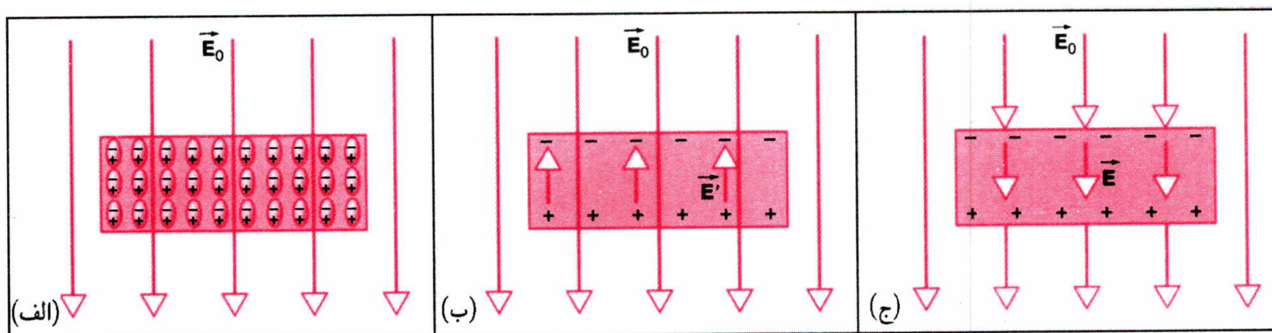


شکل ۲۹ـ۱۰ (الف) مجموعه‌ای از دوقطبیها با آرایشی کاتوره‌ای. (ب) یک میدان الکتریکی خارجی دوقطبیها را هم‌راستا کرده است.

این مطلب را با بررسی یک مادهٔ عایق مانند آب خالص آغاز می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۲۶ـ۲۰ نشان داده‌ایم، مولکول آب دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی است. وقتی مولکول آب، با گشتاور دوقطبی الکتریکی‌اش، در میدان الکتریکی قرار می‌گیرد، همانند آنچه در شکل ۲۶ـ۱۹ نشان داده‌ایم، میدان، گشتاور نیرویی به دوقطبی وارد می‌آورد که تلاش می‌کند آن را با میدان هم‌خط کند. در شکل ۲۹ـ۱۰ مجموعه‌ای از دوقطبیها را نشان داده‌ایم که به‌وسیلهٔ میدان خارجی چرخانده شده‌اند تا هم‌راستا شوند.

از نظر ناظر خارجی، مجموعهٔ دوقطبیهای شکل ۲۹ـ۱۰(ب)، چنین به نظر می‌آیند که گویی بارهای منفی در سطح بالایی و بارهای مثبت در سطح پایینی مستقر شده‌اند. از این نظر جسم عایق شبیه رسانای شکل ۲۹ـ۱ است، ولی توضیح این رفتار بسیار متفاوت است ــ در داخل مادهٔ عایق الکترونها هیچ‌گونه حرکتی ندارند. در داخل مادهٔ عایق، میدان الکتریکی خارجی سبب می‌شود که بارهای الکتریکی فقط در مسافتهایی که کمتر از قطر اتمی هستند، حرکت کنند.

شکل ۲۹ـ۱۱(الف)، تیغه‌ای از مادهٔ عایق را نشان می‌دهد که



شکل۲۹ـ۱۱ (الف) وقتی جسم عایق در میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرد، دوقطبیها هم‌راستا می‌شوند. (ب) بارهای القاشدهٔ سطحی روی جسم عایق میدان قطبش $\vec{E}'$ را در داخل آن ایجاد می‌کنند. (ج) میدان برایند $\vec{E}$ در داخل جسم عایق برابر است با حاصل‌جمع برداری $\vec{E}_\circ$ و $\vec{E}'$.

در میدان الکتریکی خارجی $\vec{E}_\circ$ قرار گرفته است. به علت چرخش گشتاورهای دوقطبی، در ظاهر یک برگه از بارهای مثبت روی سطح پایینی جسم عایق و یک برگه از بارهای منفی روی سطح بالایی قرار می‌گیرد. این دو برگه از بارهای القاشدهٔ سطحی، در داخل مادهٔ عایق میدان الکتریکی $\vec{E}'$ را به‌وجود می‌آورند که با میدان اعمال‌شدهٔ اولیه مخالفت می‌کند. این موضوع در شکل ۲۹ـ۱۱(ب) نشان داده شده است. اثر هم‌راستایی دوقطبیها در داخل جسم عایق قطبش خوانده می‌شود، و میدان $\vec{E}'$ را میدان قطبش می‌نامیم.

میدان برایند $\vec{E}$ در داخل مادهٔ عایق برابر است با حاصل‌جمع برداری میدان اعمال‌شدهٔ $\vec{E}_\circ$ و میدان قطبش $\vec{E}'$:

$$\vec{E} = \vec{E}_\circ + \vec{E}' \qquad (۲۹\text{ـ}۲۱)$$

چون $\vec{E}_\circ$ و $\vec{E}'$ در خلاف جهت یکدیگرند، می‌توانیم حاصل‌جمع برداری را به‌صورت تفاضل عددی بنویسیم:

$$E = E_\circ - E' \qquad (۲۹\text{ـ}۲۲)$$

در شکل ۲۹ـ۱۱(ج) میدان برایند را در داخل مادهٔ عایق نشان داده‌ایم، که این میدان کمتر از میدان اعمال شده است. هرگاه جسم عایقی در میدان الکتریکی قرار گیرد، به نظر می‌رسد که بارهای القاشدهٔ سطحی، تمایل به کاهش شدت میدان اصلی در داخل جسم دارند.

چنانچه میدان اعمال‌شدهٔ $\vec{E}_\circ$ را افزایش دهیم، میدان قطبش در حالت کلی افزایش می‌یابد. دوقطبیهای موجود در جسم عایق دارای حرکت کاتوره‌ای گرمایی هستند، که در جهت تخریب هم‌راستایی آنها عمل می‌کند. هر چه میدان اعمال‌شدهٔ اصلی قوی‌تر باشد، گشتاور نیروی وارد بر دوقطبیها شدیدتر است، و در نتیجه میزان هم‌راستایی آنها بیشتر می‌شود، و از آن‌رو میدان قطبش قوی‌تر می‌شود. برای تعداد بسیار زیادی از مواد، که آنها را مواد خطی می‌خوانیم، میدان قطبش با نسبت مستقیم با میدان اعمال‌شده افزایش می‌یابد: $E' \propto E_\circ$. با استفاده از معادلهٔ (۲۹ـ۲۲)، می‌توانیم این تناسب را به‌صورت $E \propto E_\circ$ نیز بنویسیم، و با معرفی ضریب تناسب، داریم

$$E = \frac{1}{\kappa_e} E_\circ \qquad (۲۹\text{ـ}۲۳)$$

که در این معادله ثابت بدون بعد κ_e را ثابت دی‌الکتریکی ماده می‌خوانیم. ثابت دی‌الکتریکی از یک بزرگتر است، و در نتیجه میدان برایند E در داخل مادهٔ عایق کوچکتر از میدان اعمال شده است. ثابت دی‌الکتریکی مانند رسانندگی یا مقاومت ویژه، ویژگی نوع ماده (و دمای آن) است، و از اندازه و شکل خاص جسمی که از آن ماده ساخته شده مستقل است.

مواد عایق را با نام مواد دی‌الکتریک نیز می‌شناسیم و این دو نام را به‌صورت جایگزین یکدیگر، به‌طور متناوب به‌کار می‌بریم. جدول ۲۹ـ۲ مقدارهای مربوط به ثابت دی‌الکتریک مواد گوناگون را در دمای اتاق ارائه می‌دهد. موادی که ثابت دی‌الکتریک آنها بزرگ است، میدانهای قطبش شدیدی بروز می‌دهند. و در نتیجه میدانهای داخلی آنها به‌طور قابل ملاحظه‌ای از میدانهای اعمال‌شده کوچکتر است.

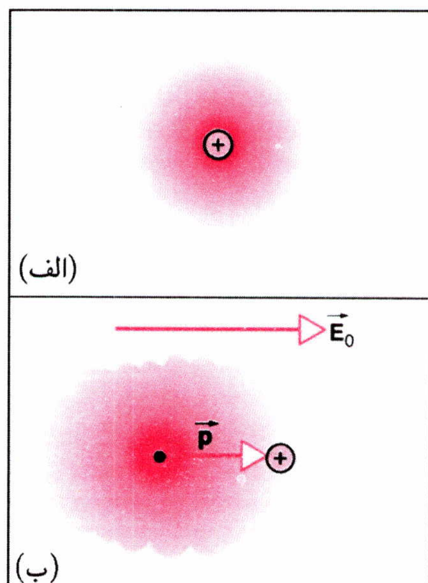
اگر میدان الکتریکی به‌قدر کافی قوی به یک مادهٔ عایق‌کننده اعمال کنیم، می‌توانیم اتمها یا مولکولهای مادهٔ عایق‌کننده را یونیده کنیم و از آن‌رو شرایطی را به‌وجود آوریم که بار الکتریکی، مانند رسانا، در آن ماده جریان یابد. میدانهای مورد نیاز برای فروریزش الکتریکی مربوط به مواد عایقی گوناگون، که به آن مقاومت دی‌الکتریکی می‌گوییم، در جدول ۲۹ـ۲ داده شده است.

جدول ۲۹ـ۲ برخی از خواص دی‌الکتریکها*

نام ماده	ثابت دی‌الکتریکی κ_e	مقاومت دی‌الکتریکی (kV/mm)
خلأ	۱ (دقیق)	∞
هوا (فشار یک اتمسفر)	۱٫۰۰۰۵۹	۳
پلی‌استیرین	۲٫۶	۲۴
کاغذ	۳٫۵	۱۶
روغن ترانسفورماتور (مبدل)	۴٫۵	۱۲
پیرکس	۴٫۷	۱۴
میکا	۵٫۴	۱۶۰
چینی (پُرسلین)	۶٫۵	۴
سیلیسیم	۱۲	
آب (۲۵°C)	۷۸٫۵	
آب (۲۰°C)	۸۰٫۴	
سرامیک تیتانیا	۱۳۰	
تیتانات استرانیم	۳۱۰	۸

* در دمای اتاق اندازه‌گیری شده است.

آب نمونه‌ای از مادهٔ دی‌الکتریک قطبی است، زیرا مولکولهای آن دارای گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دائمی هستند. آثاری مانند آنچه در این بخش توصیف شد در مواد دی‌الکتریکی غیرقطبی، که مولکولهای آنها دارای گشتاور دوقطبی دائمی نیستند، نیز رخ می‌دهد. در شکل ۲۹ـ۱۲ اثر میدان الکتریکی را روی اتم نشان داده‌ایم. اتم را می‌توان به‌صورت ابر متقارن کروی از بار منفی در نظرگرفت (الکترونها) که یک هستهٔ با بار مثبت را در میان گرفته‌اند. وقتی که میدانی وجود نداشته باشد مراکز مربوط به توزیع بارهای مثبت و منفی روی هم قرار می‌گیرند و اتم دارای هیچ‌گونه گشتاور دوقطبی نیست. میدان الکتریکی سبب جدایی بین بارها می‌شود، زیرا الکترونها تحت تأثیر نیرویی در یک جهت قرار می‌گیرند و به هسته نیرویی در جهت مخالف آن وارد می‌شود. اتم به دلیل عملکرد میدان الکتریکی یک گشتاور دوقطبی القایی به‌دست می‌آورد. وقتی میدان الکتریکی برداشته شود گشتاور دوقطبی القایی ناپدید می‌شود. اندازهٔ این گشتاور دوقطبی با میدان اعمال‌شده متناسب است و وقتی تأثیر تمام دوقطبیهای القایی موجود در ماده را در نظر بگیریم، باز هم به میدان قطبش E' می‌رسیم که با میدان اعمال‌شده، با شدت میدان معمولی، متناسب است. گشتاور



شکل ۲۹ـ۱۲ (الف) اتم را با هستهٔ با بار مثبت و ابر پراکندهٔ با بار منفی الکترونش نشان داده‌ایم. مراکز بارهای مثبت و منفی برهم منطبق‌اند. (ب) وقتی اتم در یک میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرد، به بارهای مثبت و منفی نیروهایی در جهتهای مخالف وارد می‌شود، و دیگر مراکز بارهای مثبت و منفی برهم منطبق نمی‌شوند. اتم یک گشتاور دوقطبی القایی کسب می‌کند.

دوقطبی القایی اغلب عامل ربایش یک جسم عایق بدون بار توسط جسم باردار است، مانند ربایش تکه‌های کوچک کاغذ توسط شانهٔ باردار در شکل ۲۵ـ۵.

چون تمام عبارتها و معادله‌های مربوط به میدانهای الکتریکی در فضای تهی ناشی از توزیع بارهای گوناگون شامل یک مضرب $1/\epsilon_0$ است، معادلهٔ (۲۹ـ۲۳) پیشنهاد می‌کند که معادله‌های مربوط به میدانهای الکتریکی در ماده باید شامل مضرب $1/\kappa_e\epsilon_0$ باشد. چون این عامل و مضرب مرتب و مکرر رخ می‌دهد، آن را با نماد ϵ نمایش می‌دهیم

$$\epsilon \stackrel{c}{=} \kappa_e\epsilon_0 \qquad (۲۹\text{ـ}۲۴)$$

ϵ را گذردهی ماده می‌خوانیم (به خاطر بیاورید که ثابت الکتریکی ϵ_0 را گذردهی فضای آزاد نیز می‌نامیم). اغلب می‌توانیم معادله‌های مربوط به میدانهای الکتریکی در فضای تهی را با جایگزین‌کردن ϵ_0 با ϵ در آنها در مورد میدانهای الکتریکی در ماده به‌کار ببریم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۷ دو صفحهٔ دایره‌ای رسانا با شعاع ۴٫۲ cm در فاصلهٔ ۰٫۶۵ cm از یکدیگر قرارگرفته و حامل چگالی بار یکنواخت توزیع‌شدهٔ $2{,}88 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$ هستند. یک صفحه دارای بار مثبت

و بار دیگری منفی است. فضای بین این دو صفحه با یک قرص از شیشهٔ پیرکس پر شده است، که ثابت دی‌الکتریک آن (جدول ۲۹ـ۲ را ببینید) ۴٫۷ است. (الف) میدان الکتریکی را در داخل شیشه معین کنید. (ب) چگالی بار القایی روی دو سطح قرص شیشه‌ای را معین کنید. برای حل این مسئله مکانهایی در نزدیکی مرکز قرصها در نظر بگیرید، که در آنجا میدانها یکنواخت هستند.

حل. (الف) در نبود مادهٔ دی‌الکتریک، میدان الکتریکی ناشی از هر یک از دو صفحهٔ دایره‌ای برابر $\sigma/2\epsilon_0$ است، که با معادلهٔ (۲۶ـ۲۰) مشخص شده است. میدانهای ناشی از دو صفحه در یک جهت قرار دارند، و در نتیجه با هم جمع می‌شوند تا میدان برایند حاصل شود

$$E_0=\frac{\sigma}{\epsilon_0}=\frac{۲٫۸۸\times ۱۰^{-۷}\mathrm{C/m^۲}}{۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲}}=۳٫۲۵\times ۱۰^{۴}\mathrm{N/C}$$

وقتی مادهٔ دی‌الکتریک وجود داشته باشد، میدان برایند چنین است:

$$E=\frac{E_0}{\kappa_e}=\frac{۳٫۲۵\times ۱۰^{۴}\mathrm{N/C}}{۴٫۷}=۶٫۹\times ۱۰^{۳}\mathrm{N/C}$$

(ب) میدان قطبش ناشی از بار القایی سطحی چنین است:

$$E'=E_0-E=۳٫۲۵\times ۱۰^{۴}\mathrm{N/C}-۶٫۹\times ۱۰^{۳}\mathrm{N/C}$$
$$=۲٫۵۶\times ۱۰^{۴}\mathrm{N/C}$$

دو برگهٔ بارهای القاشده میدان الکتریکی E' را ایجاد می‌کنند درست به همان ترتیبی که دو برگهٔ بارهای آزاد میدان E_0 را به‌وجود می‌آورند. با استفاده از معادلهٔ $E'=\sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$، داریم

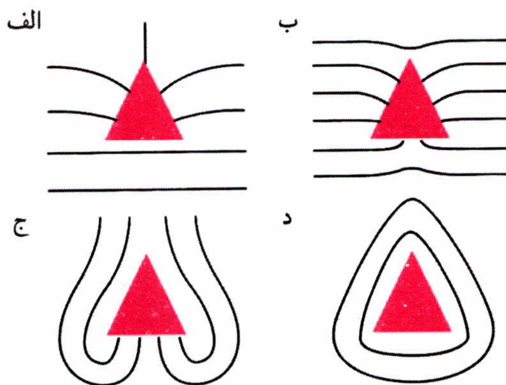
$$\sigma_{\text{ind}}=\epsilon_0 E'=(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N\cdot m^۲})(۲٫۵۶\times ۱۰^{۴}\mathrm{N/C})$$
$$=۲٫۲۷\times ۱۰^{-۷}\mathrm{C/m^۲}$$

چندگزینه‌ای

۲۹ـ۱ انواع ماده

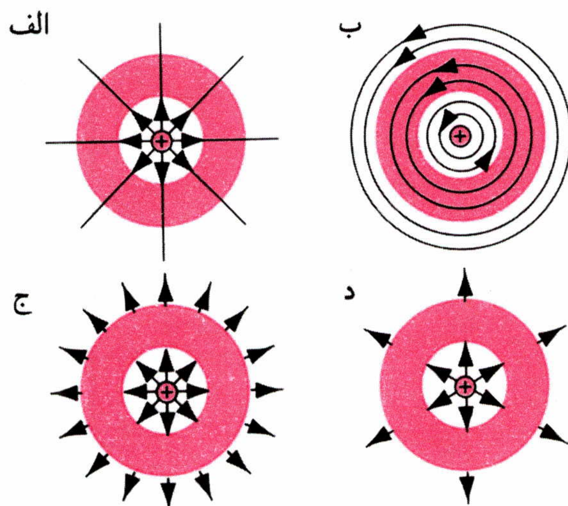
۲۹ـ۲ جسم رسانا در میدان الکتریکی: شرایط استاتیکی

۱. یک رسانای مثلثی‌شکل را در یک میدان در اصل یکنواخت قرار داده‌ایم. (الف) کدام تصویر در شکل ۲۹ـ۱۳ به بهترین وجه خطهای میدان الکتریکی استاتیکی را در نزدیکی رسانا نشان می‌دهد؟ (ب) کدام تصویر در شکل ۲۹ـ۱۳ به بهترین وجه خطهای هم‌پتانسیل استاتیکی را در نزدیکی رسانا نشان می‌دهد؟



شکل ۲۹ـ۱۳ پرسش چندگزینه‌ای ۱.

۲. یک بار نقطه‌ای را داخل یک پوستهٔ رسانای کروی بدون بار قرار داده‌ایم. کدام تصویر در شکل ۲۹ـ۱۴ به بهترین وجه خطهای میدان الکتریکی را نشان می‌دهد؟



شکل ۲۹ـ۱۴ پرسش چندگزینه‌ای ۲.

۳. یک بار نقطه‌ای را داخل یک پوستهٔ رسانای کروی بدون بار قرار داده‌ایم. کدام تصویر در شکل ۲۹ـ۱۵ به بهترین وجه خطهای میدان الکتریکی را نشان می‌دهد؟

۲۹ـ۳ جسم رسانا در میدان الکتریکی: شرایط دینامیکی

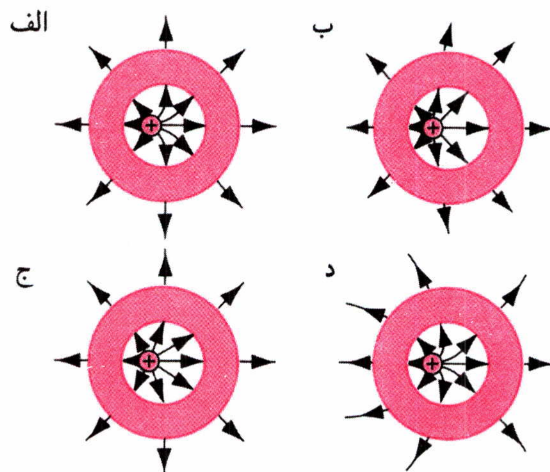
۴. هم جریان و هم چگالی جریان دارای جهتهایی وابسته به خود هستند. آیا آنها بردارند؟

(الف) فقط جریان بردار است.

(ب) فقط چگالی جریان بردار است.

(ج) هم جریان و هم چگالی جریان بردارند.

(د) نه جریان و نه چگالی جریان هیچ‌کدام بردار نیستند.



شکل ۲۹ـ۱۵ پرسش چندگزینه‌ای ۳.

۵. جریان ثابتی در یک رسانای مخروطی‌شکل، مطابق شکل ۲۹ـ۱۶، جاری می‌شود. رویه‌های انتهایی $S_۱$ و $S_۲$ دو سطح هم‌پتانسیل متفاوت‌اند.

(۱) از کدام صفحه بیشترین جریان می‌گذرد؟

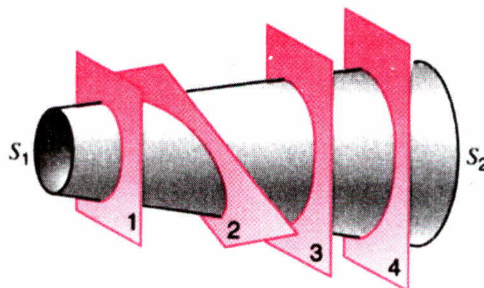
(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) از همهٔ صفحات یک مقدار جریان می‌گذرد.

(۲) بیشترین شار الکتریکی از کدام صفحه می‌گذرد؟

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (ج) ۴ (ه) از همهٔ صفحات شار الکتریکی یکسانی می‌گذرد.

(۳) اندازهٔ میدان الکتریکی E در امتداد محور مرکزی شکل در حرکت از رویهٔ $S_۱$ به رویهٔ $S_۲$ چگونه تغییر می‌کند؟

(الف) E ثابت است. (ب) E افزایش می‌یابد. (ج) E کاهش می‌یابد.



شکل ۲۹ـ۱۶ پرسش چندگزینه‌ای ۸.

۶. جریانی از یک رسانای استوانه‌ای طویل می‌گذرد. جریان در چه جهتی جاری می‌شود؟

(الف) به سمت انتهایی که در پتانسیل بالاتر قرار دارد.

(ب) به سمت انتهایی که در پتانسیل پایین‌تر قرار دارد.

(ج) نه (الف) و نه (ب)، زیرا سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است.

۲۹ـ۴ مواد اهمی

۷. از دو رشته سیم A و B با شکلهای یکسان، جریان یکسانی می‌گذرد. سیمها از مواد متفاوتی ساخته شده‌اند که چگالی الکترون آنها متفاوت است و می‌دانیم که $n_{\text{A}} > n_{\text{B}}$ است.

(۱) کدام رشته سیم بیشترین چگالی جریان را خواهد داشت؟

(الف) A (ب) B (ج) چگالی جریان در هر دو سیم یکسان است.

(۲) الکترونهای کدام رشته سیم سرعت سوق بیشتری خواهد داشت؟

(الف)A (ب) B (ج) سرعت سوق الکترونها در هر دو سیم یکسان است.

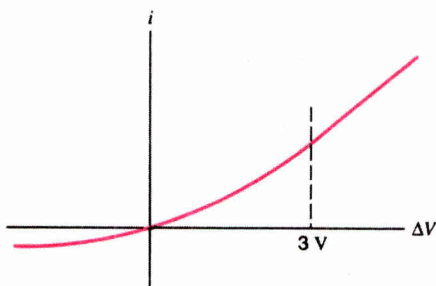
(۳) کدام رشته سیم دارای میدان الکتریکی E، بزرگتری در داخل خود است؟

(الف) A (ب) B (ج) هر دو سیم یکسان‌اند.

۸. ارتباط بین جریان و ولتاژ برای یک مادهٔ مشخص در شکل ۲۹ـ۱۷ نشان داده شده است. این ماده درکدام‌یک از حالتهای زیر اهمی است؟

(الف) برای تمام ΔVها. (ب) برای ΔV بین ۰ و ۳ V.

(ج) برای ΔVهای بیشتر از ۳ V. (د) در هیچ‌یک از ΔVها.



شکل ۲۹ـ۱۷ پرسش چندگزینه‌ای ۵.

۹. مقاومت R مادهٔ اهمی چگونه به اندازهٔ میدان الکتریکی اعمال‌شده بستگی دارد؟

(الف) $R \propto E$ (ب) مقداری ثابت $= ER$

(ج) مقداری ثابت $= E + R$ (د) R مستقل از E است.

۱۰. جریان پایای i_{in} در سیمی جاری می‌شود که به مقاومتی وارد می‌شود. جریان پایای i_{out} در سیمی جاری می‌شود که از سر دیگر مقاومت خارج می‌شود.

(۱) جریانهای i_{in} و i_{out} با هم چه نسبتی دارند؟
(الف) $i_{\text{in}} > i_{\text{out}}$ (ب) $i_{\text{in}} < i_{\text{out}}$ (ج) (همیشه) $i_{\text{in}} = i_{\text{out}}$
(د) فقط اگر $R = 0$ باشد $i_{\text{in}} = i_{\text{out}}$

(۲) دربارهٔ پتانسیل V_{in}، پتانسیل در آن سر سیم که جریان وارد می‌شود و پتانسیل V_{out}، پتانسیل در آن سری که جریان خارج می‌شود چه می‌توان گفت؟
(الف) $V_{\text{in}} > V_{\text{out}}$ (ب) $V_{\text{in}} < V_{\text{out}}$
(ج) (همیشه) $V_{\text{in}} = V_{\text{out}}$ (د) در این‌باره نمی‌توان اظهارنظری کرد مگر اطلاعات بیشتری در دست باشد.

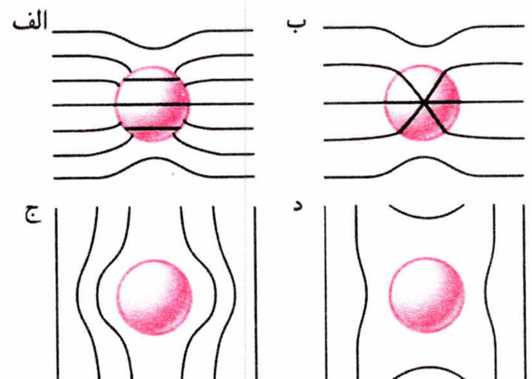
۲۹ـ۵ قانون اهم: دیدگاه میکروسکوپی

۱۱. سرعت سوق الکترونها وقتی که در داخل یک مقاومت حرکت می‌کنند چگونه تغییر می‌کند؟
(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

۱۲. مقاومت ویژهٔ اغلب رساناها با افزایش دما افزایش می‌یابد. یک دلیل ظاهراً موجه آن است که، در رسانا،
(الف) چگالی الکترون با دما تغییر می‌کند.
(ب) بار روی هر الکترون با دما تغییر می‌کند.
(ج) زمان بین برخورد با دما تغییر می‌کند.
(د) جرم الکترون با دما تغییر می‌کند.

۲۹ـ۶ جسم عایق در میدان الکتریکی

۱۳. یک جسم عایق کروی را در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار می‌دهیم.
(۱) کدام تصویر در شکل ۲۹ـ۱۸ خطهای میدان الکتریکی استاتیکی را به بهترین وجه در نزدیکی و داخل جسم عایق نشان می‌دهد؟



شکل ۲۹ـ۱۸ پرسش چندگزینه‌ای ۱۳.

(۲) کدام تصویر در شکل ۲۹ـ۱۸ خطهای هم‌پتانسیل استاتیکی را به بهترین وجه در نزدیکی و داخل جسم عایق نشان می‌دهد؟

پرسشها

۱. کمیتهای فیزیکی دیگری را نام ببرید که مانند جریان نرده‌ای هستند و سمت‌وسویی دارند که در نمودار توسط پیکان نشان داده می‌شود.

۲. در قرارداد مربوط به پیکانهای جهت جریان (الف) آیا راحت‌تر، یا حتی ممکن، نبود که فرض کنیم تمام حاملهای بار، منفی هستند؟ (ب) آیا راحت‌تر نبود، یا حتی امکان نداشت که الکترون را مثبت درنظر بگیریم، پروتون را منفی و مانند آن؟

۳. چه دلیل تجربی دارید که نشان دهد بارهای الکتریکی موجود در جریان الکتریسیته و در الکتروستاتیک دقیقاً یکسان‌اند؟

۴. به زبان ساده توضیح دهید که چرا در این فصل می‌توانیم در داخل رسانا $\vec{\mathbf{E}} \neq 0$ داشته باشیم. در حالی‌که در بخش ۲۷ـ۶ پذیرفتیم که در داخل رسانا $\vec{\mathbf{E}} = 0$ است.

۵. جریانی از یک گوشهٔ یک ورقهٔ مربع‌شکل مسی وارد و از گوشهٔ مقابل آن خارج می‌شود. در نقطه‌های مختلف مربع پیکانهایی رسم کنید که نمایشگر مقدار نسبی چگالی جریان $\vec{\mathbf{j}}$ باشد. در اینجا حدسهای شهودی مورد نظر است و نه تجزیه‌وتحلیل مفصل ریاضی.

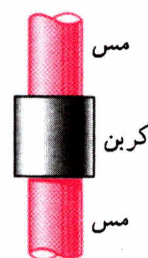
۶. آیا در نسبت دادن شماره به سیمهای لوازم خانگی، منطقی وجود دارد؟ تمرین ۶ را ببینید. اگر منطقی وجود ندارد، پس چرا این سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد؟

۷. اختلاف پتانسیل ΔV به دو سر یک سیم مسی به طول L و قطر d اعمال شده است. اگر (الف) اختلاف پتانسیل ΔV را دو برابر کنیم، (ب) طول L سیم را دو برابر کنیم، و (ج) قطر d سیم را دو برابر کنیم، سرعت سوق الکترون در این سیم چه تغییری خواهد کرد؟

۸. چرا نمی‌توان سرعت سوق الکترونها را با تعیین زمان حرکت آنها در طول یک رسانا اندازه‌گیری کرد؟

۹. به‌طور خلاصه بعضی از طرحهای ممکن برای مقاومتهای متغیر را شرح دهید.

۱۰. یک استوانهٔ مدور کربنی را مطابق شکل ۲۹ـ۱۹، بین دو الکترود استوانهٔ مدور مسی قرار می‌دهیم و محکم می‌کنیم. اختلاف پتانسیل ΔV را به دو سر قطعهٔ کربنی اعمال کرده‌ایم. دربارهٔ مشکل محاسبهٔ مقاومت استوانهٔ کربنی با استفاده از رابطهٔ $R = \rho L/A$ بحث کنید.



شکل ۲۹ـ۱۹ پرسش ۱۰.

۱۱. یک مکعب آلومینیمی در اختیار شماست و امکان دسترسی به پایانه‌های یک باتری را نیز دارید. برای تعیین (الف) بیشترین و (ب) کمترین مقاومت مکعب، پایانه‌های باتری را چگونه به آن متصل می‌کنید؟

۱۲. چگونه مقاومت یک قطعهٔ فلزی به شکل چوب‌شور (از انواع تنقلات) را اندازه‌گیری می‌کنید؟ برای روشن شدن نحوهٔ اندازه‌گیری، جزییات را به تفصیل شرح دهید.

۱۳. سُرخوردن روی صندلی اتومبیل، می‌تواند اختلاف پتانسیلی در حد چند هزار ولت تولید کند. پس چرا شخص سُرخورده را برق نمی‌گیرد؟

۱۴. مشکلات مربوط به آزمایش اینکه آیا رشتهٔ یک لامپ روشنایی از قانون اهم پیروی می‌کند را بررسی کنید.

۱۵. آیا سرعت سوق الکترونها در یک رسانای فلزی حامل جریان با افزایش دمای رسانا تغییر می‌کند؟ در این‌باره توضیح دهید.

۱۶. توضیح دهید که چرا تکانه‌ای که الکترونهای رسانش در رسانای فلزی به یونها منتقل می‌کنند سبب وارد آمدن نیروی برایند به رسانا نمی‌شود.

۱۷. فهرستی از شباهتها و تفاوتهای جاری شدن بار در رسانا، جاری شدن آب در لولهٔ افقی و رسانش گرما در تیغه تهیه کنید. موضوعهایی نظیر اینکه چه چیزی باعث جریان می‌شود، چه چیزی با آن مخالفت می‌کند. چه ذره‌هایی (در صورت وجود داشتن) در این امر سهیم‌اند و یکایی که با آن می‌توان جریان را اندازه گرفت، مورد توجه قرار دهید.

۱۸. چگونه می‌توان معادلهٔ $\Delta V = iR$ را برای مقاومتی که از قانون اهم پیروی نمی‌کند به‌کار برد؟

۱۹. به هنگام اصابت صاعقه یک مرد و یک گاو در علفزاری ایستاده‌اند. چرا احتمال کشته‌شدن گاو بیشتر از مرد است؟ پدیدهٔ مسئول این موضوع "ولتاژ پله‌ای" نامیده می‌شود.

۲۰. خطهای مربوط به شکل ۲۹ـ۹ باید اندکی خمیده باشند. چرا؟

۲۱. فیوز مدار الکتریکی قطعهٔ سیمی است که چنان طراحی شده است که اگر جریان از یک مقدار از پیش تعیین‌شده تجاوز کند ذوب و در نتیجه مدار باز می‌شود. یک سیم فیوز خوب چه ویژگیهایی باید داشته باشد؟

۲۲. چرا لامپ رشته‌ای بر اثر استفاده، کم‌نورتر می‌شود؟

۲۳. ماهیت و کیفیت زندگی روزمرهٔ ما به‌شدت متأثر از قطعاتی است که از قانون اهم پیروی نمی‌کنند. در تأیید این ادعا چه می‌توانید بگویید؟

۲۴. از برگهٔ امتحانی یک دانشجو چنین می‌خوانیم: "معادلهٔ $R = \Delta V/i$ نشان می‌دهد که مقاومت رسانا با اختلاف پتانسیل اعمال‌شده به آن نسبت مستقیم دارد." نظر شما دربارهٔ این گزاره چیست؟

۲۵. ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ کربن منفی است. یعنی، مقاومت ویژهٔ کربن با افزایش دما کم می‌شود. آیا مقاومت ویژهٔ این عنصر در یک دمای به‌قدر کافی بالا، به‌طور کامل ناپدید خواهد شد؟

۲۶. آیا مادهٔ دی‌الکتریک می‌تواند الکتریسیته را هدایت کند؟ آیا مادهٔ رسانا می‌تواند خاصیت دی‌الکتریکی داشته باشد؟

۲۷. آیا انتظار دارید که ثابت دی‌الکتریک ماده با دما تغییر کند؟ اگر پاسختان مثبت است، توضیح دهید، چگونه؟ آیا در این رابطه، داشتن گشتاور دوقطبی دائمی مولکولها، تأثیرگذار است؟

۲۸. نشان دهید که ثابت دی‌الکتریکی مادهٔ رسانا را باید بینهایت بزرگ در نظر گرفت.

۲۹. میدان الکتریکی می‌تواند گازها را به راههای گوناگون قطبیده کند: با واپیچش ابرهای الکترونی مولکولها، با آرایش و قرار دادن مولکولهای قطبیده در یک راستا، با خمیده کردن یا ایجاد کشیدگی در پیوندهای مولکولهای قطبیده. این موضوع با قطبش در مولکولهای اجسام مایع یا جامد چه تفاوتی دارد؟

۳۰. به یک جسم دی‌الکتریک در میدان الکتریکی غیریکنواخت نیروی برایندی وارد می‌شود. چرا اگر میدان، یکنواخت بود هیچ نیروی خالصی وجود نداشت؟

۳۱. جریان آب از شیر آب را می‌توان با نزدیک کردن یک میلهٔ باردار به باریکه منحرف کرد. به دقت توضیح دهید که این پدیده چگونه رخ می‌دهد.

تمرینها

۲۹ـ۱ انواع ماده

۲۹ـ۲ جسم رسانا در میدان الکتریکی: شرایط استاتیکی

۲۹ـ۳ جسم رسانا در میدان الکتریکی: شرایط دینامیکی

۱. جریانی به شدت ۴٫۸۲ A به مدت ۴٫۶۰ دقیقه در یک مقاومت ۱۲٫۴Ω برقرار می‌شود. در این مدت (الف) چه مقدار بار و (ب) چه

تعداد الکترون از هر مقطعی از این مقاومت می‌گذرد؟

۲. شدت جریان در یک باریکهٔ الکترونی در پایانهٔ تصویر یک دستگاه ویدئوی معمولی $۲۰۰\mu A$ است. در هر دقیقه چند الکترون به صفحهٔ نمایش برخورد می‌کند؟

۳. فرض کنید که در هر سانتی‌متر مکعب $۲٫۱۰ \times ۱۰^{۸}$ یون دارای دو بار مثبت داریم که همگی با سرعت $۱٫۴۰ \times ۱۰^{۵} m/s$ به سمت شمال حرکت می‌کنند. (الف) مقدار و جهت چگالی جریان را محاسبه کنید. (ب) آیا می‌توانید جریان کل این باریکهٔ یونی را محاسبه کنید؟ اگر نه، برای این کار به چه اطلاعات بیشتری نیاز دارید؟

۴. جریان بسیار کم ولی قابل اندازه‌گیری $۱۲۳ pA$ در یک سیم مسی به قطر $۲٫۴۶ mm$ برقرار است. (الف) چگالی جریان و (ب) سرعت سوق الکترون را محاسبه کنید. مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ را ببینید.

۵. فرض کنید ماده‌ای که فیوز از آن ساخته شده است (پرسش ۲۱ را ببینید) وقتی ذوب می‌شود که چگالی جریان در آن به $۴۴۰ A/cm^{۲}$ برسد. برای اینکه جریان به $۰٫۵۵۲ A$ محدود شود قطر استوانه‌ای که سیم فیوز از آن ساخته می‌شود چقدر باید باشد؟

۶. ضوابط ملی الکتریکی (در ایالات متحده)، که بیشترین جریان ایمن برای سیمهای مسی با قطرهای متفاوت و عایق‌بندی لاستیکی را مشخص می‌کند در زیر آورده‌ایم (فقط بخشی از آن). تغییر چگالی جریان ایمن را برحسب قطر رسم کنید. کدام عدد معیار، بیشترین چگالی جریان ایمن را دارد؟

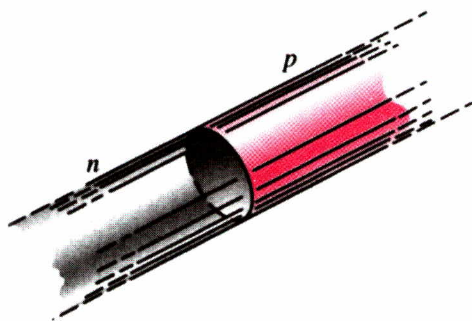
عدد معیار*	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
قطر (mil)**	۲۰۴	۱۶۲	۱۲۹	۱۰۲	۸۱	۶۴	۵۱	۴۰
جریان ایمن (A)	۷۰	۵۰	۳۵	۲۵	۲۰	۱۵	۶	۳

* روشی برای مشخص کردن قطر سیم

** $۱ mil = ۱۰^{-۳} in$

۷. وقتی اختلاف پتانسیل به اندازهٔ کافی بزرگ به دو الکترود لامپ تخلیهٔ گازی اعمال شود جریانی بین الکترودها برقرار می‌شود. گاز یونیده‌شده، الکترونها به طرف پایانهٔ مثبت و یونهای با یک بار مثبت به طرف پایانهٔ منفی حرکت می‌کنند. در لامپ تخلیهٔ هیدروژنی که در هر ثانیه $۳٫۱ \times ۱۰^{۱۸}$ الکترون و $۱٫۱ \times ۱۰^{۱۸}$ پروتون از هر مقطع لامپ می‌گذرد. اندازه و جهت جریان را مشخص کنید.

۸. همان‌طورکه در شکل ۲۹ـ۲۰ نشان داده‌ایم، یک پیوند pn از دو مادهٔ نیمرسانای متفاوت به شکل استوانه‌های یکسان به قطر $۰٫۱۶۵ mm$ ساخته شده است. در یک کاربرد معین در هر ثانیه $۳٫۵۰ \times ۱۰^{۱۵}$



شکل ۲۹ـ۲۰ تمرین ۸.

الکترون از طرف n به طرف p پیوند می‌رود در حالی‌که $۲٫۲۵ \times ۱۰^{۱۵}$ حفره در هر ثانیه از طرف p به طرف n گذر می‌کند. (حفره مانند ذره‌ای با بار $+۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}C$ عمل می‌کند.) پیدا کنید (الف) جریان کل و (ب) چگالی جریانی را که از پیوند می‌گذرد.

۹. در نزدیکی زمین، چگالی پروتونهای موجود در بادهای خورشیدی $۸٫۷۰ cm^{-۳}$ و سرعت آنها $۴۷۰ km/s$ است. (الف) چگالی جریان این پروتونها را معین کنید. (ب) اگر میدان مغناطیسی زمین آنها را منحرف نمی‌کرد، پروتونها با زمین برخورد می‌کردند. در آن‌صورت زمین چه جریانی را دریافت می‌کرد؟

۱۰. عرض تسمهٔ یک شتابدهندهٔ الکتروستاتیکی $۵۲٫۰ cm$ است و با سرعت $۲۸٫۰ m/s$ حرکت می‌کند. این تسمه بار الکتریکی را با آهنگ $۹۵٫۰\mu A$ به کره منتقل می‌کند. چگالی سطحی بار روی تسمه را محاسبه کنید. بخش ۲۸ـ۱۰ را ببینید.

۱۱. چقدر طول می‌کشد تا الکترونها از باتری اتومبیل به استارت آن برسند؟ فرض کنید جریان $۱۱۵ A$ باشد و الکترونها از یک سیم مسی با سطح مقطع $۳۱٫۲ mm^{۲}$ و طول $۸۵٫۵ cm$ عبور می‌کنند. مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ را ببینید.

۲۹ـ۴ مواد اهمی

۱۲. حتی اگر جریان اندک $۵۰ mA$ از نزدیکی قلب یک نفر بگذرد می‌تواند او را بکشد. یک برقکار با دست عرق‌کرده اتصال خوبی با رساناهایی که در هر دستش گرفته است برقرار می‌کند. اگر مقاومت این برقکار ۱۸۰۰Ω باشد، ولتاژ کشنده چقدر است؟ (برقکارها اغلب با سیمهای "فاز" کار می‌کنند.)

۱۳. مساحت مقطع یک ریل فولادی راه‌آهن $۵۶ cm^{۲}$ است. مقاومت $۱۱ km$ از این ریل چقدر است؟ مقاومت ویژهٔ فولاد $۳٫۰ \times ۱۰^{-۷}\Omega\cdot m$ است.

۱۴. با استفاده از شیب خط در شکل ۲۹ـ۸، مقدار میانگین ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ مس در دمای اتاق را برآورد و آن را با مقدار داده‌شده در جدول ۲۹ـ۱ مقایسه کنید.

۱۵. مقاومت سیمی به طول ۴٫۰ m و قطر ۶٫۰ mm برابر ۱۵ mΩ است. به دو سر این سیم اختلاف پتانسیل ۲۳ V اعمال شده است. (الف) جریان در این سیم چقدر است؟ (ب) چگالی جریان را در این سیم محاسبه کنید. (ج) مقاومت ویژهٔ مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ سیم را محاسبه کنید. آیا می‌توانید این ماده را شناسایی کنید؟ جدول ۲۹ـ۱ را ببینید.

۱۶. مقاومت پیچه‌های مسی یک موتور در دمای ۲۰°C و وقتی که کار نمی‌کند ۵۰ Ω است. پس از آنکه این موتور برای چندین ساعت کار کرد مقاومت آن به ۵۸Ω افزایش می‌یابد. در این حالت دمای پیچه‌ها چقدر است؟ تغییرات ابعاد پیچه بر اثر تغییر دما را نادیده بگیرید. جدول ۲۹ـ۱ را ببینید.

۱۷. نشان دهید که اگر بتوان تغییر ابعاد رسانا را برحسب تغییر دما نادیده گرفت، مقاومت بنابر رابطهٔ $R - R_\circ = \alpha_{\rm av} R_\circ (T - T_\circ)$ برحسب دما تغییر خواهد کرد.

۱۸. پیچه‌ای با پیچیدن ۲۵۰ دور سیم مسی عایق‌دار، با نمرهٔ ۸ (تمرین ۶ را ببینید) به‌صورت لایه‌ای روی یک استوانه به شعاع ۱۲٫۲ cm ساخته شده است. مقاومت پیچه را محاسبه کنید. از ضخامت روکش عایق سیم چشم بپوشید. جدول ۲۹ـ۱ را ببینید.

۱۹. دو رسانا از یک ماده ساخته شده‌اند و طول یکسانی دارند. رسانای A یک سیم توپر به قطر D است. رسانای B لوله‌ای است که قطر خارجی آن $2D$ و قطر داخلی آن D است. نسبت مقاومتهای اندازه‌گیری‌شده، R_A/R_B، بین دو سر آنها را معین کنید.

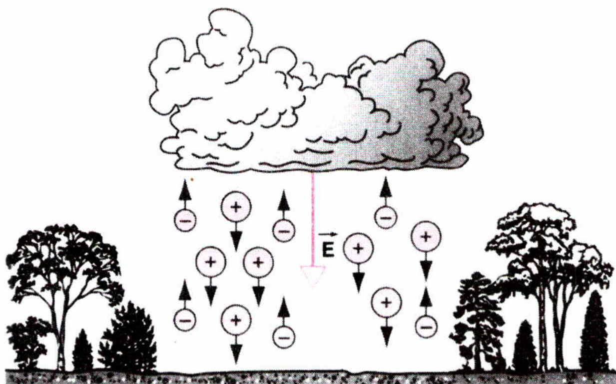
۲۰. اگر بخواهیم مقاومت یک رشته سیم آهنی با یک رشته سیم مسی به قطر ۱٫۱۹ mm و با همان طول برابر شود، قطر سیم آهنی باید چقدر باشد؟

۲۱. یک کابل برق از ۱۲۵ رشته سیم نازک تشکیل شده است که مقاومت هر رشته ۲٫۶۵μΩ است. اختلاف پتانسیل یکسانی بین دو سر همهٔ رشته‌ها اعمال می‌کنیم و حاصل این عمل جریانی به شدت ۷۵۰ mA در کابل است. (الف) جریان در هر یک از رشته‌ها چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل اعمال‌شده چقدر است؟ (ج) مقاومت کابل چقدر است؟

۲۲. یک سیم مسی و یک سیم آهنی با طول یکسان به اختلاف پتانسیل یکسانی متصل شده‌اند. (الف) اگر بخواهیم جریان یکسانی از این سیمها عبور کند، نسبت شعاعهای آنها چقدر باید باشد؟ (ب) آیا با انتخاب مناسب شعاعها می‌توان چگالی جریان در دو سیم را مساوی کرد؟

۲۳. وقتی اختلاف پتانسیل ۱۱۵ V را به دو سر سیمی به طول ۹٫۶۶ m اعمال می‌کنیم چگالی جریان در این سیم برابر ۱٫۴۲ A/cm² را می‌شود. رسانندگی ماده تشکیل‌دهندهٔ سیم را تعیین کنید.

۲۴. در قسمت پایینی جو زمین یونهای مثبت و منفی وجود دارند که توسط عناصر پرتوزا در خاک و پرتوهای کیهانی از فضا تولید شده‌اند. در برخی از منطقه‌ها، شدت میدان الکتریکی در جو برابر ۱۲۰ V/m و جهت آن قائم و به طرف پایین است. به علت همین میدان، یونهای دارای یک بار مثبت، ۶۲۰ عدد در سانتی‌متر مکعب، به طرف پایین و یونهای دارای یک بار منفی، ۵۵۰ عدد در سانتی‌متر مکعب، به طرف بالا کشیده می‌شوند؛ نگاه کنید به شکل ۲۹ـ۲۱. رسانندگی اندازه‌گیری‌شده در این منطقه از زمین $2{,}70 \times 10^{-14}\ /\Omega\cdot{\rm m}$ است. کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) سرعت سوق یون، که فرض می‌شود برای یونهای مثبت و منفی یکسان باشد؛ و (ب) چگالی جریان.



شکل ۲۹ـ۲۱ تمرین ۲۴.

۲۵. مس و آلومینیم برای خطوط انتقال نیروی فشار قوی که باید حامل جریانی به شدت ۶۲٫۳ A باشد، در نظر گرفته شده‌اند. مقاومت به‌ازای واحد طول سیم باید ۰٫۱۵۲Ω/km باشد. برای هر کدام از دو مادهٔ احتمالی تشکیل‌دهندهٔ کابل، کمیتهای زیر را محاسبه کنید: (الف) چگالی جریان و (ب) جرم یک متر کابل. چگالی مس و آلومینیم به‌ترتیب برابر است با ۸۹۶۰ و ۲۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب.

۲۶. با استفاده از داده‌های شکل ۲۹ـ۷(ب)، نمودار مقاومت یک دیود پیوند pn را به‌صورت تابعی از اختلاف پتانسیل اعمال‌شده رسم کنید.

۲۷. برای یک قطعه الکترونیکی فرضی، بین اختلاف پتانسیل ΔV اندازه‌گیری‌شده در دو سر قطعه، و جریان i قطعه رابطهٔ $\Delta V = (3{,}55 \times 10^{6}{\rm V/A^2})i^2$ برقرار است. (الف) مقاومت

قطعه را برای وقتی که جریان برابر $2{,}40\ \text{mA}$ است تعیین کنید. (ب) در چه جریانی مقاومت برابر $16{,}0\ \Omega$ است؟

۲۹ـ۵ قانون اهم: دیدگاه میکروسکوپی

۲۸. زمان آزاد میانگین بین برخوردهای الکترونهای رسانش در آلومینیم را در دمای 20°C محاسبه کنید. به‌ازای هر اتم آلومینیم سه الکترون رسانش داریم. داده‌های مورد نیاز را از جدول ۲۹ـ۱ و پیوست د استخراج کنید. همچنین مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳ را ببینید.

۲۹ـ۶ جسم عایق در میدان الکتریکی

۲۹. یک بار نقطه‌ای $1\text{-}\mu\text{C}$ در مرکز یک کرهٔ توپر از جنس شیشهٔ پیرکس به شعاع $R = 10\ \text{cm}$ کاشته شده است. (الف) شدت میدان الکتریکی E را درست در زیر سطح کره محاسبه کنید. (ب) با فرض اینکه هیچ‌گونه بار آزادی وجود نداشته باشد، شدت میدان الکتریکی را درست روی سطح کره محاسبه کنید. (ج) چگالی بار سطحی القایی σ_{ind} روی سطح کره پیرکس چقدر است؟

۳۰. دو بار نقطه‌ای مساوی با علامتهای مخالف $+q$ و $-q$ را در هوا در فاصلهٔ $10\ \text{cm}$ از هم قرار داده‌ایم. چه مقداری از q در نقطهٔ وسط بین این دو بار، یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند که از مقاومت دی‌الکتریکی هوا بیشتر باشد؟

۳۱. یک کرهٔ رسانا به شعاع R در پتانسیل V قرار دارد؛ فرض کنید که در فاصلهٔ بینهایت $V = 0$ است. (الف) کمینهٔ مقدار V را تعیین کنید که میدانی الکتریکی درست روی سطح کره با شدتی بیش از مقاومت دی‌الکتریک هوا ایجاد کند؟ (ب) آیا ساده‌تر است که در یک پتانسیل از یک کره با شعاع بزرگتر ایجاد "جرقه" شود یا یک کره با شعاع کوچکتر؟ (ج) از پاسخ خود در تشریح اینکه چرا میله‌های برقگیر به‌صورت نوک‌تیز در می‌آیند استفاده کنید.

مسئله‌ها

۱. یک کرهٔ رسانای منزوی به شعاع $13\ \text{cm}$ در اختیار داریم، یک سیم، حامل جریانی با شدت $1{,}000020\ \text{A}$ داخل آن است و سیم دیگری جریانی به شدت $1{,}0000000\ \text{A}$ را از آن خارج می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا پتانسیل کره به اندازهٔ $980\ \text{V}$ افزایش یابد؟

۲. در آزمایشگاه پژوهشی همجوشی هسته‌ای فرضی، گاز هلیم با دمای زیاد، به‌طور کامل یونیده می‌شود. هر اتم هلیم به دو الکترون آزاد و هستهٔ دارای بار مثبت (ذرهٔ آلفا) تجزیه می‌شود. اعمال میدان الکتریکی سبب می‌شود که ذره‌های آلفا با سرعت $25\ \text{m/s}$ به طرف شرق کشیده شوند و الکترونها با سرعت $88\ \text{m/s}$ به طرف غرب بروند. چگالی ذرات آلفا $2{,}8 \times 10^{15}\text{cm}^{-3}$ است. چگالی جریان خالص را محاسبه کنید؛ جهت جریان را مشخص کنید.

۳. یک کرم درختی به طول $4{,}0\ \text{cm}$ در جهت سوق الکترون در امتداد یک سیم مسی لخت به قطر $5{,}2\ \text{mm}$ که حامل جریان $12\ \text{A}$ است، می‌خزد. (الف) اختلاف پتانسیل بین دو سر این کرم را مشخص کنید. (ب) آیا دُم این کرم نسبت به سر آن مثبت است یا منفی؟ (ج) چقدر طول می‌کشد تا این کرم مسافت $1{,}0\ \text{cm}$ را بخزد و هنوز با الکترونهای سوق‌یافته در سیم همگام بماند؟

۴. باریکهٔ پایایی از ذرات آلفا ($q = 2e$) با انرژی جنبشی $22{,}4\ \text{MeV}$ حامل جریانی به شدت $250\ \text{nA}$ است. (الف) اگر این باریکه به‌طور عمود به یک سطح تخت بتابد، در مدت زمانی $2{,}90\ \text{s}$ چند ذرهٔ آلفا به سطح تخت برخورد می‌کند؟ (ب) در هر لحظه، چند ذرهٔ آلفا در هر طول $18{,}0\ \text{cm}$ معین، از باریکه وجود دارد؟ (ج) برای اینکه ذرهٔ آلفا از حالت سکون شتاب بگیرد و به انرژی $22{,}4\ \text{MeV}$ برسد چه اختلاف پتانسیلی باید اعمال شود؟

۵. در دو حلقهٔ ذخیره‌سازی متقاطع با محیط $950\ \text{m}$ در آزمایشگاه سیرن (CERN)، پروتونهایی با انرژی جنبشی $28{,}0\ \text{GeV}$ باریکه‌هایی به‌وجود می‌آورند که جریان هر کدام از آنها $30{,}0\ \text{A}$ است. (الف) کل باری را که پروتونهای هر حلقه عمل می‌کنند محاسبه کنید. فرض کنید که پروتونها با سرعتی بسیار نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند. (ب) یک باریکه از داخل حلقهٔ ذخیره‌سازی منحرف می‌شود و با یک قطعهٔ مسی به جرم $43{,}5\ \text{kg}$ برخورد می‌کند. دمای قطعهٔ مسی بر اثر این برخورد چقدر افزایش می‌یابد؟

۶. (الف) چگالی جریان در سطح مقطع یک رسانای استوانه‌ای به شعاع R طبق رابطهٔ زیر تغییر می‌کند

$$j = j_\circ (1 - r/R)$$

که در این رابطه، r فاصلهٔ نقطهٔ مورد مطالعه از محور استوانه است. به این ترتیب چگالی جریان روی محور یعنی به‌ازای $r = 0$ بیشینه و برابر با $j_\circ$ است و به‌طور خطی تا صفر در $r = R$ کاهش می‌یابد. جریان را برای رسانایی با سطح مقطع $A = \pi R^2$ برحسب $j_\circ$ معین کنید. (ب) فرض کنید که، برعکس، چگالی جریان در سطح رسانا دارای بیشترین مقدار $j_\circ$ است و به‌طور خطی کاهش می‌یابد به‌طوری که روی محور صفر است، یعنی

$$j = j_\circ r/R$$

برای این حالت جریان را محاسبه کنید. چرا نتیجهٔ این حالت با نتیجهٔ حالت (الف) تفاوت دارد؟

۷. (الف) در چه دمایی مقاومت یک رسانای مسی دو برابر مقاومت آن در $۲۰^\circ C$ خواهد شد؟ (دمای $۲۰^\circ C$ را به‌عنوان نقطهٔ مرجع در معادلهٔ (۲۹ـ۱۶) اختیار کنید؛ پاسخ به‌دست‌آمده را با شکل ۲۹ـ۸ مقایسه کنید.) (ب) آیا همین دما برای تمام رساناهای مسی، بدون توجه به شکل و اندازهٔ آنها، قابل قبول است؟

۸. جریان و ولتاژ اندازه‌گیری‌شدهٔ لامپ چراغ‌قوهٔ معمولی در شرایط کاری، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $۳۱۰\ mA$ و $۲٫۹۰\ V$. اگر مقاومت رشتهٔ این لامپ وقتی که سرد است $(T_\circ = ۲۰^\circ C)$ برابر با $۱٫۱۲\Omega$ باشد، دمای رشته را وقتی که لامپ روشن است محاسبه کنید. رشته از فلز تنگستن ساخته شده است. فرض کنید که معادلهٔ (۲۹ـ۱۶) در تمام گسترهٔ دماهای مورد نظر معتبر است.

۹. سیمی را که مقاومت آن $۶٫۰\Omega$ است از حدیده‌ای گذرانده‌ایم به‌طوری که طول جدید آن سه برابر طول اولیه‌اش شده است. مقاومت این سیم بلندتر را محاسبه کنید. فرض کنید که مقاومت ویژه و چگالی مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ مقاومت در خلال فرایند کشش تغییر نکند.

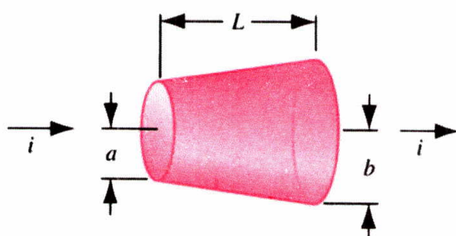
۱۰. مساحت مقطع یک قطعه به شکل مکعب‌مستطیل توپر برابر $۳٫۵۰\ cm^۲$، طول آن $۱۵٫۸\ cm$ و مقاومتش ۹۳۵Ω است. ماده‌ای که این قطعه از آن ساخته شده است دارای $۵٫۳۳ \times ۱۰^{۲۲}$ الکترون رسانش در هر متر مکعب است. اختلاف پتانسیل $۳۵٫۸\ V$ بین دو سر این قطعه برقرار شده است. (الف) جریان را در این قطعه معین کنید. (ب) با فرض آنکه چگالی جریان یکنواخت باشد، مقدار آن چقدر است؟ کمیتهای (ج) سرعت سوق الکترونهای رسانش و (د) میدان الکتریکی در داخل این قطعه را محاسبه کنید.

۱۱. طول میله‌ای از یک فلز مشخص ۱٫۶ متر و قطر آن $۵٫۵\ mm$ است. مقاومت بین دو سر این میله (در دمای $۲۰^\circ C$) $۱٫۰۹ \times ۱۰^{-۳}\Omega$ است. از جنس همین میله، یک قرص گرد به قطر $۲٫۱۴\ cm$ و ضخامت $۱٫۳۵\ mm$ ساخته شده است. (الف) جنس این ماده چیست؟ (ب) مقاومت بین دو سطح دایره‌ای مقابل هم در قرص چقدر است؟ فرض کنید این دو سطح، سطحهای هم‌پتانسیل باشند.

۱۲. وقتی میلهٔ فلزی گرم می‌شود، نه تنها مقاومتش بلکه طول و مساحت مقطع آن نیز تغییر می‌کند. معادلهٔ $R = \rho L/A$ نشان می‌دهد که در اندازه‌گیری ρ در دماهای مختلف باید اثر هر سه عامل را در نظر گرفت. (الف) اگر دما به اندازهٔ $۱٫۰^\circ C$ تغییر کند، برای رسانای مسی، کمیتهای R، L، و A به‌طور نسبی چقدر تغییر می‌کنند؟ (ب) از این تغییرات چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ضریب انبساط طولی را $۱٫۷ \times ۱۰^{-۵}/C^\circ$ در نظر بگیرید.

۱۳. می‌خواهیم یک رسانای استوانه‌ای طویل بسازیم که ضریب دمای مقاومت ویژهٔ آن در دمای $۲۰^\circ C$ نزدیک به صفر باشد. اگر این رسانا را از قرصهای یک در میان آهن و کربن بسازیم، نسبت ضخامت قرص کربنی به قرص آهنی را معین کنید. (برای کربن $\rho = ۳۵۰۰ \times ۱۰^{-۸}\Omega \cdot m$ و $\alpha = -۰٫۵۰ \times ۱۰^{-۳}/C^\circ$.)

۱۴. مقاومتی به شکل یک مخروط قائم ناقص ساخته شده است (شکل ۲۹ـ۲۲). شعاع قاعده‌های این مخروط a و b و ارتفاع آن L است. اگر شیب مخروط کم باشد، می‌توان فرض کرد که چگالی جریان در هر مقطعی از سیم یکنواخت است. (الف) مقاومت این جسم را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید که جواب شما وقتی شیب مخروط صفر شود (یعنی، $a = b$) به‌صورت $\rho L/A$ در می‌آید.



شکل ۲۹ـ۲۲ مسئلهٔ ۱۴.

۱۵. مقاومتی به شکل پوستهٔ کروی است که سطح داخلی آن به شعاع a با یک مادهٔ رسانا اندود و سطح خارجی آن به شعاع b با یک مادهٔ رسانا پوشانده شده است. با فرض اینکه مقاومت ویژهٔ ρ یکنواخت باشد، مقاومت بین دو سطح رسانا را محاسبه کنید.

۱۶. نشان دهید که، بنابر مدل الکترون آزاد برای رسانش الکتریکی در فلزها و فیزیک کلاسیک، مقاومت ویژهٔ فلزها باید متناسب با $\sqrt{T}$ باشد، که در اینجا T دمای مطلق است. (راهنمایی: الکترونها را به‌صورت یک گاز کامل در نظر بگیرید.)

مسئلهٔ کامپیوتری

۱. فرض کنید لامپ روشنایی دارای رشته‌ای از تنگستن است که متناسب با اختلاف دما بین رشته و دمای اتاق انرژی تابش می‌کند. ضریب تناسب در این مورد را C بنامید. برای یک لامپ ۱۲۰ وات که در یک مدار ۱۲۰ ولتی کار می‌کند، C را برآورد کنید. در اینجا فرض کنید که تمام انرژیی که به رشته منتقل می‌شود به‌صورت تابش

گرمایی به محیط انتقال می‌یابد؛ فرض کنید دمای رشته $2500°C$ است. (الف) به‌صورت عددی نموداری را ایجاد کنید که دمای تعادل لامپ را به‌صورت تابعی از اختلاف پتانسیل اعمال‌شده نشان دهد. در اینجا به‌خاطر داشته باشید که مقاومت ویژهٔ تنگستن با دما تغییر می‌کند. (ب) در چه ولتاژی باید لامپ "بسوزد"؟ (راهنمایی: رشته وقتی ذوب می‌شود که خیلی داغ شود.) (ج) سلسله مراحل بالا را دوباره تکرار کنید، ولی با این تفاوت که اکنون فرض می‌کنیم انرژی از لامپ بنابر عبارت $\kappa(T^4 - T_0^4)$ تابش می‌شود، که در اینجا k ثابتی است که باید معین کنید، T_0 دمای اتاق برحسب کلوین، و T دمای رشته برحسب کلوین است. پاسخهایتان را مقایسه کنید.

۳۰

ظرفیت

در بسیاری از کاربردهای مدارهای الکتریکی، هدف ذخیره‌سازی بار یا انرژی الکتریکی در میدان الکتروستاتیکی است. وسیله یا قطعه‌ای که بار الکتریکی را ذخیره می‌کند خازن نامیده می‌شود، و خاصیتی که مشخص می‌کند این قطعه چه مقدار بار می‌تواند ذخیره کند ظرفیت آن است. خواهیم دید که ظرفیت به خواص هندسی قطعه بستگی دارد و نه به میدان الکتریکی یا پتانسیل.

در این فصل ظرفیت را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه ظرفیت چند قطعهٔ ساده و مجموعه‌ای از خازنها را محاسبه کنیم. انرژی ذخیره‌شده در خازنها را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه این انرژی با شدت میدان الکتریکی بستگی پیدا می‌کند. سرانجام، افزایش توانایی ذخیره‌سازی بار الکتریکی را، که از حضور یک مادهٔ دی‌الکتریک در خازن سرچشمه می‌گیرد، مورد بررسی و پژوهش قرار می‌دهیم.

۳۰ـ۱ خازنها

خازن* وسیله‌ای است که انرژی را در میدان الکتروستاتیکی ذخیره می‌کند. مثلاً، یک لامپ فلاش، نیاز به فورانی از انرژی الکتریکی دارد که بیش از آن است که باتری معمولاً می‌تواند تأمین کند. می‌توان انرژی را به آرامی (در محدودهٔ چند ثانیه‌ای) از باتری کشید و در یک خازن ریخت که به‌سرعت (در چند میلی‌ثانیه) انرژی را از طریق لامپ آزاد کند. در خازنهای بسیار بزرگ برای فراهم‌آوردن تپهای لیزری (کوتاه‌مدت) قوی جهت ایجاد همجوشی گرماهسته‌ای در ساچمه‌های ریز هیدروژن استفاده می‌شود. در این حالت سطح توان به حدود 10^{14} وات می‌رسد، که تقریباً ۲۰۰ برابر کل توان تولید انرژی ایالات متحده است. اما این عملیات فقط 10^{-9} ثانیه ادامه می‌یابد.

همچنین از خازنها برای ایجاد میدانهای الکتریکی استفاده می‌شود، مانند قطعهٔ با صفحه‌های موازی که میدان الکتریکی تقریباً یکنواختی را ایجاد می‌کند که سبب انحراف باریکهٔ الکترونی در لامپ تصویر تلویزیون یا نوسان‌نما می‌شود.

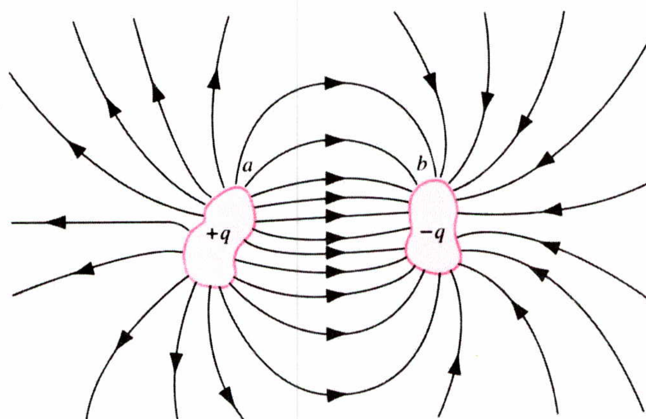
در مدارها، اغلب از خازنها به‌منظور هموارکردن تغییرات ناگهانی ولتاژ شبکه، که می‌تواند به حافظهٔ کامپیوترها آسیب برساند استفاده می‌شود. درکاربرد دیگر، کوک و تنظیم کردن گیرندهٔ رادیویی یا تلویزیونی، معمولاً با تغییر دادن ظرفیت مدار انجام می‌شود.

* به مقالهٔ زیر رجوع کنید:

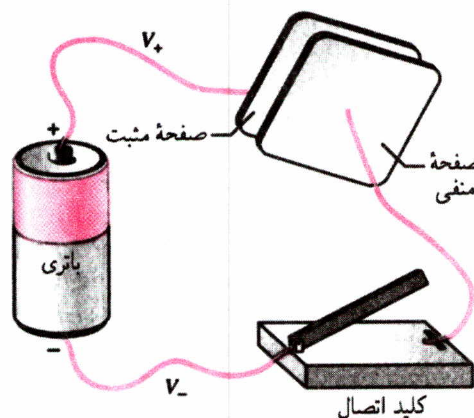
"Capacitors", by Donald M. Trotter. Jr., *Scientific Ameri-cam.* July 1988. p. 86.

۳۰ـ۲ ظرفیت

در شکل ۳۰ـ۱ یک خازن را در حالت کلی نشان داده‌ایم. که از دو رسانای a و b با شکلهایی دلخواه به‌وجود آمده است. این رساناها را



شکل ۳۰ـ۱ دو رسانا، که از محیط اطرافشان و از همدیگر منزوی شده‌اند، یک خازن به‌وجود می‌آورند. وقتی خازن پر شود، رساناها حامل بارهای مساوی با علامتهای مخالف به مقدار q هستند. دو رسانا را بدون توجه به شکل آنها، صفحه می‌نامیم.

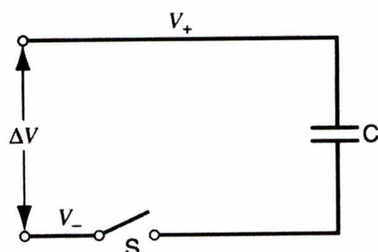


شکل ۳۰ـ۲ وقتی کلید اتصال بسته می‌شود، باتری با جابه‌جا کردن الکترونها از صفحهٔ مثبت به صفحهٔ منفی، خازن را پر یا باردار می‌کند.

بدون توجه به شکل آن صفحه‌های خازن می‌خوانیم. فرض می‌کنیم که این صفحه‌ها به‌طور کامل از محیط اطرافشان منزوی شده باشند. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که این رساناها در خلأ قرار دارند.

وقتی می‌گوییم خازن باردار است که صفحه‌های آن حامل بارهای مساوی با علامت مخالف $+q$ و $-q$ باشد. توجه کنید که q بار خالص روی خازن نیست. بار خالص خازن صفر است. در مبحث مطالعهٔ خازنها، q را قدرمطلق بار روی هر یک از دو صفحه در نظر می‌گیریم؛ یعنی q فقط نشان‌دهندهٔ اندازه است و علامت بار روی هر صفحه باید مشخص شود.

خازن را می‌توان با اتصال دو صفحهٔ آن به دو قطب یک باتری، "پر" یا "باردار" کرد، که این عمل در شکل ۳۰ـ۲ نشان داده شده است. در فصل بعد نشان خواهیم داد که شارش بار در مدار الکتریکی



شکل ۳۰ـ۳ نمودار شمایی مدار هم‌ارز شکل ۳۰ـ۲، که خازن C، کلید اتصال S، و اختلاف پتانسیل ثابت ΔV را نشان می‌دهد (در این شکل باتری که اختلاف پتانسیل ثابت ΔV را تأمین می‌کند نشان نداده‌ایم).

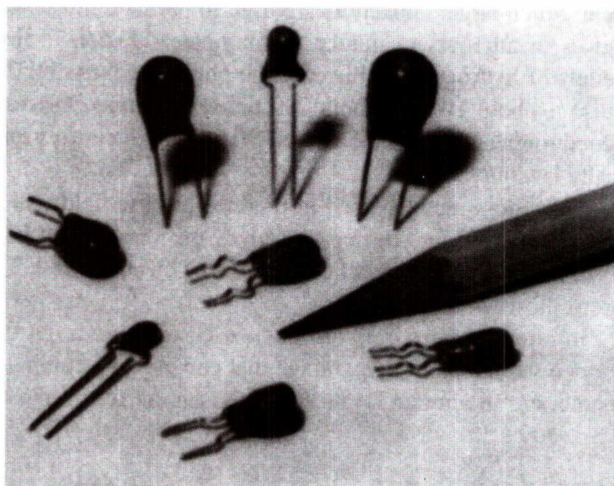
شبیه شارش شاره است، و باتری نقش "پمپ" یا "تلمبهٔ" بار الکتریکی را به‌عهده دارد. وقتی باتری را (با بستن کلیدی که در مدار وجود دارد) به خازن وصل می‌کنیم، الکترونها را از صفحهٔ (قبلاً بدون بار الکتریکی خالص) مثبت خازن "تلمبه" می‌کند و به صفحهٔ منفی می‌رساند. پس از آنکه باتری باری به اندازهٔ q را جابه‌جا کرد، بار روی صفحهٔ مثبت برابر $+q$ و بار روی صفحهٔ منفی $-q$ است.

باتری آرمانی باتریی است که اختلاف پتانسیل ثابتی را بین دو قطبش حفظ کند. صفحهٔ مثبت و سیمی که به پایانهٔ مثبت باتری متصل می‌شود رسانا هستند، و در نتیجه (در شرایط الکتروستاتیکی) باید همان پتانسیل V_+ پایانهٔ مثبت باتری را داشته باشند. صفحهٔ منفی و سیمی که این صفحه را به پایانهٔ منفی متصل می‌کند رسانا هستند، و بنابراین (وقتی کلید اتصال بسته می‌شود) باید همان پتانسیل V_- پایانهٔ منفی باتری را داشته باشند. اختلاف پتانسیل $\Delta V = V_+ - V_-$ بین دو قطب باتری همان اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن است وقتی که کلید اتصال بسته می‌شود. معمولاً این اختلاف پتانسیل را به‌عنوان اختلاف پتانسیل "خازن" توصیف می‌کنیم، به این معنی که اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن است.

در شکل ۳۰ـ۳ مدار باردارکردن یک خازن را توسط باتریی که اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta V = V_+ - V_-$ بین قطبهای آن برقرار است نشان داده‌ایم. در این شکل خازن را با نماد ⊣⊢ نمایش داده‌ایم، که در اینجا دوخط موازی نشانگر صفحات خازن است.

وقتی خازن را باردار می‌کنیم، درمی‌یابیم که بار q روی صفحات خازن همواره با اختلاف پتانسیل ΔV بین صفحات نسبت مستقیم دارد: $q \propto \Delta V$. ظرفیت C ضریب تناسب مورد نیاز برای تبدیل این ارتباط به یک معادله است

$$q = C\Delta V \qquad (۳۰\text{ـ}۱)$$



شکل ۳۰ـ۴ برخی از انواع خازنها که در مدارهای الکترونیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ظرفیت یک عامل هندسی است که به اندازه، شکل، و فاصلهٔ بین صفحات و ماده‌ای که فضای بین صفحات را اشغال می‌کند (که فعلاً فرض می‌کنیم خلأ باشد) بستگی دارد. ظرفیت خازن به ΔV یا q بستگی ندارد.

یکای SI ظرفیت خازن که از معادلهٔ (۳۰ـ۱) به‌دست می‌آید کولن بر ولت است. که به آن نام فاراد داده شده است (با علامت اختصاری F):

$$\text{۱ کولن بر ولت} = \text{۱ فاراد}$$

این یکا به افتخار مایکل فاراده که علاوه برکارهای دیگر مفهوم ظرفیت را مطرح کرد، نامگذاری شده است. اجزای فاراد (مضربهای کوچکتر)، میکروفاراد ($1\mu F = 10^{-6} F$) و پیکوفاراد ($1\,pF = 10^{-12} F$) در عمل یکاهای مناسب‌تری هستند. در شکل ۳۰ـ۴ بعضی از انواع خازنها درگسترهٔ میکروفاراد را نشان داده‌ایم که در تجهیزات الکترونیکی یا کامپیوتری مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۱ ظرفیت یک خازن انبارشی در تراشهٔ حافظه دستیابی کاتوره‌ای (RAM) برابر $0{,}055\,pF$ است. اگر این خازن تا $5{,}3\,V$ پر شود. چند الکترون اضافی روی صفحهٔ منفی آن وجود خواهد داشت؟

حل. اگر صفحهٔ منفی خازن حاوی N الکترون اضافی باشد. این صفحه حامل بار خالصی به مقدار $q = Ne$ است. با استفاده از معادلهٔ (۳۰ـ۱)، داریم

$$N = \frac{q}{e} = \frac{C\Delta V}{e} = \frac{(0{,}055 \times 10^{-12} F)(5{,}3\,V)}{1{,}60 \times 10^{-19} C}$$

$$= 1{,}8 \times 10^{6} \text{ الکترون}$$

در مورد الکترون، این تعداد بسیارکمی است. یک ذرهٔ بسیارکوچک گردوغبارکه هرگز آرام نمی‌گیرد و ماندگار نمی‌شود، حاوی حدود 10^{17} الکترون (و همان تعداد پروتون) است.

شباهت با جریان شاره (اختیاری)

در مواردی که مدارهای الکتریکی را مطالعه می‌کنیم، اغلب مقایسهٔ حرکت بارهای الکتریکی و حرکت ذرات مادی که جریان شاره را به‌وجود می‌آورند، بسیار سودمند است. در مورد خازن، می‌توان خازنی را که حامل بار q است با ظرفیت صلبی به حجم v (که در اینجا برای حجم از حرف v استفاده می‌کنیم و نه از V تا آن را با اختلاف پتانسیل اشتباه نکنیم) مقایسه کرد که حاوی n مول از یک گازکامل است. در دمای ثابت، فشارگاز p با توجه به قانون گازکامل (معادلهٔ ۲۱ـ۱۳) با تعداد n نسبت مستقیم دارد:

$$n = \left(\frac{v}{RT}\right) p$$

و برای خازن داریم (معادلهٔ ۳۰ـ۱)

$$q = C\Delta V$$

مقایسه نشان می‌دهد که ظرفیت C خازن مانند حجم v ظرف است، با این فرض که دمای گاز ثابت باشد. در واقع واژهٔ "خازن" واژهٔ "ظرفیت" یا گنجایش را تداعی می‌کند، درست همان‌طور که حجم یک ظرف گاز دارای "ظرفیت" یا گنجایش معینی است.

می‌توان با اعمال فشار بیشترگاز بیشتری را در یک ظرف جا داد، درست به همان صورتی که می‌توان با اعمال ولتاژ بالاتر بار بیشتری را به خازن منتقل کرد. توجه داشته باشید، که تا یک حد معین، می‌توان هر مقدار دلخواه بار را روی خازن و هر مقدار گاز را در یک ظرف قرار داد. این حدود با فروریزش الکتریکی ("جرقه‌زنی") در خازن یا گسستگی دیواره در ظرف متناظرند.

۳۰ـ۳ محاسبهٔ ظرفیت

در اینجا می‌خواهیم ظرفیت خازنی را که شکل هندسی آن معلوم است محاسبه کنیم. این کار را با دنبال کردن سلسله مراحل زیر انجام می‌دهیم. (۱) ابتدا میدان الکتریکی را در ناحیهٔ بین صفحه‌های خازن، با استفاده از روشهایی مشابه آنچه در بخش ۲۶ـ۴ توصیف شد معین می‌کنیم. (۲) سپس با استفاده از معادلهٔ (۲۸ـ۱۵) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های مثبت و منفی را تعیین می‌کنیم. این کار را با انتگرال‌گیری میدان الکتریکی در امتداد هر مسیر مناسبی که دو صفحه را به‌هم ارتباط می‌دهد انجام می‌دهیم:

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_+^- \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} \quad (۳۰\text{ـ}۲)$$

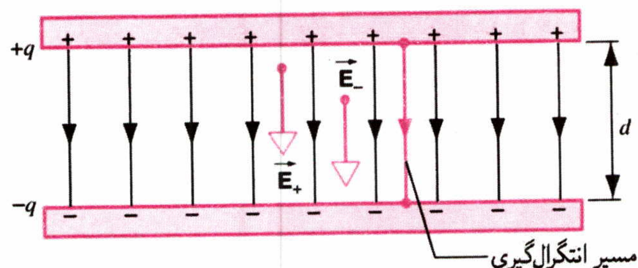
(۳) حاصل معادلهٔ (۳۰ـ۲) در طرف راست این معادله، شامل مقدار بار الکتریکی q خواهد بود. آنگاه، با استفاده از معادلهٔ (۳۰ـ۱) می‌توانیم ظرفیت خازن را معین کنیم، یعنی داریم $C = q/\Delta V$.

همان‌گونه که اختلاف پتانسیل را تعریف کردیم، ΔV یک عدد مثبت است. چون q یک مقدار مطلق است، ظرفیت C همواره مثبت خواهد بود.

اکنون این روش را با ارائه چند مثال تشریح می‌کنیم.

خازن با صفحه‌های موازی

در شکل ۳۰ـ۵ خازنی را نشان داده‌ایم که در آن دو صفحهٔ تخت خازن بسیار بزرگ و بسیار نزدیک به‌هم قرار گرفته‌اند، یعنی فاصلهٔ d بین دو صفحه بسیار کوچکتر از طول یا عرض آنهاست. در این‌صورت می‌توانیم از آثار "چتری‌شدن" میدان الکتریکی در نزدیکی لبهٔ صفحه‌ها چشم‌پوشی کنیم و فرض کنیم که میدان الکتریکی در سرتاسر حجم خازن در فضای بین دو صفحه دارای مقدار و جهت ثابت و یکسان است.



شکل ۳۰ـ۵ خازن با صفحه‌های موازی. در این شکل مسیر انتگرال‌گیری برای محاسبهٔ معادلهٔ (۳۰ـ۴) را نشان داده‌ایم.

در بخش ۲۶ـ۴ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص یکنواخت باردارشده را در نقطه‌های نزدیک به مرکز قرص به‌دست آوردیم؛ $E = \sigma/2\epsilon_0$. اگر دو صفحهٔ خازن بسیار بزرگ باشند، شکل آنها دیگر اهمیتی ندارد، و می‌توانیم فرض کنیم که میدان الکتریکی ناشی از هر یک از دو صفحه دارای چنین مقداری است. میدان الکتریکی برایند برابر است با حاصل‌جمع میدانهای ناشی از این دو صفحه: $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_-$. همان‌طور که در شکل ۳۰ـ۵ نشان داده‌ایم، میدانهای ناشی از صفحه‌های مثبت و منفی دارای یک جهت هستند، به‌طوری که می‌توانیم بنویسیم

$$E = E_+ + E_- = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0 \quad (۳۰\text{ـ}۳)$$

با بهره‌گیری از رابطهٔ $\sigma = q/A$، که در اینجا A مساحت رویهٔ هرکدام از دو صفحه است، و جایگزین‌کردن معادلهٔ (۳۰ـ۳) در معادلهٔ (۳۰ـ۲) می‌رسیم به

$$\Delta V = \int_+^- E\, ds = \frac{q}{\epsilon_0 A}\int_+^- ds = \frac{qd}{\epsilon_0 A} \quad (۳۰\text{ـ}۴)$$

که در اینجا مسیر انتگرال‌گیری را در امتداد یکی از خطهای میدان الکتریکی اختیار کردیم، به‌طوری که $\vec{\mathbf{E}}$ و $d\vec{\mathbf{s}}$ با هم موازی‌اند (شکل ۳۰ـ۵ را ببینید).

سپس ظرفیت خازن از معادلهٔ (۳۰ـ۱) به‌دست می‌آید: $C = q/\Delta V$، یا

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{(خازن با صفحه‌های موازی)} \quad (۳۰\text{ـ}۵)$$

از این معادله می‌توانیم ببینیم که چرا ظرفیت خازن به عاملهای هندسی وابسته است، که اینجا این عاملها عبارت‌اند از فاصلهٔ بین دو صفحه، d، و مساحت رویه، A. ظرفیت خازن به اختلاف پتانسیل بین دو صفحه یا مقدار باری که روی هر یک از دو صفحه قرار دارد، وابسته نیست.

توجه کنید که طرف راست معادلهٔ (۳۰ـ۵) به‌صورت حاصلضرب ϵ_0 در کمیتی با بعد طول (A/d) است. درخواهیم یافت که تمام عبارتهای مربوط به ظرفیت اساساً دارای چنین مشکلی هستند، که این رفتار مبین آن است که می‌توانیم یکای مربوط به ϵ_0 را به‌صورت ظرفیت تقسیم بر طول بیان کنیم:

$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m} = 8{,}85\,\mathrm{pF/m}$$

این یکا اغلب در محاسبه‌های مربوط به ظرفیت مفیدتر از یکای قبلی (و هم‌ارز) آن یعنی $\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ است.

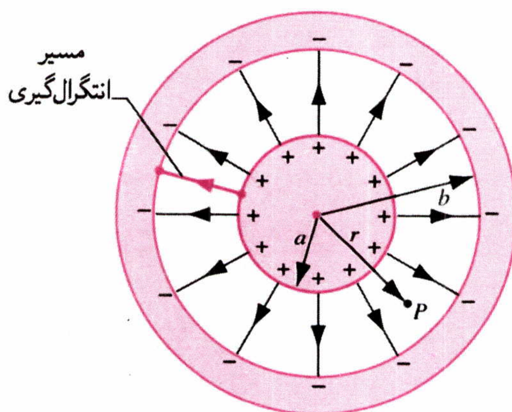
خازن کروی

شکل ۳۰ـ۶ مقطع یک خازن کروی را نشان می‌دهد، که در آن رسانای داخلی یک کرهٔ توپر با شعاع a است، و رسانای خارجی یک پوستهٔ کروی توخالی با شعاع داخلی b است. فرض می‌کنیم که کرهٔ داخلی حامل بار الکتریکی $+q$ است و کرهٔ خارجی حامل بار $-q$. از تجزیه و تحلیل رساناها با استفاده از قانون گاؤس (بخش ۲۷ـ۶ را ببینید)، می‌دانیم که بار موجود در رسانای داخلی روی سطح آن قرار می‌گیرد و بار موجود در رسانای خارجی روی سطح داخلی آن مستقر می‌شود. (یک سطح گاؤسی کروی، با شعاعی اندکی بیشتر از b، رسم کنید؛ این سطح به‌طور کامل در داخل رسانای خارجی قرار می‌گیرد، در نتیجه در همه جا روی این سطح $E = ۰$ است و شاری که از این سطح می‌گذرد نیز برابر صفر است. بنابراین، این سطح هیچ بار خالصی را در برنمی‌گیرد، که این موضوع در شکل ۳۰ـ۶ نیز نشان داده شده است.)

در ناحیهٔ $a < r < b$، می‌توانیم از قانون گاؤس استفاده کنیم و نشان دهیم که، در ناحیهٔ بین دو رسانا، میدان الکتریکی فقط به بار الکتریکی موجود در کرهٔ داخلی بستگی دارد و اینکه این میدان مانند میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای است که در مرکز کره قرار گرفته باشد (قضیه‌های مربوط به پوسته را که در بخش ۲۷ـ۵ مورد بحث و بررسی قرار دادیم به خاطر بیاورید). بنابراین، داریم

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{r^۲} \qquad a < r < b \qquad (۳۰\text{ـ}۶)$$

از جانشانی این عبارت برای میدان الکتریکی در معادلهٔ (۳۰ـ۲) و انجام انتگرال‌گیری در امتداد مسیر نشان داده‌شده در شکل ۳۰ـ۶ از



شکل ۳۰ـ۶ سطح مقطع یک خازن کروی یا استوانه‌ای. میدان الکتریکی در هر نقطه‌ای مانند P در فضای بین دو سطح فقط ناشی از بار روی رسانای داخلی است. مسیر انتگرال‌گیری برای محاسبهٔ معادلهٔ (۳۰ـ۷) یا (۳۰ـ۱۰) را نشان داده‌ایم.

صفحهٔ مثبت خازن تا صفحهٔ منفی خازن، می‌رسیم به

$$\Delta V = \int_+^- E\,ds = \int_a^b \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{dr}{r^۲} = \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right)$$

$$= \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{b-a}{ab} \qquad (۳۰\text{ـ}۷)$$

چون مسیر انتگرال‌گیری در امتداد شعاع است، داریم $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = E\,ds$ و نیز $ds = dr$.

با استفاده از معادلهٔ $C = q/\Delta V$، اکنون نتیجه می‌گیریم که

$$C = ۴\pi\epsilon_۰\frac{ab}{b-a} \qquad \text{(خازن کروی)} \qquad (۳۰\text{ـ}۸)$$

توجه کنید که در اینجا، باز هم ظرفیت به‌صورت حاصلضرب $\epsilon_۰$ در کمیتی با بعد طول است.

خازن استوانه‌ای

شکل ۳۰ـ۶، همچنین نمایشگر سطح مقطع یک خازن استوانه‌ای است. که در آن رسانای داخلی یک میلهٔ توپر به شعاع a و حامل بار $+q$ است که به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است، و رسانای خارجی یک پوستهٔ استوانه‌ای هم‌محور با آن، با شعاع داخلی b است که حامل بار یکنواخت توزیع‌شدهٔ $-q$ روی سطح آن است. طول این خازن برابر با L است و فرض می‌کنیم که $L \gg b$ است به‌طوری که، مانند خازن با صفحه‌های موازی، می‌توانیم از آثار "چتری‌شدن" میدان الکتریکی در دو سر خازن چشم‌پوشی کنیم.

درست به همان صورت که از قانون گاؤس برای به‌دست‌آوردن قضیهٔ دو پوسته در ساختار کروی استفاده کردیم، می‌توانیم نتیجه‌های مشابهی را برای ساختار استوانه‌ای به‌دست آوریم. اگر فقط رسانای یکنواخت باردارشدهٔ استوانه‌ای‌شکل خارجی وجود داشت، می‌توانستیم یک سطح گاؤسی استوانه‌ای طویل با شعاع $r < b$ در نظر بگیریم که هم‌محور با رسانای خارجی باشد. این سطح گاؤسی هیچ بار خالصی را در برنمی‌گیرد، بنابراین می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که روی سطح گاؤسی همه جا $E = ۰$ است. مانند حالت مربوط به پوستهٔ کروی، یک پوستهٔ یکنواخت باردارشدهٔ استوانه‌ای هیچ‌گونه میدان الکتریکی در داخل خود به‌وجود نمی‌آورد. با استفاده از یک سطح گاؤسی استوانه‌ای با شعاع $r > a$، می‌توانیم چنین نتیجه‌گیری کنیم که استوانهٔ داخلی درست مانند یک توزیع بار یکنواخت خطی عمل می‌کند، که میدان به‌طور شعاعی از محور به سمت خارج است که مقدارش را در بخش ۲۶ـ۴

(معادلهٔ ۲۶ـ۱۷) محاسبه کردیم:

$$E = \frac{۱}{۲\pi\epsilon_۰}\frac{q}{Lr} \qquad a < r < b \qquad (۹\text{ـ}۳۰)$$

که در این معادله چگالی بار خطی λ را با q/L جایگزین کرده‌ایم و فاصلهٔ y را با مختصهٔ شعاعی r. اکنون معادلهٔ (۳۰ـ۲) نتیجه می‌دهد:

$$\Delta V = \int_{+}^{-} E\, ds = \frac{q}{۲\pi\epsilon_۰ L}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{q}{۲\pi\epsilon_۰ L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (۱۰\text{ـ}۳۰)$$

درست مانند خازن کروی، مسیر انتگرال‌گیری را از صفحهٔ مثبت تا صفحهٔ منفی خازن در راستای شعاعی انتخاب کرده‌ایم، به‌طوری که $\vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = E\,ds$ و $ds = dr$ است.

اکنون می‌توانیم از معادلهٔ (۳۰ـ۱) ظرفیت این خازن را معین کنیم:

$$C = ۲\pi\epsilon_۰\frac{L}{\ln(b/a)} \qquad \text{(خازن استوانه‌ای)} \qquad (۱۱\text{ـ}۳۰)$$

توجه کنید که باز هم در این معادله فقط عاملهای هندسی حضور دارند و نیز اینکه ظرفیت دارای شکل حاصلضرب $\epsilon_۰$ در کمیتی است که از نظر ابعادی دارای بعد طول است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۲ فاصلهٔ بین صفحه‌ها در یک خازن با صفحه‌های موازی $d = ۱٫۰\ \text{mm}$ است. اگر بخواهیم ظرفیت این خازن برابر $۱٫۰\ \text{F}$ باشد، مساحت صفحه‌های آن باید چقدر باشد؟

حل. از معادلهٔ (۳۰ـ۵) داریم

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_۰} = \frac{(۱٫۰\ \text{F})(۱٫۰ \times ۱۰^{-۳}\text{m})}{۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F/m}} = ۱٫۱ \times ۱۰^{۸}\text{m}^۲$$

این مقدار مساحت مربعی است که طول هر ضلع آن بیش از ۱۰ km است. بنابراین فاراد یکای واقعاً بزرگی است. با این همه، فناوری جدید، امکان ساخت خازنهایی با ظرفیت یک فاراد، با ابعاد نسبتاً متعارف، را فراهم آورده است. این "ابرخازنها" به‌عنوان منبعهای ولتاژ پشتیبان در کامپیوترها به‌کار می‌روند؛ این منبعها می‌توانند، در صورت قطع برق، حافظهٔ کامپیوتر را برای مدت ۳۰ روز حفظ کنند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۳ فضای بین رساناهای یک کابل هم‌محور طویل که برای انتقال سیگنالهای تلویزیونی مورد استفاده قرار می‌گیرد، دارای شعاع داخلی $a = ۰٫۱۵\ \text{mm}$ و شعاع خارجی $b = ۲٫۱\ \text{mm}$ است. ظرفیت این کابل به‌ازای واحد طول چقدر است؟

حل. از معادلهٔ (۳۰ـ۱۱) داریم

$$\frac{C}{L} = \frac{۲\pi\epsilon_۰}{\ln(b/a)} = \frac{(۲\pi)(۸٫۸۵\ \text{pF/m})}{\ln(۲٫۱\ \text{mm}/۰٫۱۵\ \text{mm})} = ۲۱\ \text{pF/m}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۴ اگر زمین را کرهٔ رسانایی منزوی با شعاع $R = ۶۳۷۰\ \text{km}$ در نظر بگیریم، ظرفیت آن چقدر می‌شود؟

حل. می‌توانیم به یک کرهٔ منزوی رسانای منفرد با فرض اینکه "صفحهٔ نایافته یا گمشدهٔ" آن کرهٔ رسانایی با شعاع بینهایت باشد، ظرفیتی نسبت دهیم.

اگر فرض کنیم که در معادلهٔ (۳۰ـ۸)، داریم $b \to \infty$ و R را به‌جای a جایگزین کنیم، می‌رسیم به

$$C = ۴\pi\epsilon_۰ R \qquad \text{(کرهٔ منزوی)} \qquad (۱۲\text{ـ}۳۰)$$

از جانشانی مقدارهای عددی، می‌رسیم به

$$C = (۴\pi)(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F/m})(۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}\text{m})$$
$$= ۷٫۱ \times ۱۰^{-۴}\text{F} = ۷۱۰\,\mu\text{F}$$

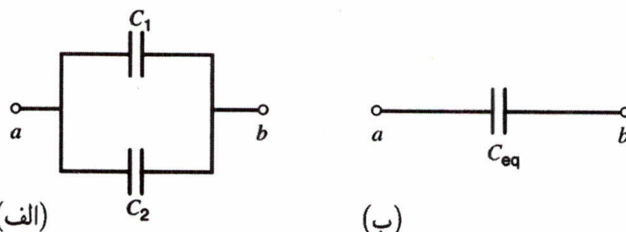
ظرفیت یک ابرخازن بسیار کوچک ۱ فاراده در حدود ۱۴۰۰ برابر ظرفیت زمین است.

۳۰ـ۴ خازنهای سری و موازی

در بررسی مدارهای الکتریکی، اغلب علاقه‌مندیم که ظرفیت معادل دو یا چند خازن را که به‌صورتی مشخص به‌هم متصل شده‌اند بدانیم. منظورمان از "ظرفیت معادل" ظرفیت تک‌خازنی است که بتواند در مدار، جایگزین آن مجموعه شود بدون اینکه هیچ‌گونه تغییری در عملکرد بقیه مدار به‌وجود آید.

اتصال خازنها به‌صورت موازی

در شکل ۳۰ـ۷(الف) دو خازن را که به‌طور موازی به‌هم بسته شده‌اند، نشان داده‌ایم. اتصال موازی اجزای مدار دارای سه ویژگی است. (۱) برای رفتن از a به b، می‌توان هر کدام از چند مسیر (در این مورد دو



شکل ۳۰ـ۷ (الف) دو خازن در اتصال موازی. (ب) خازن معادلی که می‌توان آن را در مدار با مجموعهٔ موازی جایگزین کرد.

مسیر) موازی را انتخاب کرد، که هر کدام از این مسیرها فقط از یکی از اجزای موازی عبور می‌کند. (۲) وقتی یک باتری با اختلاف پتانسیل ΔV به دو سر مجموعه وصل شود (یعنی، در شکل ۳۰ـ۷(الف)، یکی از پایانه‌های باتری به نقطهٔ a و پایانهٔ دیگری به نقطهٔ b متصل شوند) اختلاف پتانسیل ΔV در دو سر هر یک از اجزای موازی برقرار می‌شود. سیمها و صفحه‌های خازنها رسانا بوده و بنابراین در شرایط الکتروستاتیکی سطحهای هم‌پتانسیل‌اند. پتانسیل در a در سیمهای رابط متصل به a و دو صفحهٔ سمت چپ خازنها پدیدار می‌شود؛ همین‌طور پتانسیل در b در سیمهای رابط متصل به b و دو صفحهٔ سمت راست خازنها پدید می‌آید. (۳) کل باری که توسط باتری به مجموعهٔ خازنها حمل می‌شود، بین اجزای مدار تقسیم می‌شود؛ بخشی از بار "پمپ‌شده" توسط باتری در C_1 قرار می‌گیرد و بخش دیگر در C_2 مستقر می‌شود.

با درنظرگرفتن این اصول، اکنون می‌توانیم ظرفیت خازن معادل C_{eq} را پیدا کنیم که همان ظرفیت کل بین نقاط a و b را به‌دست می‌دهد. این موضوع را در شکل ۳۰ـ۷(ب) نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم که یک باتری با اختلاف پتانسیل ΔV بین نقطه‌های a و b متصل شده است. برای هر یک از خازنها، (با استفاده از معادلهٔ ۳۰ـ۱) می‌توانیم بنویسیم

$$q_1 = C_1\Delta V \quad \text{و} \quad q_2 = C_2\Delta V \qquad (۳۰\text{ـ}۱۳)$$

در نوشتن این معادله‌ها، اختلاف پتانسیل بین دو سر خازنها را، با توجه به ویژگی دوم مربوط به اتصالهای موازی که قبلاً به آن اشاره کردیم، مساوی گرفته‌ایم. باتری بار q را از یک طرف مدار استخراج و به طرف دیگر منتقل می‌کند. این بار، با توجه به ویژگی سوم، بین دو جزء اتصال موازی تقسیم می‌شود، یعنی مجموع بارهای روی دو خازن برابر بار کل است:

$$q = q_1 + q_2 \qquad (۳۰\text{ـ}۱۴)$$

اگر به‌جای مجموعهٔ موازی، تک‌خازن C_{eq} را بگذاریم و آن را به همان باتری متصل کنیم، شرط اینکه مدار عملکرد یکسانی داشته باشد ایجاب می‌کند که باتری همان مقدار بار، یعنی q، را منتقل کند. یعنی، برای خازن معادل داریم

$$q = C_{eq}\Delta V \qquad (۳۰\text{ـ}۱۵)$$

با جایگزین‌کردن معادلهٔ (۳۰ـ۱۴) در معادلهٔ (۳۰ـ۱۵) و سپس قرار دادن معادله‌های (۳۰ـ۱۳) در نتیجهٔ آن معادله، می‌رسیم به

$$C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$

یا

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \qquad (۳۰\text{ـ}۱۶)$$

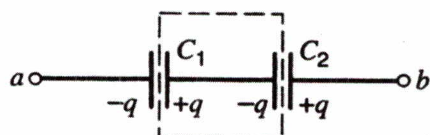
اگر بیشتر از دو خازن موازی داشته باشیم، می‌توانیم ابتدا C_1 و C_2 را با معادل آنها یعنی خازن C_{12} که از معادلهٔ (۳۰ـ۱۶) به‌دست می‌آید جایگزین کنیم. سپس ظرفیت معادل خازن C_{12} و خازن بعدی یعنی C_3 را پیدا کنیم. با ادامهٔ این فرایند می‌توان معادلهٔ (۳۰ـ۱۶) را به هر تعداد از خازنهای موازی تعمیم داد:

$$C_{eq} = \sum_n C_n \quad \text{(اتصال موازی)} \qquad (۳۰\text{ـ}۱۷)$$

یعنی، برای اینکه ظرفیت معادل مجموعه‌ای از خازنهای متصل موازی را پیدا کنیم، کافی است که ظرفیت تک‌تک خازنها را با هم جمع کنیم. توجه کنید که ظرفیت معادل همواره از بیشترین ظرفیت در مجموعهٔ موازی بزرگتر است. مجموعهٔ موازی بیشتر از تک‌تک خازنها بار ذخیره می‌کند.

اتصال خازنها به‌صورت سری

در شکل ۳۰ـ۸ دو خازن را نشان داده‌ایم که به‌صورت سری به‌هم بسته شده‌اند. اتصال سری اجزای مدار با سه ویژگی مشخص می‌شود. (۱) اگر بخواهیم از a به b برویم، باید پشت سر هم از تمام اجزای مدار عبور کنیم. (۲) وقتی یک باتری به دو سر مجموعه متصل می‌شود. اختلاف



شکل ۳۰ـ۸ اتصال سری دو خازن.

پتانسیل ΔV دو سر باتری برابر است با مجموع اختلاف پتانسیلهای دو سر هر یک از اجزایی که در مسیر قرار گرفته است. (۳) بار q که به هرکدام از اجزای مجموعهٔ سری تحویل می‌شود یکسان است.

برای درک ویژگی اخیر، ناحیه‌ای را که در شکل ۳۰ـ۸ با خط‌چین محصور شده است در نظر بگیرید. فرض کنید که باتری بار $-q$ را به صفحهٔ سمت چپ C_1 بدهد. چون در خازن بارهای مساوی و با علامت مخالف روی صفحه‌ها قرار می‌گیرند، بار $+q$ روی صفحهٔ سمت راست C_1 ظاهر می‌شود. ولی رسانای به شکل H که با خط‌چین محصور شده است از نظر الکتریکی از سایر قسمتهای مدار جداست؛ این بخش در آغاز حامل هیچ بار خالصی نیست و هیچ باری را هم نمی‌توان به آن منتقل کرد. اگر بار $+q$ روی صفحهٔ سمت راست خازن C_1 پدیدار شود، آنگاه باید بار $-q$ روی صفحهٔ سمت چپ خازن C_2 پدید آید. یعنی، n (مساوی q/e) الکترون از صفحهٔ سمت راست خازن C_1 به صفحهٔ سمت چپ خازن C_2 می‌رود. اگر بیش از دو خازن به‌طور متوالی به‌هم متصل شوند، می‌توان همین استدلال را در تمام طول زنجیرهٔ خازنها به‌کار برد و نتیجه گرفت که صفحهٔ سمت چپ همهٔ خازنهایی که به‌طور سری متصل شده‌اند حامل بار q با یک علامت و صفحهٔ سمت راست همهٔ خازنهایی که به‌طور سری بسته شده‌اند حامل بار مساوی q با علامت مخالف هستند.

با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳۰ـ۱)، برای هر یک از خازنهای منفرد می‌توان نوشت

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{و} \quad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2} \tag{۳۰ـ۱۸}$$

همهٔ خازنها دارای بار مساوی q هستند ولی اختلاف پتانسیل آنها متفاوت است. بنابر ویژگی دوم اتصال سری، داریم

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \tag{۳۰ـ۱۹}$$

در اینجا در جستجوی ظرفیت معادل C_{eq} هستیم که بتواند جانشین مجموعهٔ خازنهای سری بشود، به‌طوری که باتری همان مقدار بار را روی آن جابه‌جا کند:

$$\Delta V = \frac{q}{C_{\text{eq}}} \tag{۳۰ـ۲۰}$$

با قرار دادن معادلهٔ (۳۰ـ۱۹) در معادلهٔ (۳۰ـ۲۰) و بهره‌گیری از معادلات (۳۰ـ۱۸)، می‌رسیم به

$$\frac{q}{C_{\text{eq}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

یا

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{۳۰ـ۲۱}$$

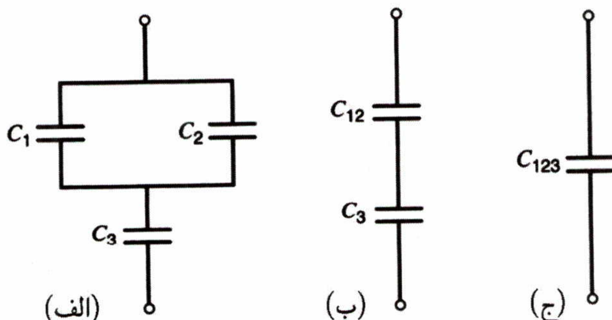
اگر چندین خازن داشته باشیم که به‌صورت سری به‌هم بسته شده باشد، می‌توانیم با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳۰ـ۲۱) ظرفیت معادل دو خازن اول را پیدا کنیم و آن را با C_{12} نشان دهیم. سپس ظرفیت معادل خازن C_{12} و خازن بعدی در اتصال سری، یعنی C_3 را محاسبه می‌کنیم. با ادامهٔ این روش، می‌توان ظرفیت معادل هر تعداد خازن را که به‌صورت سری متصل شده باشند محاسبه کرد

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \quad \text{(اتصال سری یا متوالی)} \tag{۳۰ـ۲۲}$$

یعنی، برای یافتن ظرفیت معادل مربوط به یک مجموعه از خازنها که به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند، عکس مجموع وارون همهٔ ظرفیتها را به‌دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که ظرفیت معادل مجموعهٔ سری همواره از کمترین ظرفیت خازن موجود در مجموعه کمتر است.

گاهی، خازنها طوری به‌هم متصل می‌شوند که بلافاصله نمی‌توان گفت که مجموعه سری یا موازی است. چنانکه در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۵ نشان داده‌ایم، اغلب این ترکیبها را می‌توان به اجزای کوچکتری تقسیم و هر بخش را به‌طور جداگانه از نظر سری یا موازی بودن اتصالها بررسی کرد. البته این عمل تجزیه و تحلیل مدار همواره امکان‌پذیر نیست.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۵ (الف) ظرفیت معادل مجموعهٔ خازنهای نشان داده‌شده در شکل ۳۰ـ۹(الف) را معین کنید. فرض کنید $C_1 = 12{,}0\,\mu\text{F}$، $C_2 = 5{,}3\,\mu\text{F}$، و $C_3 = 4{,}5\,\mu\text{F}$ است. (ب)



شکل ۳۰ـ۹ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۵. (الف) یک مجموعهٔ متشکل از سه خازن. (ب) ترکیب اتصال موازی C_1 و C_2 را با معادل آنها، یعنی C_{12} جایگزین کرده‌ایم. (ج) ترکیب اتصال سری C_{12} و C_3 را با معادلشان یعنی C_{123} جایگزین کرده‌ایم.

اختلاف پتانسیل $\Delta V = ۱۲٫۵\,\mathrm{V}$ را به پایانه‌های شکل ۳۰ـ۹(الف) برقرار می‌کنیم. بار روی خازن $C_۱$ چقدر است؟

حل. (الف) خازنهای $C_۱$ و $C_۲$ موازی‌اند. از معادلهٔ (۳۰ـ۱۶) ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ = ۱۲٫۰\mu\mathrm{F} + ۵٫۳\mu\mathrm{F} = ۱۷٫۳\mu\mathrm{F}$$

در شکل ۳۰ـ۹(ب)، خازنهای موازی $C_۱$ و $C_۲$ با ظرفیت معادلشان، یعنی $C_{۱۲}$ جایگزین شده‌اند. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، خازنهای $C_{۱۲}$ و $C_۳$ به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند. از معادلهٔ (۳۰ـ۲۱)، ظرفیت معادل نهایی این مجموعه (شکل ۳۰ـ۹(ج) را ببینید) چنین به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{C_{۱۲۳}} = \frac{۱}{C_{۱۲}} + \frac{۱}{C_۳} = \frac{۱}{۱۷٫۳\mu\mathrm{F}} + \frac{۱}{۴٫۵\mu\mathrm{F}} = ۰٫۲۸۰\,\mu\mathrm{F}^{-۱}$$

یا

$$C_{۱۲۳} = \frac{۱}{۰٫۲۸۰\,\mu\mathrm{F}^{-۱}} = ۳٫۵۷\mu\mathrm{F}$$

(ب) با خازنهای معادل $C_{۱۲}$ و $C_{۱۲۳}$ دقیقاً همان‌گونه برخورد می‌کنیم که با خازنهای واقعی با همان ظرفیت. بار روی خازن $C_{۱۲۳}$ در شکل ۳۰ـ۹(ج) برابر است با

$$q_{۱۲۳} = C_{۱۲۳}\Delta V = (۳٫۵۷\mu\mathrm{F})(۱۲٫۵\,\mathrm{V}) = ۴۴٫۶\mu\mathrm{C}$$

این مقدار بار روی هرکدام از خازنهای اتصال سری شکل ۳۰ـ۹(ب) قرار دارد. اختلاف پتانسیل بین دو سر خازن $C_{۱۲}$ در آن شکل برابر است با

$$\Delta V_{۱۲} = \frac{q_{۱۲}}{C_{۱۲}} = \frac{۴۴٫۶\mu\mathrm{C}}{۱۷٫۳\mu\mathrm{F}} = ۲٫۵۸\,\mathrm{V}$$

همین اختلاف پتانسیل در دو سر خازن $C_۱$ در شکل ۳۰ـ۹(الف) ظاهر می‌شود به‌طوری که

$$q_۱ = C_۱\Delta V_۱ = (۱۲\mu\mathrm{F})(۲٫۵۸\,\mathrm{V}) = ۳۱\mu\mathrm{C}$$

۳۰ـ۵ ذخیرهٔ انرژی در میدان الکتریکی

یکی از کاربردهای مهم خازنها ذخیرهٔ انرژی الکتروستاتیکی است که موارد استفادهٔ گسترده‌ای از فلاش عکاسی تا سیستمهای لیزری دارد (شکل ۳۰ـ۱۰ را ببینید)، که عملکرد هر دوی آنها به پر و خالی‌شدن خازنها وابسته است.



شکل ۳۰ـ۱۰ توده‌ای متشکل از ۱۰۰۰۰ خازن در آزمایشگاه ملی لارنس لیورمور مقدار ۶۰ MJ انرژی ذخیره می‌کند و آن را در مدت یک هزارم ثانیه به لامپهای چشمک‌زنی می‌دهد که مجموعه‌ای از لیزرها را به راه می‌اندازد. نصب این خازنها بخشی از طرح "نُوا" است، که هدف آن تولید واکنشهای همجوشی خودنگه‌دار است.

در بخش ۲۸ـ۲ نشان دادیم که هر ترکیبی از بارهای الکتریکی دارای انرژی پتانسیل الکتریکی U، برابر با کار W است (که ممکن است مثبت یا منفی باشد) که یک عامل خارجی برای ایجاد این ترکیب از تک‌تک اجزایش، که فرض می‌شود در آغاز از یکدیگر بسیار دور و ساکن بوده‌اند، انجام داده است. این انرژی پتانسیل مانند انرژی پتانسیل سیستمهای مکانیکی، چون فنر فشرده (متراکم) یا مجموعهٔ زمین‌ـ‌ماه است.

به‌عنوان یک مثال ساده، وقتی دو بار مساوی و با علامت مخالف را از هم دور می‌کنیم کار انجام می‌دهیم. این انرژی به‌صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در سیستم ذخیره می‌شود و اگر بگذاریم که بارها دوباره به‌هم نزدیک شوند، می‌توانیم آن را به‌صورت انرژی جنبشی بازیافت کنیم. همین‌طور، خازن باردار دارای انرژی پتانسیل الکتریکی U است که برابر با کار W است که عامل خارجی برای پر کردن آن انجام داده است. اگر امکان تخلیهٔ خازن را فراهم آوریم، می‌توانیم این انرژی را بازپس بگیریم. همچنین می‌توانیم عمل باردار کردن خازن

را با این تصور که یک عامل خارجی الکترونها را از صفحهٔ مثبت برمی‌دارد و آن را در صفحهٔ منفی می‌نشاند و به این وسیله بین بارها فاصله ایجاد می‌کند، مجسم کنیم. معمولاً، عمل پرکردن خازن را باتری انجام می‌دهد که از انرژی شیمیایی ذخیره‌شدهٔ خود برای انجام این کار هزینه می‌کند.

فرض کنید در زمان t بار q' از یک صفحه به صفحهٔ دیگر منتقل شده باشد. در آن زمان اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها $\Delta V'$ است که برابر $\Delta V' = q'/C$ است. حال اگر بار dq' جابه‌جا شود، تغییر مختصر dU را در انرژی پتانسیل الکتریکی به‌وجود می‌آورد که بنابر معادلهٔ (۲۸ـ۹) ($\Delta V = \Delta U/q_\circ$) برابر است با

$$dU = \Delta V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

اگر این فرایند ادامه یابد تا بار کل q جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل کل برابر خواهد شد با

$$U = \int dU = \int_\circ^q \frac{q'}{C} dq' \qquad (۳۰\text{ـ}۲۳)$$

یا

$$U = \frac{q^۲}{۲C} \qquad (۳۰\text{ـ}۲۴)$$

با استفاده از رابطهٔ $q = C\Delta V$ می‌توان رابطه بالا را به‌صورت زیر نیز نوشت

$$U = \frac{۱}{۲} C(\Delta V)^۲ \qquad (۳۰\text{ـ}۲۵)$$

این انرژی در کجا مستقر می‌شود؟ معادله‌های (۳۰ـ۲۴) و (۳۰ـ۲۵) پاسخ مستقیم و سرراستی به ما نمی‌دهند، ولی با استدلال زیر می‌توانیم موقعیت انرژی ذخیره‌شده را مشخص کنیم. فرض کنید که یک خازن با صفحه‌های موازی منزوی در اختیار داریم (یعنی، این خازن به یک باتری متصل نشده است) که حامل بار q است. بدون اینکه q را تغییر دهیم، صفحه‌های این خازن را از هم دور می‌کنیم تا فاصلهٔ بین آنها دو برابر فاصلهٔ اولیه بشود. بنابر معادلهٔ (۳۰ـ۵)، اگر فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن، یعنی d، دو برابر بشود، ظرفیتش نصف می‌شود. معادلهٔ (۳۰ـ۲۴) نشان می‌دهد که اگر ظرفیت خازن، یعنی C، نصف شود، انرژی ذخیره‌شده در آن دو برابر می‌شود. حالا، به هنگام دور کردن صفحه‌های خازن از یکدیگر، خود صفحه‌ها را تغییر ندادیم، بنابراین منطقی نیست که چنین نتیجه‌گیری کنیم که انرژی اضافی در آنجا ذخیره شده است. کاری که انجام دادیم آن بوده است که حجم فضای بین دو صفحه را دو برابر کرده‌ایم و، چون انرژی نیز دو برابر شده است، به نظر منطقی می‌آید که چنین نتیجه‌گیری کنیم که این انرژی پتانسیل الکتریکی در حجم بین دو صفحهٔ خازن استقرار می‌یابد. به‌طور مشخص‌تر، انرژی در میدان الکتریکی موجود در این ناحیه ذخیره شده است.

در یک خازن با صفحه‌های موازی، با نادیده‌گرفتن حاشیه‌دارشدن میدان در لبه‌ها، میدان الکتریکی در تمام نقاط بین دو صفحه یکسان است. پیامد استدلالمان دال بر اینکه انرژی در میدان مستقر می‌شود، چنین است که چگالی انرژی u، که مشخص‌کنندهٔ میزان انرژی ذخیره‌شده در واحد حجم است، نیز باید در همه جا در فاصلهٔ بین دو صفحه یکسان باشد؛ u، چگالی انرژی، از خارج‌قسمت انرژی ذخیره‌شدهٔ کل بر حجم Ad به‌دست می‌آید، یعنی

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{۱}{۲}C(\Delta V)^۲}{Ad} \qquad (۳۰\text{ـ}۲۶)$$

با جانشانی $C = \epsilon_\circ A/d$ (معادلهٔ ۳۰ـ۵) می‌رسیم به

$$u = \frac{\epsilon_\circ}{۲}\left(\frac{\Delta V}{d}\right)^۲ \qquad (۳۰\text{ـ}۲۷)$$

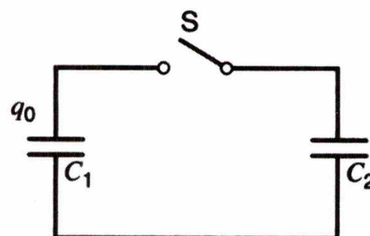
ولی، می‌دانیم که $\Delta V/d$ همان میدان الکتریکی E است، در نتیجه

$$u = \frac{۱}{۲}\epsilon_\circ E^۲ \qquad (۳۰\text{ـ}۲۸)$$

با آنکه این معادله را برای مورد خاص با صفحه‌های موازی به‌دست آوردیم، این نتیجه برای همهٔ موارد صحیح است. اگر در هر نقطه‌ای از فضای تهی (در خلأ)، میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ وجود داشته باشد، می‌توانیم آن نقطه را محل ذخیرهٔ انرژی در نظر بگیریم که انرژی ذخیره‌شده در آن به‌ازای واحد حجم برابر $(۱/۲)\epsilon_\circ E^۲$ است.

به‌طور کلی، E برحسب مکان تغییر می‌کند، و در نتیجه u تابع مختصات است. برای مورد خاص خازن با صفحه‌های موازی، E و u در فضای بین صفحه‌های خازن برحسب مکان تغییر نمی‌کنند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۶ خازن $C_۱$ با ظرفیت $۳{,}۵۵\mu\text{F}$ را با یک باتری با اختلاف پتانسیل $\Delta V_\circ = ۶{,}۳۰\ \text{V}$ پر کرده‌ایم. سپس باتری را برداشته و به‌جای آن مطابق شکل ۳۰ـ۱۱ خازن خالی $C_۱$ را با ظرفیت $۸{,}۹۵\mu\text{F}$ قرار داده‌ایم. وقتی کلید S را ببندیم، بار از $C_۱$ به $C_۲$ جریان می‌یابد تا وضعیت تعادل برقرار شود و دو خازن به اختلاف پتانسیل یکسان ΔV برسند. (الف) این اختلاف پتانسیل مشترک کدام است؟



شکل ۳۰ـ۱۱ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۶. خازن $C_۱$ قبلاً به‌وسیلهٔ یک باتری با اختلاف پتانسیل $\Delta V_۰$ پُر شده است. وقتی کلید S بسته می‌شود، بار اولیهٔ $q_۰$ بین دو خازن $C_۱$ و $C_۲$ تقسیم می‌شود.

(ب) انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی قبل و بعد از آنکه کلیدی در شکل ۳۰ـ۱۱ بسته شود، چقدر است؟

حل. (الف) بار الکتریکی باید پایسته بماند، در نتیجه بار حالت اولیه، یعنی $q_۰$، باید بین دو خازن تقسیم شود، یا

$$q_۰ = q_۱ + q_۲$$

با بهره‌گیری از رابطهٔ $q = C\Delta V$ در مورد هر یک از جمله‌های معادلهٔ بالا، داریم

$$C_۱\Delta V_۰ = C_۱\Delta V + C_۲\Delta V$$

یا

$$\Delta V = \Delta V_۰\frac{C_۱}{C_۱+C_۲} = \frac{(۶٫۳۰\,\mathrm{V})(۳٫۵۵\mu\mathrm{F})}{۳٫۵۵\mu\mathrm{F}+۸٫۹۵\mu\mathrm{F}} = ۱٫۷۹\,\mathrm{V}$$

اگر ولتاژ باتری یعنی $\Delta V_۰$ و ظرفیت خازن $C_۱$ را بدانیم، با استفاده از مداری مانند مدار شکل ۳۰ـ۱۱ و اندازه‌گیری ولتاژ ΔV می‌توانیم ظرفیت خازن مجهول $C_۲$ را تعیین کنیم.

(ب) انرژی ذخیرهٔ اولیه برابر است با

$$U_\mathrm{i} = \frac{۱}{۲}C_۱(\Delta V_۰)^۲ = \frac{۱}{۲}(۳٫۵۵\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{F})(۶٫۳۰\,\mathrm{V})^۲$$
$$= ۷٫۰۵\times ۱۰^{-۵}\mathrm{J} = ۷۰٫۵\mu\mathrm{J}$$

انرژی ذخیره‌شدهٔ نهایی برابر است با

$$U_\mathrm{f} = \frac{۱}{۲}C_۱(\Delta V)^۲ + \frac{۱}{۲}C_۲(\Delta V)^۲ = \frac{۱}{۲}(C_۱+C_۲)(\Delta V)^۲$$
$$= \frac{۱}{۲}(۳٫۵۵\times ۱۰^{-۶}\mathrm{F} + ۸٫۹۵\times ۱۰^{-۶}\mathrm{F})(۱٫۷۹\,\mathrm{V})^۲$$
$$= ۲٫۰۰\times ۱۰^{-۵}\mathrm{J} = ۲۰٫۰\mu\mathrm{J}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $U_\mathrm{f} < U_\mathrm{i}$ و در واقع U_f فقط در حدود ۷۲٪ مقدار U_i است. البته این به معنای نقض پایستگی انرژی نیست. انرژی "گمشده" در این فرایند به‌صورت انرژی گرمایی در سیمهای رابط ظاهر می‌شود، که آن را در فصل بعد بررسی می‌کنیم.*

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۷ یک کرهٔ رسانای منزوی به شعاع $R = ۶٫۸۵\,\mathrm{cm}$ حامل بار $q = ۱٫۲۵\,\mathrm{nC}$ است. (الف) چقدر انرژی در میدان الکتریکی مربوط به این کرهٔ باردار ذخیره شده است؟ (ب) چگالی انرژی در سطح کره چقدر است؟ (ج) شعاع سطح کروی فرضی $R_۰$ که نصف انرژی پتانسیل ذخیره‌شده در داخل آن قرار می‌گیرد چقدر است؟

حل. (الف) از معادله‌های (۳۰ـ۲۴) و (۳۰ـ۱۲) داریم

$$U = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{q^۲}{۸\pi\epsilon_۰ R}$$
$$= \frac{(۱٫۲۵\times ۱۰^{-۹}\mathrm{C})^۲}{(۸\pi)(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{F/m})(۰٫۰۶۸۵\,\mathrm{m})}$$
$$= ۱٫۰۳\times ۱۰^{-۷}\mathrm{J} = ۱۰۳\,\mathrm{nJ}$$

(ب) برای اینکه چگالی انرژی را مشخص کنیم، ابتدا باید میدان الکتریکی E را روی سطح کره تعیین کنیم. میدان روی سطح کره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{q}{R^۲}$$

بنابراین، چگالی انرژی با استفاده از معادلهٔ (۳۰ـ۲۸)، در این ناحیه چنین است

$$u = \frac{۱}{۲}\epsilon_۰ E^۲ = \frac{q^۲}{۳۲\pi^۲\epsilon_۰ R^۴}$$
$$= \frac{(۱٫۲۵\times ۱۰^{-۹}\mathrm{C})^۲}{(۳۲\pi^۲)(۸٫۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C}^۲/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^۲)(۰٫۰۶۸۵\,\mathrm{cm})^۴}$$
$$= ۲٫۵۴\times ۱۰^{-۵}\mathrm{J/m}^۳ = ۲۵٫۴\mu\mathrm{J/m}^۳$$

(ج) انرژیی که در یک پوستهٔ کروی بین شعاعهای r و $r + dr$ قرار

* اندکی از انرژی گمشده به‌صورت انرژی تابشی گسیل می‌شود. برای بحث مفصل و جدی این موضوع مقالهٔ زیر را ببینید:
"Two-Capacitor Problem: A More Realistic View," by R. A. Powell, *American Journal of Physics*, May 1979, p. 460.

می‌گیرد، برابر است با

$$dU = (u)(۴\pi r^{۲})(dr)$$

که در اینجا $(۴\pi r^{۲})(dr)$ حجم پوستهٔ کروی است. با بهره‌گیری از نتیجهٔ قسمت (ب) در مورد چگالی انرژی محاسبه‌شده در شعاع r، داریم

$$dU = \frac{q^{۲}}{۳۲\pi^{۲}\epsilon_{\circ} r^{۴}} ۴\pi r^{۲} dr = \frac{q^{۲}}{۸\pi\epsilon_{\circ}} \frac{dr}{r^{۲}}$$

شرایط ارائه‌شده در این مسئله عبارت است از

$$\int_{R}^{R_{\circ}} dU = \frac{۱}{۲}\int_{R}^{\infty} dU$$

یا با استفاده از نتیجهٔ به‌دست‌آمده برای dU و حذف عاملهای ثابت از دو طرف معادله، داریم

$$\int_{R}^{R_{\circ}} \frac{dr}{r^{۲}} = \frac{۱}{۲}\int_{R}^{\infty} \frac{dr}{r^{۲}}$$

که به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{۱}{R} - \frac{۱}{R_{\circ}} = \frac{۱}{۲R}$$

که از حل این معادله برای $R_{\circ}$ می‌رسیم به

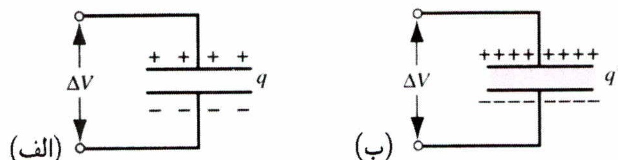
$$R_{\circ} = ۲R = (۲)(۶٫۸۵\,\text{cm}) = ۱۳٫۷\,\text{cm}$$

و به این ترتیب نیمی از انرژی ذخیره‌شده، در داخل یک سطح کروی با شعاعی معادل دو برابر شعاع کرهٔ رسانا قرارگرفته است.

۳۰ـ۶ خازن دارای دی‌الکتریک

در بخش۲۹ـ۶ تأثیر اعمال میدان الکتریکی را به مادهٔ عایق (دی‌الکتریک) مورد مطالعه قرار دادیم. نشان دادیم که وجود دی‌الکتریک سبب کاهش شدت میدان الکتریکی در داخل دی‌الکتریک می‌شود و میدان از مقدار اولیهٔ $E_{\circ}$ در خلأ به $E = E_{\circ}/\kappa_{\text{e}}$ در داخل دی‌الکتریک کاهش می‌یابد. مقدار پارامتر κ_{e}، یا ثابت دی‌الکتریکی برای تمام مواد بیشتر از یک است، به‌طوری که میدان الکتریکی در داخل دی‌الکتریک از میدان در خلأ کمتر است.

در این بخش، تأثیر پرکردن فضای داخلی خازن را با مادهٔ



شکل ۳۰ـ۱۲ (الف) یک خازن خالی از مادهٔ دی‌الکتریکی با اتصال به باتریی که اختلاف پتانسیل ΔV را برقرار می‌کند پر می‌شود. (ب) در حالی‌که فضای بین صفحه‌های خازن به‌وسیلهٔ یک مادهٔ دی‌الکتریک پر می‌شود همچنان متصل به باتری باقی می‌ماند. در این مورد، اختلاف پتانسیل ΔV ثابت می‌ماند، ولی بار الکتریکی q افزایش می‌یابد.

دی‌الکتریک مورد بررسی قرار می‌دهیم. این موضوع اولین بار در سال ۱۸۳۷ توسط مایکل فاراده مورد مطالعه و تحقیق قرارگرفت. فاراده دو خازن دقیقاً یکسان ساخت، یکی از آنها را با یک مادهٔ دی‌الکتریک پر کرد و دیگری را خالی نگه داشت. وقتی این خازنها را به باتریهایی با اختلاف پتانسیل یکسان متصل کرد، دریافت که خازن حاوی مادهٔ دی‌الکتریک دارای بار بیشتری از خازن پرشده از هواست. یعنی وجود دی‌الکتریک سبب می‌شود که خازن بار بیشتری را انباشته و ذخیره کند. چون ذخیرهٔ بار الکتریکی برای تخلیه در زمانهای بعدتر، یکی از مقاصد بهره‌برداری از خازنهاست، وجود دی‌الکتریک می‌تواند عملکرد خازن را به‌گونه‌ای چشمگیر بهبود بخشد.

اثر پرکردن خازن به‌وسیلهٔ یک مادهٔ دی‌الکتریک بستگی دارد به اینکه این کار را وقتی که خازن به باتری متصل است (مانند آزمایش فاراده) انجام دهیم یا وقتی که قطع است. ابتدا مورد مربوط به آزمایش فاراده را بررسی می‌کنیم (شکل ۳۰ـ۱۲). خازنی با ظرفیت C را به یک باتری با اختلاف پتانسیل ΔV وصل می‌کنیم و اجازه می‌دهیم که به‌طور کامل پر شود، به‌طوری که صفحه‌های آن، مطابق شکل ۳۰ـ۱۲(الف)، حامل بار q باشند. وقتی که خازن همچنان به باتری متصل است داخل آن را با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریکی κ_{e}، مطابق شکل ۳۰ـ۱۲(ب)، پر می‌کنیم. باتری همان اختلاف پتانسیل ΔV را در دو صفحهٔ خازن حفظ می‌کند.

معادلهٔ (۳۰ـ۲) نشان می‌دهد که، اگر اختلاف پتانسیلهای شکلهای ۳۰ـ۱۲(الف) و ۳۰ـ۱۲(ب) یکسان باشد، آنگاه میدانهای الکتریکی در داخل خازنها باید یکسان باشد. با این همه، انتظار داریم که حضور دی‌الکتریک در داخل خازن سبب کاهش شدت میدان الکتریکی بشود. همان‌گونه که فاراده استدلال کرد، تمایل مادهٔ دی‌الکتریک به کاهش شدت میدان الکتریکی دقیقاً با بار اضافی که باتری روی صفحات می‌گذارد (البته همزمان با داخل‌کردن مادهٔ دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌ها) موازنه و جبران می‌شود.

فرض کنید که از یک خازن با صفحه‌های موازی استفاده می‌کنیم. وقتی فضای بین صفحه‌های خازن خالی از مادهٔ دی‌الکتریک است، میدان الکتریکی با معادلهٔ (۳۰ـ۳) مشخص می‌شود: $E = \sigma/\epsilon_\circ = q/\epsilon_\circ A$. وقتی که بین صفحه‌ها یک مادهٔ دی‌الکتریک وجود داشته باشد، میدان الکتریکی با یک ضریب $1/\kappa_e$ کاهش می‌یابد که ناشی از حضور مادهٔ دی‌الکتریک است، ولی میدان نیز تغییر می‌کند چون بار الکتریکی موجود روی صفحه‌ها به q' تغییر یافته است، به‌طوری که در این حالت میدان برابر $E' = q'/\kappa_e\epsilon_\circ A$ است. چون میدانها باید با هم برابر باشد، می‌توانیم بنویسیم $E' = E$ و نتیجه بگیریم که

$$q' = \kappa_e q \qquad (۳۰\text{ـ}۲۹)$$

ثابت دی‌الکتریکی بیشتر از یک است، به‌طوری که می‌توانیم مقدار بیشتری بار در یک خازن دارای مادهٔ دی‌الکتریک انباشته کنیم تا یک خازن تهی از مادهٔ دی‌الکتریک. وقتی مادهٔ دی‌الکتریک را وارد یک خازن پر از بار الکتریکی می‌کنیم، باتری بار بیشتری، معادل $q' - q = q(\kappa_e - 1)$، از صفحهٔ منفی به صفحهٔ مثبت جابه‌جا می‌کند.

ظرفیت خازن در صورت وجود مادهٔ دی‌الکتریک در آن چنین است: $C' = q'\Delta V'$. با استفاده از تساویها $q' = \kappa_e q$ و $\Delta V' = \Delta V$، می‌رسیم به

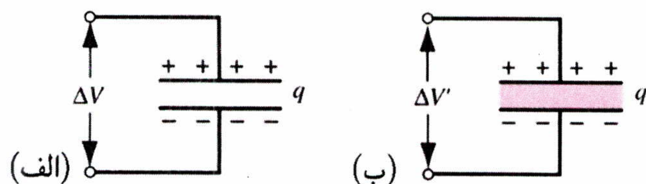
$$C' = \kappa_e C \qquad (۳۰\text{ـ}۳۰)$$

وجود دی‌الکتریک سبب افزایش ظرفیت خازن با ضریب κ_e می‌شود. برای خازن با صفحه‌های موازی حاوی مادهٔ دی‌الکتریک، می‌توان ظرفیت را با ترکیب معادله‌های (۳۰ـ۵) و (۳۰ـ۳۰) به‌دست آورد:

$$C' = \frac{\kappa_e \epsilon_\circ A}{d} \qquad (۳۰\text{ـ}۳۱)$$

ظرفیت هر خازنی که فضای بین صفحه‌های آن به‌طور کامل با مادهٔ دی‌الکتریک پر شود با مضرب یکسان κ_e افزایش پیدا می‌کند. معادله‌های (۳۰ـ۸) و (۳۰ـ۱۱) را می‌توان به‌صورتی مشابه برای درنظرگرفتن تأثیر وجود مادهٔ دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌های خازن تصحیح کرد.

اگر مادهٔ دی‌الکتریکی را وقتی خازن به باتری وصل نیست وارد فضای بین صفحات آن کنیم، بر ظرفیت خازن تأثیر یکسانی خواهد داشت، ولی استخراج روابط آن بسیار متفاوت است. ابتدا خازن را به باتری وصل می‌کنیم، تا اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن



شکل ۳۰ـ۱۳ (الف) خازن تهی از مادهٔ دی‌الکتریک به‌وسیلهٔ باتری پر می‌شود و سپس اتصال باتری قطع می‌شود. (ب) اکنون خازن را با مادهٔ دی‌الکتریک پر می‌کنیم. بار روی صفحه‌های خازن ثابت می‌ماند، ولی اختلاف پتانسیل از ΔV به $\Delta V'$ کاهش می‌یابد.

به ΔV برسد و بار آنها برابر q شود، سپس باتری را قطع می‌کنیم (شکل ۳۰ـ۱۳(الف)). اکنون فضای بین صفحه‌های خازن را با مادهٔ دی‌الکتریک پر می‌کنیم (شکل ۳۰ـ۱۳(ب))، در این حالت، بار روی صفحه‌ها باید ثابت بماند. زیرا دیگر باتریی وجود ندارد که بار را از یک صفحه به صفحهٔ دیگر منتقل کند. وقتی بار ثابت بماند، میدان الکتریکی فقط به دلیل وجود مادهٔ دی‌الکتریک تغییر می‌کند، به‌طوری که $E' = E/\kappa_e$. با استفاده از این میدان الکتریکی در معادلهٔ (۳۰ـ۲)، برای یافتن اختلاف پتانسیل، می‌رسیم به $\Delta V' = \Delta V/\kappa_e$. یعنی در این حالت، اختلاف پتانسیل با مضرب $1/\kappa_e$ کاهش پیدا می‌کند. با توجه به اینکه $\Delta V' = q'/C'$ و $q' = q$ است، یک‌بار دیگر به این نتیجه می‌رسیم که $C' = \kappa_e C$، که همان نتیجهٔ به‌دست‌آمده در معادلهٔ (۳۰ـ۳۰) است. ظرفیت خازن به‌نحوهٔ باردار کردن آن یا انباشتن فضای بین صفحه‌های آن با مادهٔ دی‌الکتریک بستگی ندارد، ظرفیت خازن فقط به ساختار هندسی آن و جنس ماده‌ای که با آن پر می‌شود وابسته است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۸ اختلاف پتانسیل $\Delta V = ۱۲٫۵\ \mathrm{V}$ را بین دو صفحهٔ یک خازن با صفحه‌های موازی که ظرفیت آن $۱۳٫۵\ \mathrm{pF}$ است برقرار کرده‌ایم. حال باتری پرکنندهٔ خازن را قطع می‌کنیم و یک تیغهٔ چینی ($\kappa_e = ۶٫۵$) را مطابق شکل ۳۰ـ۱۳(ب)، بین صفحاتش وارد می‌کنیم. انرژی ذخیره‌شده در این خازن، قبل و بعد از قرار دادن تیغهٔ دی‌الکتریک در آن، چقدر است؟

حل. انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیه در این خازن از معادلهٔ (۳۰ـ۲۵) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{۱}{۲}C\Delta V^۲ = \frac{۱}{۲}(۱۳٫۵ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{F})(۱۲٫۵\ \mathrm{V})^۲ \\ &= ۱٫۰۵۵ \times ۱۰^{-۹}\mathrm{J} = ۱۰۵۵\mathrm{pJ} \end{aligned}$$

می‌توانیم انرژی نهایی را از معادلهٔ (۳۰ـ۲۴) به‌صورت $U_\text{f} = q^۲/۲C'$ بنویسیم چون، بنابر شرایط بیان‌شدهٔ مسئله پس از وارد کردن تیغهٔ چینی در فاصلهٔ بین صفحات خازن، q (ولی نه ΔV) ثابت می‌ماند. پس از قرارگرفتن تیغهٔ چینی در فضای بین صفحه‌های خازن، ظرفیت آن افزایش پیدا می‌کند و به مقدار $C' = \kappa_\text{e} C$ می‌رسد، به‌طوری که

$$U_\text{f} = \frac{q^۲}{۲\kappa_\text{e} C} = \frac{U_\text{i}}{\kappa_\text{e}} = \frac{۱۰۵۵\,\text{pJ}}{۶٫۵} = ۱۶۲\,\text{pJ}$$

وقتی تیغه بین صفحات قرار گرفت انرژی ذخیره‌شده در خازن با ضریب $۱/\kappa_\text{e}$ کاهش می‌یابد.

انرژی "گمشده"، اصولاً، برای شخصی که تیغه را بین صفحه‌ها وارد می‌کند آشکار است. خازن به تیغه نیرو وارد می‌کند و به این ترتیب روی آن کار انجام می‌دهد. مقدار این کار برابر است با

$$W = U_\text{i} - U_\text{f} = ۱۰۵۵\,\text{pJ} - ۱۶۲\,\text{pJ} = ۸۹۳\,\text{pJ}$$

اگر تیغه بدون هیچ مقاومتی وارد فضای خازن می‌شد و اگر هیچ اصطکاکی وجود نداشت، تیغه بین صفحه‌های خازن نوسان می‌کرد و به داخل و خارج می‌رفت. سیستم متشکل از خازن + تیغه دارای انرژی ثابت $۱۰۵۵\,\text{pJ}$ است؛ که این انرژی بین انرژی جنبشی تیغهٔ متحرک و انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی در نوسان است. وقتی تیغهٔ نوسان‌کننده فضای بین صفحه‌های خازن را پُر می‌کند، انرژی جنبشی آن $۸۹۳\,\text{pj}$ است.

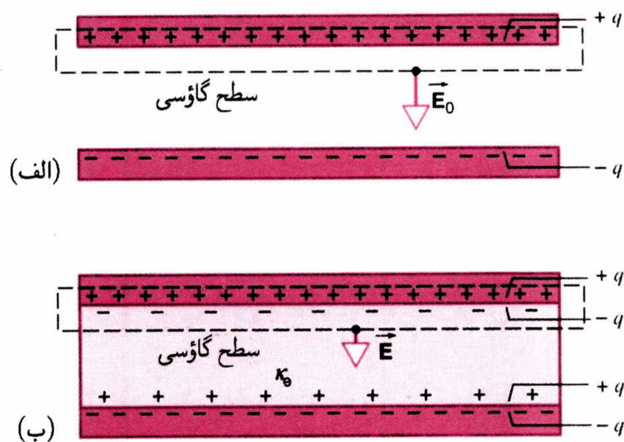
دی‌الکتریکها و قانون گاؤس

تاکنون استفاده از قانون گاؤس محدود به مواردی بود که در آنها هیچ مادهٔ دی‌الکتریکی وجود نداشت. اکنون می‌خواهیم این قانون را در مورد یک خازن با صفحه‌های موازی که با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک κ_e پُر شده است به‌کار ببریم.

در شکل ۳۰ـ۱۴ خازنی را در دو حالت با دی‌الکتریک و بدون آن نشان داده‌ایم. فرض کنید که در هر دو حالت بار qی روی صفحه‌ها یکسان باشد. سطحهای گاؤسی را چنان ترسیم کرده‌ایم که قسمتی از آن از داخل صفحهٔ بالایی عبور کند و قسمتی از آن از فضای بین صفحه‌ها بگذرد.

اگر مادهٔ دی‌الکتریک وجود نداشته باشد (شکل ۳۴۰ـ۲۴(الف))، با استفاده از قانون گاؤس داریم

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_\circ E_\circ A = q$$



شکل ۳۰ـ۱۴ (الف) یک خازن با صفحه‌های موازی. (ب) یک تیغهٔ دی‌الکتریک در فاصلهٔ بین صفحه‌ها قرار داده شده است، در حالی‌که بار روی صفحه در مقدار q ثابت می‌ماند. بار القایی q' روی سطح تیغهٔ دی‌الکتریک پدیدار می‌شود.

چون، میدان الکتریکی فقط در آن قسمتی از سطح گاؤسی وجود دارد که در فاصلهٔ بین صفحه‌هاست. به این ترتیب،

$$E_\circ = \frac{q}{\epsilon_\circ A} \qquad (۳۰\text{ـ}۳۲)$$

اگر مادهٔ دی‌الکتریک وجود داشته باشد (شکل ۳۰ـ۱۴(ب))، در آن صورت قانون گاؤس نتیجه می‌دهد

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_\circ E A = q - q'$$

یا، داریم

$$E = \frac{q}{\epsilon_\circ A} - \frac{q'}{\epsilon_\circ A} \qquad (۳۰\text{ـ}۳۳)$$

که در این معادله $-q'$، یعنی بار سطحی القاشده را، باید از بار q، یعنی بار آزاد روی صفحه‌ها، تمیز داد. دو بار $+q$ و $-q'$ که هر دو در داخل سطح گاؤسی قرار می‌گیرند، دارای علامتهای مخالف‌اند؛ بار خالص در داخل سطح گاؤسی چنین است $q + (-q') = q - q'$.

دی‌الکتریک میدان الکتریکی را با ضریب κ_e کاهش می‌دهد، و در نتیجه

$$E = \frac{E_\circ}{\kappa_\text{e}} = \frac{q}{\kappa_\text{e}\epsilon_\circ A} \qquad (۳۰\text{ـ}۳۴)$$

با قرار دادن این نتیجه در معادلهٔ (۳۰ـ۳۳) می‌رسیم به

$$\frac{q}{\kappa_\text{e}\epsilon_\circ A} = \frac{q}{\epsilon_\circ A} - \frac{q'}{\epsilon_\circ A}$$

یا

$$q' = q\left(۱ - \frac{۱}{\kappa_\text{e}}\right) \qquad (۳۰\text{ـ}۳۵)$$

که نشان می‌دهد بار سطحی القاشدهٔ q' همواره از نظر اندازه از بار آزاد q کوچکتر است و اگر دی‌الکتریک وجود نداشته باشد، یعنی اگر $\kappa_e = ۱$ باشد، در آن صورت بار القاشده برابر صفر است.

اکنون قانون گاؤس را برای مورد مربوط به شکل ۳۰ـ۱۴(ب) به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\epsilon_\circ \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q - q' \qquad (۳۶\text{ـ}۳۰)$$

که باز هم در اینجا $q - q'$ بار خالص موجود در داخل سطح گاؤسی است. با قرار دادن نتیجهٔ معادلهٔ (۳۰ـ۳۵) به‌جای q' و پس از اندکی بازآرایی جمله‌ها، می‌رسیم به

$$\epsilon_\circ \oint \kappa_e \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q \qquad (۳۷\text{ـ}۳۰)$$

این رابطهٔ مهم، گرچه برای یک خازن با صفحه‌های موازی به‌دست‌آمده، به‌طور کلی درست است و به همان صورتی است که معمولاً قانون گاؤس را وقتی دی‌الکتریک وجود دارد می‌نویسند. به نکات زیر توجه کنید:

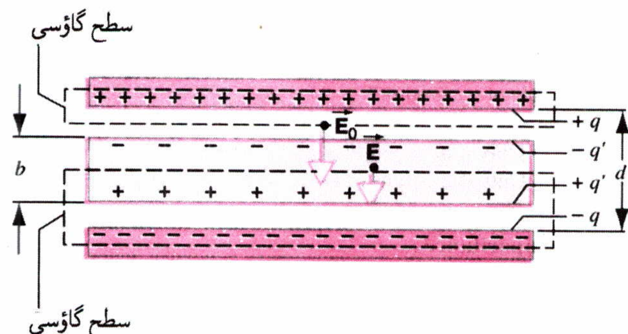
۱. اکنون انتگرال شار به‌جای $\vec{\mathbf{E}}$ شامل $\kappa_e \vec{\mathbf{E}}$ است. این جایگزینی با کاهش E در دی‌الکتریک با ضریب κ_e سازگار است. زیرا $\kappa_e \vec{\mathbf{E}}$ (با وجود دی‌الکتریک) برابر است با $\vec{\mathbf{E}}_\circ$ (بدون دی‌الکتریک). برای تعمیم موضوع. با زیرعلامت انتگرال قرار دادن κ_e، احتمال ثابت‌نبودن κ_e را نیز مجاز می‌داریم.

۲. بار q در داخل سطح گاؤسی را فقط بارهای آزاد در نظر می‌گیریم. در طرف راست معادلهٔ (۳۰ـ۳۷)، بار سطحی القاشده، آگاهانه حذف شده است، ولی با درنظرگرفتن ضریب κ_e در طرف چپ این معادله، اثر آن به حساب آورده شده است. معادله‌های (۳۰ـ۳۶) و (۳۰ـ۳۷) فرمولبندیهای کاملاً هم‌ارزی هستند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۹ در شکل ۳۰ـ۱۵ یک خازن با صفحه‌های موازی را نشان داده‌ایم که مساحت صفحه‌های آن A و فاصلهٔ بین آنها d است. اختلاف پتانسیل ΔV را بین صفحه‌های این خازن برقرار می‌کنیم. سپس باتری را از خازن قطع‌کرده یک تیغهٔ دی‌الکتریک به ضخامت b و ثابت دی‌الکتریکی κ_e را مطابق شکل در بین صفحه‌ها قرار می‌دهیم. فرض کنید

$$A = ۱۱۵\,\text{cm}^۲, \quad d = ۱{,}۲۴\,\text{cm}, \quad b = ۰{,}۷۸\,\text{cm}$$

$$\kappa_e = ۲{,}۶۱, \quad \Delta V = ۸۵{,}۵\,\text{V}$$



شکل ۳۰ـ۱۵ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۹. یک خازن با صفحه‌های موازی حاوی یک تیغهٔ دی‌الکتریک است که فقط بخشی از فضای بین صفحه‌ها را پر می‌کند.

(الف) ظرفیت C خازن قبل از اینکه تیغهٔ دی‌الکتریک وارد آن بشود چقدر است؟ (ب) چه مقدار بار آزاد روی صفحه‌های خازن پدید می‌آید؟ (ج) شدت میدان الکتریکی $E_\circ$ در گافهای هوا بین صفحه‌های خازن و تیغهٔ دی‌الکتریک چقدر است؟ (د) شدت میدان الکتریکی E را در داخل تیغهٔ دی‌الکتریک محاسبه کنید. (ه) اختلاف پتانسیل بین دو صفحه، $\Delta V'$، پس از ورود تیغهٔ دی‌الکتریک چقدر است؟ (و) وقتی تیغه در فضای بین صفحه‌ها قرار می‌گیرد، ظرفیت C' خازن چقدر است؟

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۰ـ۵) داریم

$$C = \frac{\epsilon_\circ A}{d} = \frac{(۸{,}۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F/m})(۱۱۵ \times ۱۰^{-۴}\text{m}^۲)}{۱{,}۲۴ \times ۱۰^{-۲}\text{m}}$$
$$= ۸{,}۲۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F} = ۸{,}۲۱\text{pF}$$

(ب) بار آزاد روی هر یک از صفحه‌های خازن را می‌توان از معادلهٔ (۳۰ـ۱) معین کرد

$$q = C\Delta V = (۸{,}۲۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F})(۸۵{,}۵\,\text{V})$$
$$= ۷{,}۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}\text{C} = ۷۰۲\,\text{pC}$$

چون قبل از قرار دادن تیغهٔ دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌ها، اتصال باتری قطع شده بود، با قرار دادن تیغهٔ دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌های خازن، مقدار بار آزاد ثابت باقی می‌ماند.

(ج) قانون گاؤسی به‌صورت داده‌شده در معادلهٔ (۳۰ـ۳۷) را در مورد سطح گاؤسی بالایی شکل ۳۰ـ۱۵، که فقط بارهای آزاد روی صفحهٔ بالایی خازن را در برمی‌گیرد، به‌کار می‌بریم. از اینجا داریم

$$\epsilon_\circ \oint \kappa_e \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \epsilon_\circ (۱) E_\circ A = q$$

یا

$$E_\circ = \frac{q}{\epsilon_\circ A} = \frac{۷٫۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}\text{C}}{(۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\text{F/m})(۱۱۵ \times ۱۰^{-۴}\text{m}^۲)}$$
$$= ۶۹۰۰\,\text{V/m} = ۶٫۹۰\,\text{kV/m}$$

توجه کنید که در این معادلهٔ $\kappa_e = ۱$ را قرار دادیم زیرا سطح گاؤسی که قانون گاؤس را در مورد آن به‌کار می‌بریم و انتگرال می‌گیریم از هیچ محیط حاوی دی‌الکتریک نمی‌گذرد. همچنین توجه داشته باشید که وقتی تیغهٔ دی‌الکتریک وارد فضای بین صفحه‌ها می‌شود $E_\circ$ تغییر نمی‌کند. این کمیت فقط به بار آزاد روی صفحه‌ها بستگی دارد.

(د) یک بار دیگر از معادلهٔ (۳۰ـ۳۷) استفاده می‌کنیم. این‌بار قانون را در مورد سطح گاؤسی پایینی شکل ۳۰ـ۱۵ به‌کار می‌بریم و فقط بار آزاد $-q$ را در نظر می‌گیریم. درمی‌یابیم که

$$\epsilon_\circ \oint \kappa_e \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -\epsilon_\circ \kappa_e E A = -q$$

یا

$$E = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_\circ A} = \frac{E_\circ}{\kappa_e} = \frac{۶٫۹۰\,\text{kV/m}}{۲٫۶۱} = ۲٫۶۴\,\text{kV/m}$$

وقتی حاصلضرب داخلی $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$ را محاسبه می‌کنیم علامت منفی ظاهر می‌شود زیرا $\vec{\mathbf{E}}$ و $d\vec{\mathbf{A}}$ در جهتهای مخالف یکدیگرند، $d\vec{\mathbf{A}}$ همواره عمود بر سطح بستهٔ گاؤسی و به طرف خارج آن است.

(ه) برای یافتن اختلاف پتانسیل $\Delta V'$، از معادلهٔ (۳۰ـ۲) استفاده می‌کنیم،

$$\Delta V' = \int_{+}^{-} E\,ds = E_\circ(d-b) + Eb$$
$$= (۶۹۰۰\,\text{V/m})(۰٫۰۱۲۴\,\text{m} - ۰٫۰۰۷۸\,\text{m})$$
$$+ (۲۶۴۰\,\text{V/m})(۰٫۰۰۷۸\,\text{m})$$
$$= ۵۲٫۳\,\text{V}$$

این نتیجه، با اختلاف پتانسیل اعمال‌شدهٔ اولیه یعنی $۸۵٫۵\,\text{V}$ تفاوت دارد.

(و) ظرفیت خازن وقتی که تیغهٔ دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌های آن قرار می‌گیرد از معادلهٔ (۳۰ـ۱) به‌دست می‌آید

$$C' = \frac{q}{\Delta V'} = \frac{۷٫۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}\text{C}}{۵۲٫۳\,\text{V}}$$
$$= ۱٫۳۴ \times ۱۰^{-۱۱}\text{F} = ۱۳٫۴\,\text{pF}$$

جدول ۳۰ـ۱ خلاصهٔ نتیجه‌های مربوط به مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۹

کمیت	یکا	بدون تیغه	نیم تیغه	تیغهٔ کامل
C	pF	۸٫۲۱	۱۳٫۴	۲۱٫۴
q	pC	۷۰۲	۷۰۲	۷۰۲
q'	pC	-	۴۳۳	۴۳۳
ΔV	V	۸۵٫۵	۵۲٫۳	۳۲٫۸
$E_\circ$	kV/m	۶٫۹۰	۶٫۹۰	۶٫۹۰ [الف]
E	kV/m	-	۲٫۶۴	۲٫۶۴

الف) فرض می‌کنیم که بین تیغهٔ دی‌الکتریک و صفحهٔ خازن شکاف بسیار نازکی وجود داشته باشد.

نتیجه‌های حاصل از این مسئلهٔ نمونهٔ را در جدول ۳۰ـ۱ خلاصه کرده‌ایم. این جدول همچنین شامل نتیجه‌هایی است که اگر تیغهٔ دی‌الکتریک به‌طور کامل فضای بین دو صفحهٔ خازن را پر می‌کرد، به‌دست می‌آمد.

چندگزینه‌ای

۳۰ـ۱ خازنها

۱. دو صفحهٔ فلزی موازی حامل بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هستند. آیا این مجموعه نوعی خازن است؟

(الف) آری (ب) فقط در صورتی که $q_۱ = -q_۲$ باشد.

(ج) فقط اگر علامت بارهای $q_۱$ و $q_۲$ مخالف هم باشد. (د) خیر

۳۰ـ۲ ظرفیت

۲. مرکزهای دو کرهٔ رسانای یکسان به شعاع r در فاصلهٔ $d > ۲r$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. بار $+q$ روی یکی از این کره‌ها قرار دارد، و بار $-q$ روی کرهٔ دیگر. ظرفیت این مجموعه $C_\circ$ است. اکنون بار اضافی دیگری به این کره‌ها منتقل می‌شود به‌طوری که بار روی هر کدام از کره‌ها دو برابر می‌شود.

(۱) اکنون که بارهای روی کره‌ها تغییر کرده است، ظرفیت جدید C' چقدر است؟

(الف) $C' = ۴C_\circ$ (ب) $C' = ۲C_\circ$ (ج) $C' = C_\circ$

(د) $C' = C_\circ/۲$

(ه) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

(۲) اختلاف پتانسیل جدید، $\Delta V'$، بین کره‌ها چقدر است؟

(الف) $\Delta V' = ۴q/C_۰$ (ب) $\Delta V' = ۲q/C_۰$

(ج) $\Delta V' = q/C_۰$ (د) $\Delta V' = q/۲C_۰$

(هـ) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

۳. مرکزهای دو کرهٔ رسانای یکسان به شعاع r در فاصلهٔ $d > ۲r$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند.

(۱) اگر فاصلهٔ بین دو کره کاسته شود، ظرفیت این مجموعه چگونه تغییر خواهد کرد؟

(الف) C افزوده می‌شود. (ب) C کاسته می‌شود.

(ج) C ثابت می‌ماند. (د) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

(۲) اگر شعاع r کاسته شود، ظرفیت این مجموعه چگونه تغییر خواهد کرد؟

(الف) C افزوده می‌شود. (ب) C کاسته می‌شود.

(ج) C ثابت می‌ماند. (د) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

۳۰ـ۳ محاسبهٔ ظرفیت

۴. کدام‌یک از تغییرات زیر در خازن با صفحه‌های موازی ایده‌آل که به یک باتری ایده‌آل متصل شده است سبب افزایش بار الکتریکی موجود روی آن می‌شود؟

(الف) کاهش اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن.

(ب) کاهش مساحت صفحه‌ها (ج) کاهش فاصلهٔ بین صفحه‌ها

(د) هیچ‌کدام از موارد بالا

۵. معادلهٔ (۳۰ـ۵) از آثار حاشیه‌دار شدن میدان در نزدیکی لبه‌های صفحه‌ها چشم‌پوشی می‌کند. آیا این موضوع سبب می‌شود که معادلهٔ (۳۰ـ۵) ظرفیت خازن با صفحه‌های موازی واقعی را زیاد یا کم برآورد کند؟

(الف) زیاد برآورد می‌کند (ب) کم برآورد می‌کند (ج) هیچ‌کدام، عبارت دقیق است.

۶. ظرفیت کرهٔ رسانای منزوی به شعاع r چقدر است؟

(الف) $۴\pi\epsilon_۰$ (ب) $۴\pi\epsilon_۰ r$ (ج) $۴\pi\epsilon_۰/r$

(د) برای جسم منفرد ظرفیت تعریف نشده است.

۳۰ـ۴ خازنهای سری و موازی

۷. دو خازن $C_۱$ و $C_۲$ به‌صورت سری به‌هم بسته شده‌اند؛ فرض کنید $C_۱ < C_۲$ است. ظرفیت معادل این مجموعه برابر C است، که

(الف) $C < C_۱/۲$ (ب) $C_۱/۲ < C < C_۱$ (ج) $C_۱ < C < C_۲$

(د) $C_۲ < C < ۲C_۲$ (هـ) $۲C_۲ < C$

۸. دو خازن $C_۱$ و $C_۲$ به‌صورت موازی به‌هم بسته شده‌اند؛ فرض کنید $C_۱ < C_۲$ است. ظرفیت معادل این مجموعه برابر C است، که

(الف) $C < C_۱/۲$ (ب) $C_۱/۲ < C < C_۱$ (ج) $C_۱ < C < C_۲$

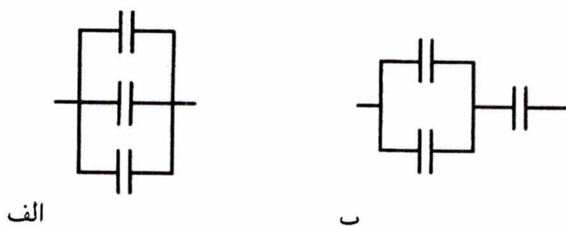
(د) $C_۲ < C < ۲C_۲$ (هـ) $۲C_۲ < C$

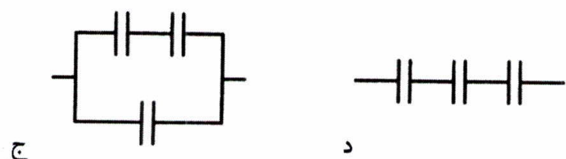
۹. در شکل ۳۰ـ۱۶ چهار آرایش متفاوت برای اتصال سه خازن یکسان به یکدیگر را نشان داده‌ایم.

(۱) کدام آرایش دارای بیشترین ظرفیت معادل است؟

(۲) اگر هرکدام از این آرایشها به اختلاف پتانسیل ۱۲ ولت متصل شوند، درکدام مورد بیشترین مقدار بار جابه‌جا می‌شود؟

(۳) هر یک از این آرایشها به اختلاف پتانسیلی متصل می‌شود، به‌طوری که بار انتقال‌یافته در همهٔ موارد یکسان باشد. کدام آرایش بیشترین اختلاف پتانسیل را کسب می‌کند.





شکل ۳۰ـ۱۶ پرسش چندگزینه‌ای ۹.

۳۰ـ۵ ذخیرهٔ انرژی در میدان الکتریکی

۱۰. یک خازن با صفحه‌های موازی به باتری ایده‌آل متصل شده است، که اختلاف پتانسیل ثابتی را فراهم می‌آورد. در آغاز، انرژی ذخیره‌شده در خازن برابر $U_۰$ است. اگر فاصلهٔ بین صفحه‌ها را دو برابر کنیم، در آن‌صورت انرژی ذخیره‌شده در خازن چقدر خواهد شد؟

(الف) $۴U_۰$ (ب) $۲U_۰$ (ج) $U_۰$ (د) $U_۰/۲$

(هـ) $U_۰/۴$

۱۱. یک خازن با صفحه‌های موازی را ابتدا با اتصال به باتری ایده‌آل باردار (پُر) می‌کنیم؛ سپس باتری را قطع می‌کنیم. در آغاز، انرژی ذخیره‌شده در خازن برابر $U_۰$ است. اگر فاصلهٔ بین صفحه‌های این

خازن را دو برابر کنیم. در آن صورت انرژی ذخیره‌شده در خازن چقدر خواهد شد؟

(الف) $۴U_\circ$ (ب) $۲U_\circ$ (ج) $U_\circ$ (د) $U_\circ/۲$ (ه) $U_\circ/۴$

۱۲. شخصی در آغاز خازنی را چنان باردار می‌کند که انرژی پتانسیل آن برابر ۱ ژول شود. اگر این شخص بخواهد به خازن انرژی پتانسیل ۴ ژول بدهد، چه باید بکند؟

(الف) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را چهار برابر کند ولی بار را تغییر ندهد.

(ب) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را دو برابر کند ولی بار را تغییر ندهد.

(ج) هم اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را دو برابر کند و هم بار روی صفحه‌ها را.

(د) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را ثابت نگه دارد ولی بار روی صفحه‌ها را دو برابر کند.

۱۳. یک بالون پر از باد به‌وسیلهٔ پوستهٔ رسانایی اندود شده که حامل بار q است. در این بالون یک نشتی پدید می‌آید و شعاع آن شروع به کم شدن می‌کند، ولی هیچ باری از روی آن از دست نمی‌رود.

(۱) همزمان با نشت از داخل بالون، ظرفیت آن چگونه تغییر می‌کند؟

(الف) C افزایش می‌یابد (ب) C کاهش می‌یابد (ج) C ثابت می‌ماند.

(د) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

(۲) همزمان با نشت از داخل بالون، انرژی الکتریکی ذخیره‌شده چگونه تغییر می‌کند؟

(الف) U افزایش می‌یابد (ب) U کاهش می‌یابد (ج) U ثابت می‌ماند.

(د) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

۶-۳۰ خازن دارای دی‌الکتریک

۱۴. یک خازن با صفحه‌های موازی را در نظر بگیرید که در آغاز دارای بار $q_\circ$، ظرفیت $C_\circ$ و اختلاف پتانسیل $\Delta V_\circ$ باشد. بین صفحه‌های این خازن نیروی الکتروستاتیکی به بزرگی $F_\circ$ وجود دارد، و انرژی ذخیره‌شده در این خازن برابر $U_\circ$ است. پایانه‌های این خازن به‌جایی متصل نیستند.

(۱) یک تیغهٔ دی‌الکتریک با $\kappa_e > ۱$ را بین صفحه‌های این خازن قرار می‌دهیم. کدام‌یک از کمیتهای زیر افزایش پیدا می‌کنند؟ (تمام کمیتهای مرتبط را نام ببرید.)

(الف) q (ب) C (ج) ΔV (د) F (ه) U

(۲) به هنگام قرار دادن تیغهٔ دی‌الکتریک در داخل خازن، جهت نیروی الکتروستاتیکی کدام است؟

(الف) نیرو تیغه را به داخل خازن می‌کشاند.

(ب) نیرو تیغه را به خارج از خازن می‌راند.

(ج) هیچ نیروی الکتروستاتیکیی بر تیغه وارد نمی‌شود.

(۳) سپس تیغهٔ دی‌الکتریک را از خازن خارج می‌کنیم. به هنگام خارج کردن تیغهٔ دی‌الکتریک از خازن، جهت نیروی الکتروستاتیکی کدام است؟

(الف) نیرو تیغه را به داخل خازن می‌کشاند.

(ب) نیرو تیغه را به خارج از خازن می‌راند.

(ج) هیچ نیروی الکتروستاتیکیی بر تیغه وارد نمی‌شود.

۱۵. یک خازن با صفحه‌های موازی به‌ترتیب، با بار و ظرفیت اولیهٔ $q_\circ$ و $C_\circ$، را در نظر بگیرید. بین دو صفحهٔ این خازن نیروی الکتروستاتیکی به بزرگی $F_\circ$ وجود دارد، و این خازن انرژی $U_\circ$ در خود ذخیره کرده است. پایانه‌های این خازن به باتری ایده‌آل، که اختلاف پتانسیل $\Delta V_\circ$ را تأمین می‌کند متصل است.

(۱) یک تیغهٔ دی‌الکتریک را که برای آن $\kappa_e > ۱$ است، بین صفحه‌های خازن قرار می‌دهیم. چه کمیتهایی افزایش می‌یابد؟ (تمام کمیتهای مرتبط را نام ببرید.)

(الف) q (ب) C (ج) ΔV (د) F (ه) U

(۲) جهت نیروی الکترستاتیکی وارد بر تیغه، به هنگام وارد کردن تیغه به داخل خازن کدام است؟

(الف) نیرو تیغه را به داخل خازن می‌کشاند.

(ب) نیرو تیغه را به خارج از خازن می‌راند.

(ج) هیچ نیروی الکتروستاتیکیی بر تیغه وارد نمی‌شود.

(۳) سپس تیغهٔ دی‌الکتریک را از خازن بیرون می‌کشیم. هنگام خارج کردن تیغهٔ دی‌الکتریک از خازن، جهت نیروی الکتروستاتیکی کدام است؟

(الف) نیرو تیغه را به داخل خازن می‌کشاند.

(ب) نیرو تیغه را به خارج از خازن می‌راند.

(ج) هیچ نیروی الکتروستاتیکیی بر تیغه وارد نمی‌شود.

پرسشها

۱. خازنی به باتری متصل شده است. (الف) چرا هرکدام از صفحه‌ها مقدار دقیقاً یکسانی بار دریافت می‌کند؟ (ب) اگر اندازهٔ صفحه‌ها متفاوت باشد باز هم این موضوع صادق است؟

۲. دو خازن $C_۱$ و $C_۲$ در اختیار داریم که برای آنها $C_۱ > C_۲$ است. چه ترتیبی پیشنهاد می‌کنید که $C_۲$ بار بیشتری از $C_۱$ در خود جای دهد؟

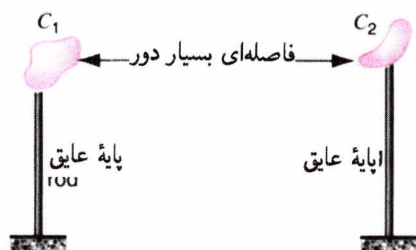
۳. رابطهٔ $\sigma \propto ۱/R$، که در آن σ چگالی سطحی بار و R شعاع انحنا است (معادلهٔ (۲۸ـ۴۲) را ببینید) نشان می‌دهد که بار روی یک رسانای منزوی در نقطه‌های نوک تیز آن جمع می‌شود و از سطحهای تخت که برای آنها $R = \infty$، دوری می‌جوید. چگونه این موضوع را با شکل ۳۰ـ۵ که در آن بارها روی سطحهای تختِ هرکدام از دو صفحه توزیع شده‌اند وفق می‌دهید؟

۴. در ارتباط با معادلهٔ (۳۰ـ۱) $(q = C\Delta V)$ گفتیم که C ثابت است. با این همه، خاطرنشان کردیم که (معادلهٔ (۳۰ـ۵) را ببینید) این ثابت بستگی به شکل هندسی خازن دارد (و نیز، بعداً دیدیم که به محیط بستگی دارد). اگر C واقعاً یک ثابت است، نسبت به چه متغیرهایی ثابت می‌ماند؟

۵. فرض کنید که در شکل ۳۰ـ۱، a و b نارسانا باشند، به‌طوری که بتوان بار را به‌دلخواه روی سطح آنها توزیع کرد. (الف) آیا معادلهٔ (۳۰ـ۱) $(q = C\Delta V)$، با C مستقل از چگونگی توزیع بار، برقرار می‌ماند؟ (ب) در این مورد V را چگونه تعریف می‌کنید؟

۶. یک خازن با صفحه‌های موازی در اختیار داریم که صفحه‌های آن مربعهایی به مساحت A هستند و فضای بین آنها خلأ و فاصلهٔ آنها برابر با d است. هر یک از عملیات زیر چه تأثیر کیفیی بر ظرفیت خازن می‌گذارد؟ (الف) d را کاهش دهیم. (ب) یک تیغهٔ مسی را بدون اینکه با هیچ‌کدام از دو صفحه در تماس باشد بین آنها قرار دهیم. (ج) مساحت هر دو صفحه را دو برابر کنیم. (د) فقط مساحت یکی از دو صفحه را دو برابر کنیم. (ه) صفحه‌ها را به موازات هم بلغزانیم به‌طوری که سطح هم‌پوشان آنها ۵۰٪ شود. (و) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها را دو برابر کنیم. (ز) یکی از صفحه‌ها را به‌صورت مایل قرار دهیم به‌طوری که فاصلهٔ بین صفحه‌ها در یک طرف d باقی بماند و در طرف دیگر برابر با $\frac{۱}{۲}d$ شود.

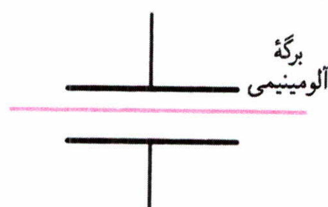
۷. دو رسانای منزوی در اختیار دارید که هر یک از آنها ظرفیت مشخصی دارد؛ شکل ۳۰ـ۱۷ را ببینید. اگر این دو رسانا را با یک رشته سیم بسیار نازک به‌هم متصل کنید، چگونه ظرفیت این مجموعه را محاسبه می‌کنید؟ در متصل‌کردن آنها به همدیگر به‌وسیلهٔ سیم، آیا آنها را به‌صورت سری متصل کرده‌اید یا موازی؟



شکل ۳۰ـ۱۷ پرسش ۷.

۸. ظرفیت یک رسانا به علت وجود یک رسانای بدون بار دیگر که از لحاظ الکتریکی منزوی است تغییر می‌کند. چرا؟

۹. یک برگهٔ نازک آلومینیم با ضخامت ناچیز، مطابق شکل ۳۰ـ۱۸، در فاصلهٔ بین دو صفحهٔ یک خازن قرار می‌گیرد. وجود این برگه چه تأثیری بر ظرفیت خازن دارد اگر (الف) برگه از نظر الکتریکی منزوی باشد و (ب) برگه به صفحهٔ بالایی متصل شده باشد؟



شکل ۳۰ـ۱۸ پرسش ۹.

۱۰. در انبارکردن خازنها اغلب دو صفحهٔ آنها را به‌وسیلهٔ یک رشته سیم به‌هم متصل می‌کنند. چرا این کار صورت می‌گیرد؟

۱۱. اگر حاشیه‌دار شدن خطهای میدان الکتریکی در یک خازن با صفحه‌های موازی را نادیده نمی‌گرفتید، ظرفیت کمتری به‌دست می‌آوردید یا بیشتر؟

۱۲. دو قرص دایره‌ای مسی به فاصلهٔ معینی در برابر هم قرارگرفته‌اند. چگونه می‌توانید ظرفیت این مجموعه را کاهش دهید؟

۱۳. شباهتها و تفاوتها را وقتی که (الف) یک تیغهٔ دی‌الکتریک و (ب) یک تیغهٔ رسانا را بین صفحه‌های یک خازن با صفحه‌های موازی قرار می‌دهید بررسی کنید. فرض کنید که ضخامت تیغه برابر نصف فاصلهٔ بین دو صفحه باشد.

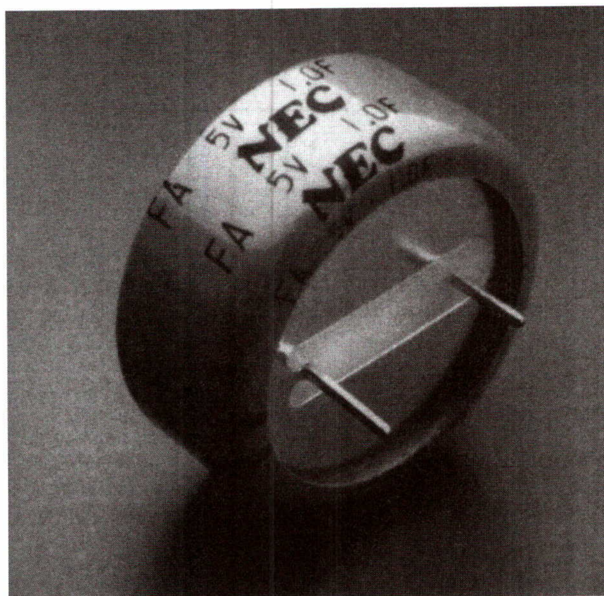
۱۴. یک خازن با صفحه‌های موازی با دی‌الکتریک روغنی چنان طراحی شده است که دارای ظرفیت C بوده و تا یک اختلاف پتانسیل بیشینهٔ $\Delta V_{\rm m}$ بدون جرقه زدن، عملکردی ایمن داشته باشد. ولی کار

طراح خوب نبوده است و خازن گاهی جرقه می‌زند. برای طراحی مجدد خازن با ثابت نگه‌داشتن C و $\Delta V_{\rm m}$ و استفاده از همان دی‌الکتریک چه‌کاری می‌توان انجام داد؟

۱۵. برای یک اختلاف پتانسیل معین، آیا یک خازن با دی‌الکتریک بار بیشتری در خود ذخیره می‌کند یا بدون دی‌الکتریک (خلأ)؟ این موضوع را با توجه به تصویر میکروسکوپی وضعیت توضیح دهید.

۱۶. آب دارای یک ثابت دی‌الکتریک بالاست (جدول ۲۹ـ۲ را ببینید). چرا معمولاً از آب به‌عنوان مادهٔ دی‌الکتریک در خازنها استفاده نمی‌شود؟

۱۷. شکل ۳۰ـ۱۹ یک خازن واقعی F ۱ـ را، که برای استفاده در آزمایشگاههای آموزش در دسترس است، نشان می‌دهد. قطر این خازن در حدود چند سانتی‌متر است. با توجه به نتیجهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۲ چگونه می‌توان این خازن را ساخت؟



شکل ۳۰ـ۱۹ پرسش ۱۷.

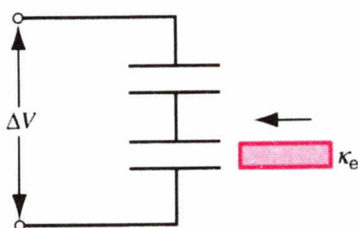
۱۸. یک تیغهٔ دی‌الکتریک را از یک طرف یک خازن با صفحه‌های موازی باردار واردکرده (صفحه‌های خازن افقی هستند و باتری پرکنندهٔ خازن قبلاً از آن جدا شده است) و سپس آن را رها می‌کنیم. آنچه روی می‌دهد توصیف کنید. اصطکاک را نادیده بگیرید.

۱۹. یک خازن با صفحه‌های موازی را با باتری پرکرده و سپس باتری را قطع می‌کنیم. آنگاه یک تیغهٔ دی‌الکتریک را بین صفحه‌ها قرار می‌دهیم. به‌طور کیفی، بگویید که بار، ظرفیت، اختلاف پتانسیل، میدان الکتریکی، و انرژی ذخیره‌شده چگونه تغییر می‌کنند.

۲۰. در حالی‌که یک خازن با صفحه‌های موازی به یک باتری متصل است، یک تیغهٔ دی‌الکتریک را بین صفحه‌های آن وارد می‌کنیم. به‌طور کیفی، بگویید که بار، ظرفیت، اختلاف پتانسیل، میدان الکتریکی، و انرژی ذخیره‌شده چگونه تغییر می‌کنند. آیا برای وارد کردن تیغه به داخل خازن، باید کاری انجام داد؟

۲۱. تصورکنید که یک تیغهٔ دی‌الکتریکی راکه ضخامت آن برابر با فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن است درون خازن با صفحه‌های موازی حامل تا نیمه بار ثابت q وارد بکنیم. چگونگی توزیع بار q روی صفحه‌های خازن و بار القایی q' روی تیغهٔ دی‌الکتریک را به‌صورت کیفی ترسیم کنید.

۲۲. دو خازن یکسان را مطابق شکل ۳۰ـ۲۰ به‌هم متصل کرده‌ایم. در حالی‌که باتری هنوز در مدار قرار دارد، و اختلاف پتانسیل ثابت ΔV را حفظ می‌کند، یک تیغهٔ دی‌الکتریک را بین صفحه‌های یکی از این خازنها وارد می‌کنیم. به‌طور کیفی بگویید که بار، ظرفیت، اختلاف پتانسیل، میدان الکتریکی، و انرژی ذخیره‌شده در هر یک از خازنها چگونه تغییر می‌کنند.



شکل ۳۰ـ۲۰ پرسش ۲۲.

۲۳. در این فصل فرض کردیم که شرایط الکتروستاتیکی برقرار است؛ یعنی اختلاف پتانسیل ΔV بین صفحه‌های خازنها ثابت می‌ماند. ولی، فرض کنید که ΔV، همان‌گونه که اغلب در عمل رخ می‌دهد، برحسب زمان به‌صورت سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω تغییر می‌کند. آیا انتظار دارید که ثابت دی‌الکتریک $\kappa_{\rm e}$ با بسامد ω تغییر کند؟

تمرینها

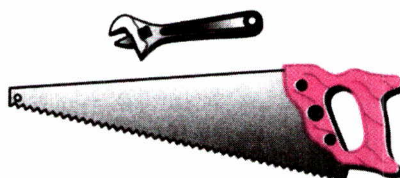
۳۰ـ۱ خازنها

۳۰ـ۲ ظرفیت

۱. الکترومتر وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری بار ساکن مورد استفاده قرار می‌گیرد. بار نامعلومی را روی صفحه‌های یک خازن قرار داده و اختلاف پتانسیل آن را اندازه می‌گیریم. با یک الکترومتر به ظرفیت pF ۵۰ و حساسیت ولتاژ V ۰٫۱۵ چه حداقل باری را می‌توان اندازه‌گیری کرد؟

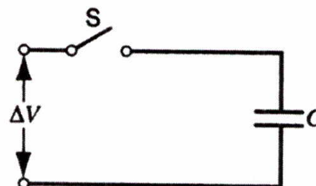
۲. دو جسم فلزی در شکل ۳۰ـ۲۱ دارای بارهای خالص pC ۷۳٫۰+ و pC ۷۳٫۰− هستند که سبب اختلاف پتانسیل V ۱۹٫۲ بین آنها

می‌شود. (الف) ظرفیت این مجموعه چقدر است؟ (ب) اگر بارهای روی این اشیای فلزی را به $+210\ pC$ و $-210\ pC$ تغییر دهیم، ظرفیت مجموعه چقدر خواهد شد؟ (ج) اختلاف پتانسیل دو جسم چقدر می‌شود؟



شکل ۳۰ـ۲۱ تمرین ۲.

۳. ظرفیت خازن شکل ۳۰ـ۲۲، برابر $26{,}0\ \mu F$ و در آغاز آزمایش بدون بار است. یک باتری اختلاف پتانسیل ΔV، برابر $125\ V$ را تأمین می‌کند. پس از آنکه کلید S برای مدتی خیلی طولانی بسته مانده، باتری چقدر بار جابه‌جا کرده است؟



شکل ۳۰ـ۲۲ تمرین ۳.

۳۰ـ۳ محاسبهٔ ظرفیت

۴. یک خازن با صفحه‌های موازی تشکیل شده است از صفحه‌های دایره‌ای به شعاع $8{,}22\ cm$ و فاصلهٔ بین این صفحه‌ها $1{,}31\ mm$ است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) اگر اختلاف پتانسیل $116\ V$ به این صفحه‌ها اعمال شود، چه مقدار بار روی این صفحه‌ها ظاهر می‌شود؟

۵. آند و کاتد لامپ تخلیهٔ دوقطبی به‌صورت دو استوانهٔ هم‌محور است که کاتد استوانهٔ مرکزی را تشکیل می‌دهد. قطر کاتد $1{,}62\ mm$، قطر آند $18{,}3\ mm$، و طول هر کدام از این دو جزء $2{,}38\ cm$ است. ظرفیت این دوقطبی را محاسبه کنید.

۶. ظرفیت دو ورقهٔ نازک آلومینیم که $1{,}20\ mm$ از هم قرار گرفته‌اند $9{,}70\ pF$ است و این مجموعه با اختلاف پتانسیل $13{,}0\ V$ پر شده است. (الف) مساحت هر کدام از ورقه‌ها را تعیین کنید. (ب) حال فاصلهٔ بین دو ورقه را به اندازهٔ $0{,}10\ mm$ کم می‌کنیم و بار را ثابت نگه می‌داریم. ظرفیت خازن را در شرایط جدید معین کنید. (ج) اختلاف پتانسیل چقدر تغییر می‌کند؟ توضیح دهید چگونه با استفاده از این اصل می‌توان میکروفون ساخت.

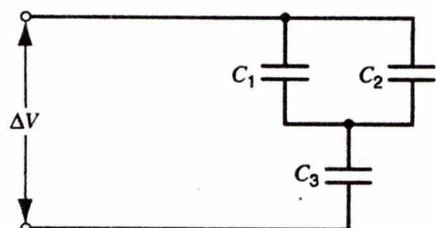
۷. شعاع صفحه‌های یک خازن کروی برابر با $38{,}0\ mm$ و $40{,}0\ mm$ است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) مساحت سطح صفحه‌های یک خازن با صفحه‌های موازی (خازن تخت) با همین فاصلهٔ بین صفحه‌ها و همین ظرفیت باید چقدر باشد؟

۸. فرض کنید که شعاع دو پوستهٔ کروی خازن کروی تقریباً با هم برابر باشند. در این شرایط این قطعه تقریباً معادل یک خازن با صفحه‌های موازی است که در آن $b - a = d$. نشان دهید که در این حد معادلهٔ (۳۰ـ۸) مربوط به خازن کروی واقعاً به معادلهٔ (۳۰ـ۵) مربوط به خازن با صفحه‌های موازی (خازن تخت) تبدیل می‌شود.

۳۰ـ۴ خازنهای سری و موازی

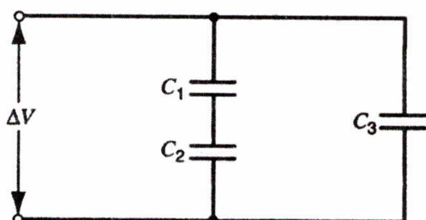
۹. چند خازن $1{,}00\ \mu F$ را باید به‌صورت موازی به‌هم وصل کرد تا وقتی به اختلاف پتانسیل $110\ V$ متصل می‌شوند مقدار $1{,}00\ C$ بار در خود ذخیره کنند؟

۱۰. ظرفیت معادل خازنهای شکل ۳۰ـ۲۳ را معین کنید. فرض کنید که $C_1 = 10{,}3\ \mu F$، $C_2 = 4{,}80\ \mu F$، و $C_3 = 3{,}90\ \mu F$ است.



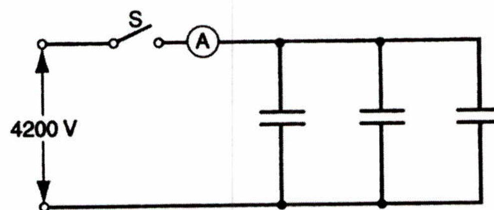
شکل ۳۰ـ۲۳ تمرینهای ۱۰، ۱۷، و ۲۶.

۱۱. ظرفیت معادل خازنهای شکل ۳۰ـ۲۴ را معین کنید. فرض کنید که $C_1 = 10{,}3\ \mu F$، $C_2 = 4{,}80\ \mu F$، و $C_3 = 3{,}90\ \mu F$ است.



شکل ۳۰ـ۲۴ تمرین ۱۱.

۱۲. ظرفیت هر یک از خازنهای خالی شکل ۳۰ـ۲۵ برابر $۲۵٫۰ \mu F$ است. با بستن کلید S اختلاف پتانسیل V ۴۲۰۰ برقرار می‌شود. در این حالت چه مقدار بار از سنجهٔ A عبور می‌کند؟



شکل ۳۰ـ۲۵ تمرین ۱۲.

۱۳. یک خازن $۶٫۰ \mu F$ به‌صورت سری به یک خازن $۴٫۰ \mu F$ متصل و اختلاف پتانسیل V ۲۰۰ در دو سر این مجموعه برقرار می‌شود. (الف) ظرفیت معادل آنها را محاسبه کنید. (ب) بار روی هر یک از خازنها چقدر است؟ (ج) اختلاف پتانسیل در دو سر هر یک از خازنها چقدر است؟

۱۴. تمرین ۱۳ را برای حالتی که دو خازن به‌صورت موازی به‌هم متصل شده باشند، حل کنید.

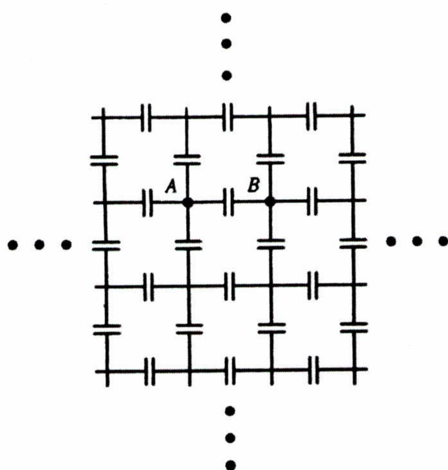
۱۵. (الف) سه خازن به‌صورت موازی به‌هم متصل شده‌اند. مساحت صفحهٔ هرکدام از این خازنها A و فاصلهٔ بین آنها d است. فاصلهٔ بین دو صفحهٔ یک خازن با مساحت صفحهٔ A باید چقدر باشد تا ظرفیت آن برابر ظرفیت مجموعهٔ موازی بشود؟ (ب) اگر این سه خازن به‌صورت سری به‌هم بسته شوند، فاصلهٔ بین دو صفحه چقدر باید باشد؟

۱۶. چند خازن با ظرفیت $۲٫۰ \mu F$ در اختیار داریم و هر یک از آنها می‌تواند بدون فروریزش الکتریکی اختلاف پتانسیل V ۲۰۰ را تحمل کند. چگونه می‌توانید تعدادی از این خازنها را طوری به‌هم متصل کنید که ظرفیتی معادل (الف) $۰٫۴۰ \mu F$ یا (ب) $۱٫۲ \mu F$ داشته باشند و بتوانند اختلاف پتانسیل V ۱۰۰۰ را تحمل کنند؟

۱۷. فرض کنید که در شکل ۳۰ـ۲۳ خازن $C_۳$ دچار فروریزش الکتریکی‌شده، به یک مسیر رسانا تبدیل شده باشد. چه تغییری در (الف) بار و (ب) اختلاف پتانسیل خازن $C_۱$ پدید می‌آید؟ فرض کنید که $\Delta V = ۱۱۵\,V$ است.

۱۸. یک خازن با ظرفیت $۱۰۸ \mu F$ را با یک باتری تا اختلاف پتانسیل V ۵۲٫۴ باردار و سپس باتری را از آن جدا کرده‌ایم. سپس این خازن را به‌صورت موازی به خازن دیگری (که در آغاز بدون بار است) وصل کرده‌ایم. اختلاف پتانسیل اندازه‌گیری‌شده به V ۳۵٫۸ کاهش پیدا می‌کند. ظرفیت خازن دوم را معین کنید.

۱۹. قسمتی از یک آرایهٔ بینهایت از خازنهای $۱\mu F$ را در شکل ۳۰ـ۲۶ نشان داده‌ایم. این آرایه در آغاز بدون بار است. سپس باتریی در دو نقطهٔ اتصال بسیار دور از هم وصل می‌شود. نشان دهید که پتانسیل در هر نقطهٔ اتصال برابر میانگین پتانسیل در نزدیکترین چهار نقطهٔ اتصال است. از جواب این تمرین در حل مسئلهٔ کامپیوتری ۱ بهره خواهید گرفت. (راهنمایی: بار خالص در هر نقطهٔ اتصال چقدر است؟)



شکل ۳۰ـ۲۶ تمرین ۱۹ و مسئلهٔ کامپیوتری ۱.

۳۰ـ۵ ذخیرهٔ انرژی در میدان الکتریکی

۲۰. به واسطهٔ میدان الکتریکی "هوای خوب" با شدت V/m ۱۵۰، چه مقدار انرژی در $۲٫۰\ m^۳$ هوا ذخیره شده است؟

۲۱. توده‌ای متشکل از ۲۱۰۰ خازن $۵٫۰ \mu F$ به‌طور موازی برای ذخیرهٔ انرژی الکتریکی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. هزینهٔ باردارکردن این توده تا اختلاف پتانسیل kV ۵۵، با نرخ ۶۰ ریال به‌ازای هرکیلووات ساعت چقدر است؟

۲۲. تلاشهایی برای ساخت رآکتور همجوشی گرماهسته‌ای کنترل‌شده صورت گرفته است که، اگر موفقیت‌آمیز باشد، می‌تواند مقدار بسیار هنگفتی انرژی از هیدروژن سنگین موجود در آب دریا تأمین کند. در این عملیات معمولاً جریانهای الکتریکی بسیار عظیم در دوره‌های زمانی کوتاه در سیم‌پیچهای میدان مغناطیسی برقرار می‌شود. این جریانها اغلب با تخلیهٔ تودهٔ بزرگی از خازنها تأمین می‌شود. یکی از این توده خازنها، ظرفیت mF ۶۱٫۰ را با ولتاژ kV ۱۰٫۰ فراهم می‌آورد. انرژی ذخیره‌شده را برحسب (الف) ژول و (ب) $kW \cdot h$ محاسبه کنید.

۲۳. مساحت سطح یک خازن با صفحه‌های موازی (تخت) با دی‌الکتریک هوا برابر $۴۲٫۰\ cm^۲$ و فاصلهٔ بین صفحه‌های این خازن

که با اختلاف پتانسیل ۶۲۵ ولت باردار شده برابر $1{,}30\ \text{mm}$ است. کمیتهای زیر را برای این خازن معین کنید: (الف) ظرفیت، (ب) مقدار بار روی هر صفحه، (ج) انرژی ذخیره‌شده، (د) میدان الکتریکی بین صفحه‌ها، و (ه) چگالی انرژی بین صفحه‌ها.

۲۴. دو خازن با ظرفیتهای $2{,}12\mu\text{F}$ و $3{,}88\mu\text{F}$ را به‌صورت سری به اختلاف پتانسیل $328\ \text{V}$ بسته‌ایم. انرژی کل ذخیره‌شده در این خازنها را محاسبه کنید.

۲۵. یک کرهٔ فلزی منزوی به قطر $12{,}6\ \text{cm}$ دارای پتانسیل $8150\ \text{V}$ است (در اینجا فرض کرده‌ایم که در بینهایت $V = 0$ است). چگالی انرژی در میدان الکتریکی را نزدیک سطح این کره محاسبه کنید.

۲۶. در شکل ۳۰ـ۲۳ کمیتهای (الف) بار، (ب) اختلاف پتانسیل، و (ج) انرژی ذخیره‌شده در هر خازن را تعیین کنید. برای این منظور از مقادیر عددی تمرین ۱۰، با اختلاف پتانسیل $\Delta V = 112\ \text{V}$ استفاده کنید.

۲۷. یک خازن استوانه‌ای مانند خازن شکل ۳۰ـ۶ دارای شعاعهای a و b است. نشان دهید که نصف انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره‌شده در داخل استوانه‌ای به شعاع $r = \sqrt{ab}$ قرار می‌گیرد.

۳۰ـ۶ خازن دارای دی‌الکتریک

۲۸. ظرفیت یک خازن، با دی‌الکتریک هوا، $51{,}3\ \text{pF}$ است. (الف) اگر مساحت هرکدام از صفحه‌های این خازن $0{,}350\ \text{m}^2$ باشد، فاصلهٔ بین صفحه‌ها چقدر است؟ (ب) اکنون اگر فاصلهٔ بین صفحه‌های این خازن را با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ۵٫۶۰ پر کنیم، ظرفیت آن چقدر می‌شود؟

۲۹. ظرفیت یک خازن با صفحه‌های موازی که با هوا پر شده $1{,}32\text{pF}$ است. فاصلهٔ بین صفحه‌ها دو برابر و فضای بین آنها با موم پر می‌شود. ظرفیت جدید خازن $2{,}57\ \text{pF}$ می‌شود. ثابت دی‌الکتریک موم را بیابید.

۳۰. یک خازن پرشده از هوا با ظرفیت $7{,}40\ \text{pF}$ در اختیار دارید. خازنی طراحی کنید که حداکثر $6{,}61\mu\text{J}$ انرژی با بیشینهٔ اختلاف پتانسیل $630\ \text{V}$ در خود ذخیره کند. اگر بخواهیم احتمال بروز هرگونه خطا را از بین ببریم، کدام‌یک از دی‌الکتریکهای جدول ۲۹ـ۲ را برای پرکردن فاصلهٔ بین صفحه‌ها مورد استفاده قرار می‌دهیم؟

۳۱. برای ساختن یک خازن با صفحه‌های موازی دو صفحهٔ مسی، یک ورقهٔ میکا (به ضخامت ۰٫۱۰ میلی‌متر و $\kappa_e = 5{,}4$)، یک تیغهٔ شیشه‌ای (به ضخامت ۰٫۲۰ میلی‌متر و $\kappa_e = 7{,}0$)، و یک تیغهٔ پارافینی (به ضخامت ۱٫۰ میلی‌متر و $\kappa_e = 2{,}0$) در اختیار داریم. برای ساختن یک خازن با بیشترین ظرفیت. کدام‌یک از این تیغه‌ها را باید بین دو ورق مسی قرار دهیم؟

۳۲. ثابت دی‌الکتریک یک مادهٔ معین ۲٫۸۰ و استقامت دی‌الکتریکی آن $18{,}2\ \text{MV/m}$ است. اگر در یک خازن با صفحه‌های موازی از این ماده به‌عنوان دی‌الکتریک استفاده شود و بخواهیم که ظرفیت آن خازن $68{,}4\ \text{nF}$ باشد و اختلاف پتانسیل $4{,}13\ \text{kV}$ را تحمل کند، حداقل مساحت صفحه‌های آن باید چقدر باشد؟

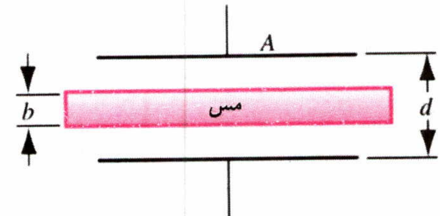
۳۳. یک کابل هم‌محور که در خط انتقال به‌کار می‌رود، به‌صورت یک ظرفیت "توزیع‌شده" به مداری که آن را تغذیه می‌کند پاسخ می‌دهد. ظرفیت $1{,}00\ \text{km}$ از کابلی را که شعاع داخلی آن $0{,}110\ \text{mm}$ و شعاع خارجی آن $0{,}588\ \text{mm}$ است محاسبه کنید. فرض کنید فضای بین دو رسانا با پلی‌استرین پر شده باشد.

۳۴. می‌خواهید خازن قابل حملی طراحی کنید که بتواند $250\ \text{kJ}$ انرژی در خود ذخیره کند. برای این منظور یک خازن با صفحه‌های موازی پر از دی‌الکتریک در نظر بگیرید. (الف) با استفاده از یکی از مواد دی‌الکتریک ارائه‌شده در جدول ۲۹ـ۲ که در آن استقامت دی‌الکتریک نیز مشخص شده است کمترین حجم قابل حصول برای این خازن چقدر است؟ (ب) خازنهای نوع جدید با عملکرد عالی می‌توانند $250\ \text{kJ}$ انرژی را در حجم $0{,}087\ \text{m}^3$ ذخیره کنند. اگر فرض کنیم که استقامت دی‌الکتریکی مادهٔ مصرف‌شده در آنها همان استقامت دی‌الکتریکی قسمت (الف) است، ثابت دی‌الکتریکی آنها باید چقدر باشد؟

۳۵. از شما خواسته شده است خازنی بسازید که ظرفیت آن در حدود $1000\ \text{pF}$ و اختلاف پتانسیل فروریزش الکتریکی آن افزون بر $10\ \text{kV}$ باشد. به فکر می‌افتید که از لیوان شیشه‌ای (پیرکس) بلند که جدار داخلی و خارجی آن را با ورقهٔ نازک آلومینیمی (دو انتهای آن را نادیده بگیرید) پوشانده‌اید برای این منظور استفاده کنید. (الف) ظرفیت و (ب) اختلاف پتانسیل فروریزش این خازن چقدر است؟ ارتفاع لیوان مورد استفاده برای این منظور $15\ \text{cm}$، شعاع داخلی آن $3{,}6\ \text{cm}$، و شعاع خارجی آن $3{,}8\ \text{cm}$ است.

۳۶. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۸، فرض کنید وقتی تیغهٔ دی‌الکتریک را وارد خازن می‌کنیم باتری به خازن متصل باشد. کمیتهای (الف) ظرفیت، (ب) بار موجود روی صفحه‌های خازن، (ج) میدان الکتریکی در گافهای هوای بین دو صفحه، و (د) میدان الکتریکی در داخل تیغهٔ دی‌الکتریک را پس از آنکه تیغه وارد خازن شد، محاسبه کنید.

۳۷. یک تیغهٔ مسی به ضخامت b را مطابق شکل ۳۰ـ۲۷، بین صفحه‌های یک خازن با صفحه‌های موازی قرار داده‌ایم. (الف) ظرفیت خازن پس از قرارگرفتن تیغه در فاصلهٔ بین صفحه‌ها، چقدر است؟ (ب) اگر بار الکتریکی q روی صفحه‌های خازن ثابت نگه داشته شود، نسبت انرژی ذخیره‌شده قبل از قرار دادن تیغه را به انرژی ذخیره‌شدهٔ بعد از آن، معین کنید. (ج) به هنگام قرار دادن تیغه در فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن چقدر کار روی آن انجام شده است؟ آیا تیغه به داخل خازن کشیده می‌شود یا اینکه باید آن را با فشار وارد خازن کرد؟



شکل ۳۰ـ۲۷ تمرین ۳۷.

۳۸. با مراجعه به تمرین۳۷، فرض کنید که به‌جای بار الکتریکی، اختلاف پتانسیل ΔV ثابت می‌ماند. تمرین را مجدداً برای این حالت حل کنید.

۳۹. یک خازن با صفحه‌های موازی به ظرفیت $112\ \text{pF}$، مساحت صفحهٔ $96{,}5\ \text{cm}^2$. دی‌الکتریک میکا ($\kappa_e = 5{,}40$) در اختیار داریم. در اختلاف پتانسیل $55{,}0\ \text{V}$ کمیتهای (الف) شدت میدان الکتریکی در میکا، (ب) مقدار بار آزاد روی هر صفحه، و (ج) مقدار بار القاشدهٔ سطحی را محاسبه کنید.

۴۰. به هر یک از دو صفحهٔ موازی به مساحت $110\ \text{cm}^2$ بارهای مساوی و با علامتهای مخالف به مقدار $890\ \text{nC}$ داده شده است. میدان الکتریکی در دی‌الکتریکی که فضای بین دو صفحه را پر می‌کند $1{,}40\ \text{MV/m}$ است. (الف) ثابت دی‌الکتریک ماده را محاسبه کنید. (ب) مقدار باری که روی هر یک از دو سطح دی‌الکتریک القا می‌شود تعیین کنید.

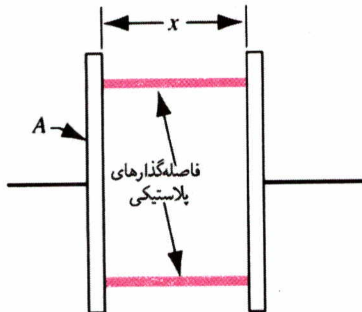
مسئله‌ها

۱. در بخش ۳۰ـ۲، ظرفیت یک خازن استوانه‌ای را محاسبه کردیم. با استفاده از تقریب $\ln(1+x) \approx x$ وقتی که $x \ll 1$ (پیوست ط)، نشان دهید که ظرفیت این خازن در صورتی که فاصلهٔ بین دو استوانه کوچک باشد به ظرفیت خازن با صفحه‌های موازی تبدیل می‌شود.

۲. قرار است خازنی طراحی شود تا در محیطی که دما نوسان دارد، ظرفیت آن ثابت بماند. شکل ۳۰ـ۲۸ خازنی از نوع خازن با صفحه‌های موازی را با "فاصله گذار" پلاستیکی به منظور موازی نگه‌داشتن صفحه‌ها نشان می‌دهد. (الف) نشان دهید که آهنگ تغییر ظرفیت C با دمای T از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{dC}{dT} = C\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\right)$$

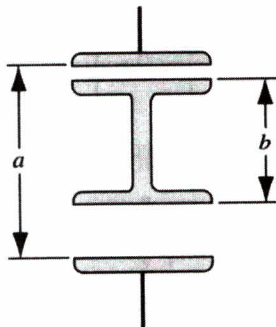
که در آن A مساحت هر یک از صفحه‌ها و x فاصلهٔ بین آنهاست. (ب) اگر صفحه‌ها از جنس آلومینیم باشند، ضریب انبساط گرمایی فاصله‌گذارها باید چقدر باشد تا ظرفیت خازن با دما تغییر نکند؟ (تأثیر حضور فاصله‌گذارها بر ظرفیت خازن را نادیده بگیرید.)



شکل ۳۰ـ۲۸ مسئلهٔ ۲.

۳. در شکل ۳۰ـ۲۹ دو خازن را نشان داده‌ایم که به‌طور سری بسته شده‌اند و بخش صلب میانی به طول b آن را می‌توان در امتداد قائم جابه‌جا کرد. نشان دهید که ظرفیت معادل این مجموعهٔ سری به محل و موقعیت بخش صلب میانی بستگی ندارد و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

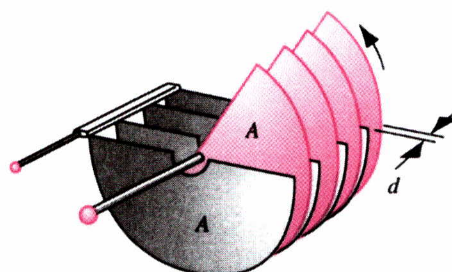
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a-b}$$



شکل ۳۰ـ۲۹ مسئلهٔ ۳.

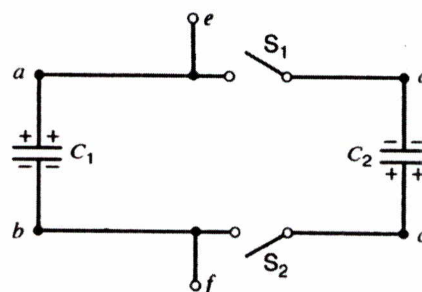
۴. در شکل ۳۰ـ۳۰، یک خازن متغیر با دی‌الکتریک هوا را نشان داده‌ایم که برای تنظیم رادیو به‌کار می‌رود. صفحه‌ها یک در میان به‌هم متصل شده‌اند. یک دسته از این صفحه‌ها در جای خود ثابت است و دستهٔ دیگر می‌تواند بچرخد. مجموعه‌ای متشکل از n صفحه را درنظر بگیرید که دارای قطبیت متناوب هستند. مساحت هر صفحهٔ A و فاصلهٔ بین دو صفحهٔ مجاور برابر d است. نشان دهید که بیشینهٔ ظرفیت این خازن عبارت است از:

$$C = \frac{(n-۱)\epsilon_\circ A}{d}$$



شکل ۳۰ـ۳۰ مسئلهٔ ۴.

۵. در شکل ۳۰ـ۳۱، خازنهای $C_۱ = ۱{,}۱۶\mu F$ و $C_۲ = ۳{,}۲۲\mu F$، هر یک تا اختلاف پتانسیل $\Delta V = ۹۶{,}۶\,V$ باردار شده‌اند ولی قطبیت آنها عکس یکدیگر است، به‌طوری که نقطه‌های a و c در طرف صفحه‌های مثبت خازنهای $C_۱$ و $C_۲$ قرار دارند و نقطه‌های b و d در طرف صفحه‌های منفی آن خازنها هستند. اکنون کلیدهای $S_۱$ و $S_۲$ را می‌بندیم. (الف) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های e و f چقدر است؟ (ب) بار روی خازن $C_۱$ چقدر است؟ (ج) بار روی خازن $C_۲$ چقدر است؟

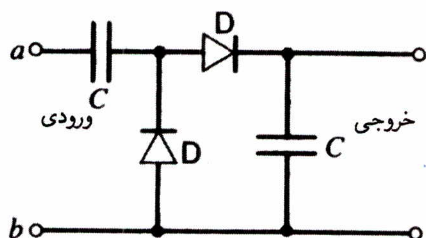


شکل ۳۰ـ۳۱ مسئلهٔ ۵.

۶. در شکل ۳۰ـ۳۲ وقتی کلید S در سمت چپ قرار می‌گیرد، صفحه‌های خازن $C_۱$ به اختلاف پتانسیل $\Delta V_\circ$ می‌رسند. خازنهای $C_۲$ و $C_۳$ در آغاز بدون بارند. سپس کلید را در طرف راست قرار می‌دهیم. در این حالت بارهای $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ مربوط به خازنهای $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ چقدر است؟

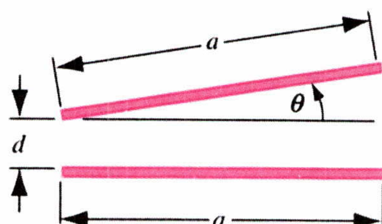
شکل ۳۰ـ۳۲ مسئلهٔ ۶.

۷. در شکل ۳۰ـ۳۳ دو خازن یکسان به ظرفیت C را با دو دیود (ایده‌آل) D در یک مولد نشان داده‌ایم. باتری ۱۰۰ V را به پایانه‌های ورودی به‌صورتهای زیر می‌بندیم، (الف) ابتدا پایانهٔ a را به قطب مثبت و (ب) سپس پایانهٔ b را به قطب مثبت وصل می‌کنیم. در هر یک از این دو حالت، اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های خروجی چقدر است؟ (یک دیود ایده‌آل دارای این ویژگی است که بارهای مثبت فقط در جهت پیکان و بارهای منفی فقط در جهت مخالف پیکان در آن جریان می‌یابند.)



شکل ۳۰ـ۳۳ مسئلهٔ ۷.

۸. خازنی دارای صفحه‌های مربعی به ضلع a است، که مطابق شکل ۳۰ـ۳۴، با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند؛ نشان دهید که برای زاویهٔ کوچک θ ظرفیت خازن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

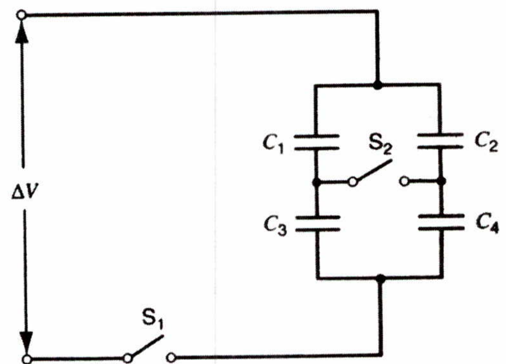


شکل ۳۰ـ۳۴ مسئلهٔ ۸.

$$C = \frac{\epsilon_{\circ} a^{۲}}{d}\left(۱ - \frac{a\theta}{۲d}\right)$$

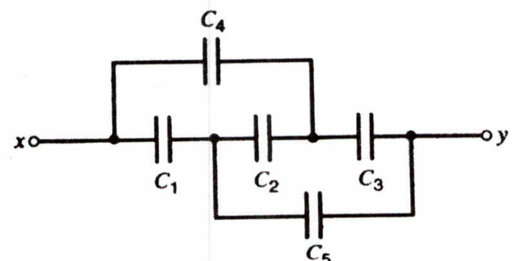
(راهنمایی: خازن را می‌توان به نوارهای باریک تقسیم کرد که عملاً با هم موازی‌اند.)

۹. در شکل ۳۰ـ۳۵، یک باتری اختلاف پتانسیل ΔV برابر با ۱۲ V را تأمین می‌کند. (الف) وقتی که کلید $S_۱$ بسته می‌شود بار روی هرکدام از خازنها را تعیین کنید و (ب) وقتی (بعد از آن) کلید $S_۲$ نیز بسته می‌شود، این بارها را معین کنید. فرض کنید $C_۱ = ۱٫۰\,\mu F$، $C_۲ = ۲٫۰\,\mu F$، $C_۳ = ۳٫۰\,\mu F$، و $C_۴ = ۴٫۰\,\mu F$ است.



شکل ۳۰ـ۳۵ مسئلهٔ ۹.

۱۰. ظرفیت معادل مجموعهٔ خازنهایی که در شکل ۳۰ـ۳۶ بین نقطه‌های x و y قرارگرفته‌اند پیداکنید. فرض کنیدکه فقط $C_۲ = ۱۰\,\mu F$ است و بقیهٔ خازنها همگی دارای ظرفیت $۴٫۰\,\mu F$ باشند. (راهنمایی: اختلاف پتانسیل ΔV را بین x و y اعمال کنید و تمام روابطی را که شامل بارها و اختلاف پتانسیلهای مربوط به هرکدام از خازنها می‌شود بنویسید.)



شکل ۳۰ـ۳۶ مسئلهٔ ۱۰.

۱۱. خازنی را باردار می‌کنیم تا انرژی ذخیره‌شده در آن برابر ۴٫۰ J شود، سپس باتری را از آن جدا می‌کنیم. آنگاه یک خازن بدون بار دیگر را به‌صورت موازی به آن متصل می‌کنیم. (الف) اگر بار به‌طور مساوی توزیع شود، انرژی کل ذخیره‌شده در میدانهای الکتریکی در این حالت چقدر است؟ (ب) مازاد انرژی به کجا رفته است؟

۱۲. یک شاره با مقاومت ویژهٔ $۹٫۴۰\,\Omega\cdot m$ به فضای بین یک خازن با صفحه‌های موازی با ظرفیت ۱۱۰ pF که از هوا پر شده است نشت می‌کند. وقتی که فضای بین صفحه‌ها به‌طورکامل از این شاره پر شود، مقاومت بین صفحه‌ها چقدر است؟

۱۳. (الف) چگالی انرژی مربوط به میدان الکتریکی یک الکترون را (که یک ذره در نظر گرفته می‌شود) در فاصلهٔ r از آن محاسبه کنید. (ب) اکنون فرض کنید که الکترون یک نقطه نیست بلکه کره‌ای است به شعاع R که بار به‌طور یکنواخت در سطح آن توزیع شده است. انرژی مربوط به میدان الکتریکی خارجی الکترون در خلأ را برحسب R تعیین کنید. (ج) حالا، اگر این انرژی را با استفاده از رابطهٔ $E_{\circ} = mc^{۲}$ به جرم الکترون مربوط کنید، می‌توانید مقداری را برای R محاسبه کنید. این شعاع را به‌صورت عددی محاسبه کنید؛ این مقدار اغلب شعاع کلاسیک الکترون نامیده می‌شود.

۱۴. نشان دهید که صفحه‌های یک خازن تخت با نیرویی که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید یکدیگر را جذب می‌کنند

$$F = \frac{q^{۲}}{۲\epsilon_{\circ} A}$$

با محاسبهٔ کار مورد نیاز برای افزایش فاصلهٔ بین صفحه‌ها از x به $x + dx$ و ثابت نگه‌داشتن مقدار بار q این موضوع را ثابت کنید.

۱۵. با استفاده از نتیجهٔ مسئله ۱۴، نشان دهید که نیرو به‌ازای واحد سطح (تنش الکتروستاتیکی) وارد بر هر یک از صفحه‌های خازن از رابطهٔ $(\epsilon_{\circ} E^{۲})۱/۲$ به‌دست می‌آید. در واقع، در حالت کلی، این نتیجه برای هر رسانایی با هر شکلی با میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ روی سطح آن، صادق است.

۱۶. به حباب صابونی به شعاع $R_{\circ}$ به آرامی بار q داده می‌شود. به علت رانش متقابل بارهای سطحی، شعاع اندکی افزایش می‌یابد و به R می‌رسد. به علت انبساط حباب، فشار هوای داخل حباب به مقدار $p(V_{\circ}/V)$ فرو می‌افتد، که در آن p فشار جو، $V_{\circ}$ حجم اولیه، و V حجم نهایی حباب است. نشان دهید که

$$q^{۲} = ۳۲\pi^{۲}\epsilon_{\circ} pR(R^{۳} - R_{\circ}^{۳})$$

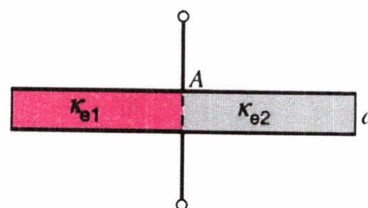
[راهنمایی: نیروهای وارد بر سطح کوچکی از حباب باردار را در نظر بگیرید. این نیروها از عاملهای زیر ناشی می‌شوند (۱) فشارگاز، (۲) فشار جو، (۳) تنش الکتروستاتیکی؛ مسئلهٔ ۱۵ را ببینید.]

۱۷. یک اتاقک یونش استوانه‌ای دارای یک سیم آند مرکزی به شعاع ۱۸۰ mm ر۰ و یک کاتد استوانه‌ای هم‌محور با آن با شعاع ۱۱ mm ر۰ است. این اتاقک با گازی انباشته‌شده که استقامت دی‌الکتریکی آن ۲٫۲۰ MV/m است. بیشترین اختلاف پتانسیلی را که می‌توان بین کاتد و آند اعمال کرد، معین کنید و توجه داشته باشید که قبل از اینکه تابش از پنجرهٔ اتاقک به داخل آن نفوذ کند گاز نباید دستخوش فروریزش الکتریکی شود.

۱۸. همان‌طور که در شکل ۳۰ـ۳۷ نشان داده‌ایم یک خازن با صفحه‌های موازی را با دو مادهٔ دی‌الکتریک پر کرده‌ایم. نشان دهید که ظرفیت این خازن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$C = \frac{\epsilon_\circ A}{d}\left(\frac{\kappa_{e۱} + \kappa_{e۲}}{۲}\right)$$

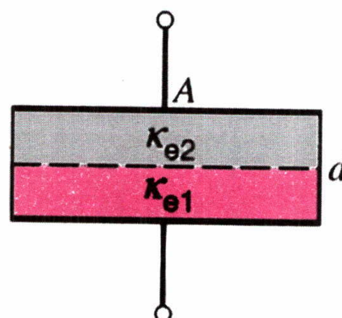
درستی این فرمول را برای تمام موارد حدی که می‌توانید تصور کنید، بررسی کنید. (راهنمایی: آیا می‌توانید درنظرگرفتن این مجموعه را به‌صورت دو خازن موازی توجیه کنید؟)



شکل ۳۰ـ۳۷ مسئلهٔ ۱۸.

۱۹. همان‌طورکه در شکل ۳۰ـ۳۸ نشان داده‌ایم فضای بین صفحه‌های یک خازن تخت را با دو مادهٔ دی‌الکتریک پر کرده‌ایم. نشان دهید که ظرفیت این خازن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

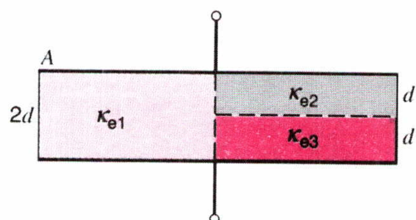
$$C = \frac{۲\epsilon_\circ A}{d}\left(\frac{\kappa_{e۱}\kappa_{e۲}}{\kappa_{e۱} + \kappa_{e۲}}\right)$$



شکل ۳۰ـ۳۸ مسئلهٔ ۱۹.

درستی این فرمول را برای تمام موارد حدی ممکن، بررسی کنید. (راهنمایی: آیا می‌توانید درنظرگرفتن این مجموعه را به‌صورت دو خازن سری توجیه کنید؟)

۲۰. ظرفیت خازن نشان داده‌شده در شکل ۳۰ـ۳۹ چقدر است؟



شکل ۳۰ـ۳۹ مسئلهٔ ۲۰.

۲۱. یک خازن با صفحه‌های موازی که مساحت هر یک از صفحه‌های آن A و فاصلهٔ بین آنها d است تا اختلاف پتانسیل ΔV باردار شده است. سپس باتری را از این خازن جدا کرده و صفحه‌ها را از هم دور می‌کنیم تا فاصلهٔ بین آنها به $۲d$ افزایش پیدا کند. رابطه‌ای برحسب A، d، و ΔV برای (الف) اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن در وضعیت جدید، (ب) انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیه و نهایی در خازن، و (ج) کار لازم برای دور کردن صفحه‌ها از یکدیگر را به‌دست آورید.

۲۲. در خازن مطرح‌شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۹ (شکل ۳۰ـ۱۵)، (الف) چه کسری از انرژی ذخیره‌شده در خازن در گافهای هوای بین دو صفحه ذخیره می‌شود؟ (ب) چه کسری در تیغه ذخیره شده است؟

۲۳. مساحت هر کدام از صفحه‌های یک خازن تخت $\text{m}^۲$ ۱۱۸ر۰ و فاصلهٔ بین آنها ۱٫۲۲ cm است. این خازن را با یک باتری تا اختلاف پتانسیل ۱۲۰ V باردار و سپس باتری را قطع می‌کنیم. یک تیغهٔ دی‌الکتریک به ضخامت ۴٫۳۰ mm و ثابت ۴٫۸۰ را به‌طور متقارن بین صفحه‌ها قرار می‌دهیم. (الف) ظرفیت خازن را قبل از ورود تیغهٔ دی‌الکتریک معین کنید. (ب) ظرفیت این خازن پس از آنکه دی‌الکتریک بین صفحه‌های آن قرارگرفت چقدر است؟ (ج) بار آزاد روی هر صفحه، q، قبل و بعد از قرارگرفتن تیغه در داخل خازن چقدر است؟ (د) شدت میدان الکتریکی را در فضای بین صفحه‌ها و تیغهٔ دی‌الکتریک معین کنید. (هـ) شدت میدان الکتریکی در داخل دی‌الکتریک چقدر است؟ (و) وقتی تیغهٔ دی‌الکتریک در موقعیت مورد نظر قرار گرفت اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن چقدر است؟ (ز) در فرایند قرار دادن تیغهٔ دی‌الکتریک در داخل خازن چقدر کار خارجی باید انجام شود؟

۲۴. یک تیغهٔ دی‌الکتریک به ضخامت b را بین صفحه‌های یک خازن تخت که فاصلهٔ بین صفحه‌های آن d است قرار داده‌ایم. نشان

دهید که ظرفیت این خازن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_\circ A}{\kappa_e d - b(\kappa_e - ۱)}$$

(راهنمایی: با بهره‌گیری از روال مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰ـ۹ این فرمول را به‌دست آورید.) آیا این فرمول مقدار عددی صحیح را برای آن مسئلهٔ نمونهٔ پیش‌بینی می‌کند؟ تحقیق کنید که این فرمول برای موارد ویژه $b = ۰$، $\kappa_e = ۱$، و $b = d$ جوابهای منطقی ارائه می‌دهد.

مسئله‌های کامپیوتری

۱. برای یافتن ظرفیت معادل بین هر دو نقطه‌ای (مانند A و B) در آرایهٔ بینهایت خازن شکل ۳۰ـ۲۶، که به‌وسیلهٔ یک خازن از هم جدا شده‌اند از نتیجه‌های تمرین ۱۹ بهره بگیرید. این مسئله به ساده‌ترین وجه با عملیات تکراری حل می‌شود و می‌توان آن را روی یک برگهٔ کاغذ در کمتر از یک دقیقه برنامه‌ریزی و حل کرد!

۲. مسئلهٔ کامپیوتری ۱ را به‌جای صفحهٔ بینهایت برای یک چنبره حل کنید. با یک شبکهٔ مربعی متشکل از ۱۰ × ۱۰ خازن مسئله را شروع کنید. لبه‌های مقابل را به‌هم وصل کنید تا یک استوانه به‌وجود آورید و سپس دو انتهای استوانه را به‌هم متصل کنید تا یک چنبره بسازید. اگر اندازهٔ شبکهٔ اولیه دو برابر شود جواب نهایی چقدر تغییر خواهد کرد؟

۳۱

مدارهای جریان مستقیم (DC)

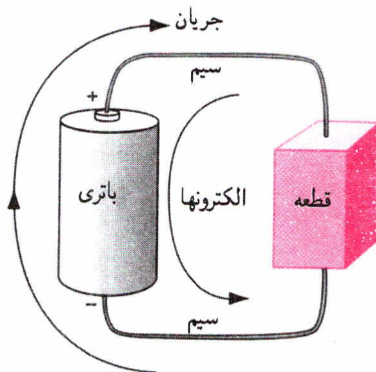
در فصل ۲۹ دربارهٔ برخی ویژگیهای عمومی جریان و مقاومت بحث کردیم. در این فصل، به مطالعهٔ رفتار مدارهای الکتریکی ویژه‌ای می‌پردازیم که شامل اجزای مقاومتی هستند، که ممکن است خود مقاومتها باشند یا مقاومتهای داخلی اجزای مدار مانند باتری یا سیم.

در این فصل فقط مدارهای جریان مستقیم (DC) را بررسی می‌کنیم، که در آنها جهت جریان برحسب زمان تغییر نمی‌کند. در مدارهای DC که تنها شامل باتری و مقاومت هستند، مقدار جریان برحسب زمان تغییر نمی‌کند، در حالی‌که در مدارهای DC شامل خازن ممکن است مقدار جریان تابع زمان نیز باشد. مدارهای جریان متناوب (AC) را، که در آنها جهت جریان به‌صورت متناوب تغییر می‌کند در فصل ۳۷ مطالعه می‌کنیم.

۳۱ـ۱ جریان الکتریکی

در بخش ۲۹ـ۳، شارش بار الکتریکی در رساناها را مورد بحث قرار دادیم. جریان الکتریکی i عبارت است از مقدار بار خالصی که در واحد زمان از یک عنصر سطح، در هر موقعیت مشخصی از رسانا، عبور می‌کند. اغلب اوقات، به کل جریان گذرنده از مدار توجه داریم، که در آن حالت عنصر سطح برابر تمامی سطح مقطع سیمهایی می‌شود که اجزای مدار را متصل می‌کند.

در شکل ۳۱ـ۱ مسئلهٔ کلی را که در این فصل مورد تحلیل قرار می‌دهیم، نشان داده‌ایم. یک باتری به یک "قطعه" متصل شده است. این قطعه ممکن است یک تک‌جزء از مدار، مانند مقاومت، خازن، یا مجموعه‌ای از عناصر مدار باشد. باتری پایانهٔ بالایی را در پتانسیل V_+ و پایانهٔ پایینی را در پتانسیل V_- نگه می‌دارد. در باتری ایده‌آل، اختلاف پتانسیل $V_+ - V_-$ بین پایانه‌های آن مستقل از مقدار جریانی است که برای مدار فراهم می‌آورد. همان‌طور که بعداً در این فصل مطالعه



شکل ۳۱ـ۱ باتری به‌وسیلهٔ دو سیم به یک قطعهٔ الکتریکی متصل شده است. جهت جریان برخلاف جهت حرکت الکترونهاست.

خواهیم کرد، برای باتریهای واقعی اختلاف پتانسیل به جریانی که از آن کشیده می‌شود واقعاً وابسته است.

در الکتروستاتیک، رساناها سطوح هم‌پتانسیل هستند، و پتانسیل V_+ در پایانهٔ مثبت باتری ویژگی کل سیمی است که قسمت بالایی قطعه

را به باتری متصل می‌کند. در این مورد، اختلاف پتانسیل $V_+ - V_-$ بین پایانه‌های باتری، بین پایانه‌های بالایی و پایینی قطعه نیز برقرار است. وقتی جریان در سیمها جاری می‌شود، دیگر نتیجه‌گیریهای حاصل از الکتروستاتیک معتبر نیستند؛ به‌ویژه از مطلب ارائه‌شده در بخش ۲۹ـ۴ (معادلهٔ ۲۹ـ۱۲ را ببینید) می‌دانیم که وقتی جریان i در یک رسانا شارش می‌یابد، بین دو سر رسانا اختلاف پتانسیل $\Delta V = iR$ پدید می‌آید. با این همه، معمولاً در مدارها مقاومت سیمها در مقایسه با مقاومت قطعه بسیار کوچک است، و معمولاً چشم‌پوشی از تأثیر سیمها در اختلاف پتانسیل موجه است؛ به‌ویژه، فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه افت پتانسیلی در سیمها روی ندهد و در این مورد اختلاف ولتاژ بین پایانه‌های باتری همان اختلاف پتانسیلی است که در پایانه‌های قطعه پدیدار می‌شود.

باتری را می‌توان به‌عنوان یک "تلمبه یا پمپ" بار الکتریکی در نظر گرفت، که گویی بار مثبت را از طریق باتری از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت می‌برد. در واقع، معمولاً این حرکت الکترونهای دارای بار منفی است که مسئول شارش جریان است. روش دیگر برای تعبیر و تصویر کردن شارش جریان در مدار، آن است که تصور کنیم بارهای دارای بار مثبت از ناحیهٔ دارای پتانسیل بالا در قطعه (آن قسمتی از قطعه که به پایانه مثبت باتری متصل است) به ناحیه‌ای با پتانسیل پایین‌تر (آن قسمتی از قطعه که به پایانهٔ منفی باتری متصل است) "سقوط" می‌کند.

نقش باتری در مدار آن است که اختلاف پتانسیل را برای برقراری شارش بار الکتریکی حفظ کند. باتری سرچشمهٔ الکترونها نیست. الکترونها از باتری می‌گذرند و به هنگام حرکت از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی در داخل باتری انرژی آنها افزایش می‌یابد. وقتی می‌گوییم یک باتری "خالی شده است"، منظورمان این نیست که ذخیرهٔ الکترونهایش "پایان یافته است"؛ بلکه، منظورمان این است که مخزن انرژی آن را (معمولاً یک واکنش شیمیایی)، که مسئول افزایش انرژی الکترونهاست "تخلیه" کرده‌ایم. توجه کنید که در شکل ۳۱ـ۱، الکترونها در تمامی مدار به حرکت درمی‌آیند؛ آنها "از باتری نمی‌آیند".

گرچه در فلزها الکترونها حاملهای بار هستند، در الکترولیتها یا در رساناهای گازی‌شکل (پلاسماها) ممکن است حاملهای بار یونهای مثبت یا منفی، یا هر دو باشند. چون در یک میدان الکتریکی مشخص بارهای با علامتهای مخالف در جهتهای مخالف به حرکت درمی‌آیند؛ برای نشانه‌گذاری جهت جریان به یک قرارداد نیاز داریم. بار مثبت که در یک جهت حرکت می‌کند از نظر اثرهای خارجی تقریباً معادل بار منفی است که در جهت مخالف حرکت می‌کند. از آن رو، به خاطر سادگی و سازگاری جبری، قرارداد زیر را می‌پذیریم

> جهت جریان همانا جهت حرکت بارهای مثبت است، حتی اگر حاملهای واقعی بار الکتریکی، منفی باشند.

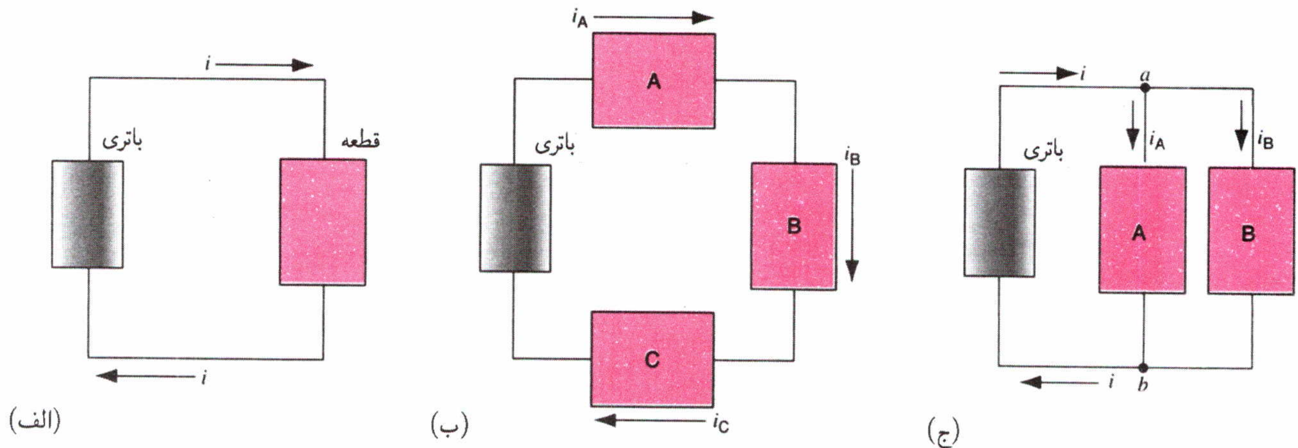
اگر حاملهای بار، منفی باشند، فقط در جهت خلاف پیکان جریان حرکت می‌کنند (که این رفتار را در شکل ۳۱ـ۱ نشان داده‌ایم).

در اغلب موارد، مدارهای الکتریکی را برمبنای جهت جریان مفروض تحلیل می‌کنیم، و در نظر نمی‌گیریم که حاملهای بار واقعی مثبت یا منفی‌اند. در موارد نادری (مثلاً اثر هال در بخش ۳۲ـ۴) باید علامت حاملهای بار را مورد توجه قرار دهیم.

پایستگی بار

وقتی که در آغاز باتری را به قطعه وصل می‌کنیم، مدار به‌صورت نامنظمی رفتار می‌کند. این رفتار مشابه وقتی است که شیر آب شیلنگ متصل به یک آبپاش را در یک باغچه باز می‌کنید. ابتدا آب به سرعت در شیلنگ جاری می‌شود و گردابهای کوچک و بزرگ را به‌وجود می‌آورد. وقتی به آبپاش می‌رسد، در آغاز ممکن است برحسب تصادف از برخی سوراخها خارج شود و از بعضی دیگر خارج نشود. پس از گذشت چند ثانیه جریان پایا برقرار شده، آب با آهنگ ثابت از همهٔ نقطه‌ها جاری می‌شود. در مدارهای الکتریکی، معمولاً از این رفتار اولیه (که رفتار گذرا نامیده می‌شود) چشم‌پوشی می‌کنیم و فقط حالت پایا را که خیلی سریع (در محدودهٔ چند نانوثانیه) حاصل می‌شود مورد توجه قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که، تحت شرایط پایا، بار در هیچ نقطه‌ای از سیم ایده‌آل مورد مطالعه انباشته یا تخلیه نشود. در اصطلاح شارش شاره، یعنی در داخل سیم هیچ‌گونه چشمه یا چاهکی برای بارهای الکتریکی وجود ندارد. وقتی که در مطالعهٔ شاره‌های تراکم‌ناپذیر این فرض را پذیرفتیم، نتیجه گرفتیم که آهنگ شارش شاره از هر سطح مقطعی از لوله ثابت است حتی اگر مساحت سطح مقطع تغییر کند. شاره در جاهایی که لوله تنگ‌تر است سریع‌تر حرکت می‌کند و در جاهایی که فراخ‌تر است کندتر به حرکت درمی‌آید، ولی آهنگ حجم شارش یافته، که شاید برحسب لیتر بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود، ثابت می‌ماند. به همان ترتیب، جریان الکتریکی i برای تمامی سطح مقطعهای رسانا یکسان باقی می‌ماند، حتی اگر مساحت سطح مقطعها در نقطه‌های مختلف با هم تفاوت داشته باشند. چگالی جریان $\vec{j}$ (جریان در یکای مساحت) برحسب مساحت سطح مقطع تغییر می‌کند، ولی جریان i ثابت می‌ماند.



شکل ۳۱ـ۲ (الف) مدار شکل ۳۱ـ۱ به‌صورت نمادین. (ب) جریان یکسانی به‌طور پیمانی از قطعه‌های A، B، و C می‌گذرد. (ج) جریان در گره a تقسیم می‌شود و در گره b دوباره با هم جمع می‌شوند.

در شکل ۳۱ـ۲(الف) مدار شکل ۳۱ـ۱ را با نماد ساده‌تری نمایش داده‌ایم. قطعه را فقط با یک چهارگوش نشان داده‌ایم. توجه کنید جریانی که به قطعه وارد می‌شود برابر جریانی است که از قطعه خارج می‌شود. این نمونه‌ای از پایستگی بار است؛ قطعه هیچ بار الکتریکی خالصی را در خود نگه نمی‌دارد. به‌ازای هر الکترونی که از یک سر وارد آن می‌شود، یک الکترون از سر دیگر آن خارج می‌شود.

در شکل ۳۱ـ۲(ب) مدار دیگری را نشان داده‌ایم که در آن جریان به‌طور پیاپی از سه قطعه که با برچسبهای A، B، و C نشان داده شده‌اند می‌گذرد. جریان i_A در قطعهٔ A دقیقاً برابر جریان i_B در قطعهٔ B و نیز برابر با جریان i_C در قطعهٔ C است؛ یعنی $i_A = i_B = i_C$. هیچ جریانی در گذر از میان عنصرهای مدار "مصرف" نمی‌شود. شکل ۳۱ـ۲(ب) نمونه‌ای از عنصرهای مدار است که به‌صورت سری (متوالی یا پیاپی) به‌هم متصل شده‌اند. در اینجا جریان یکسانی به‌طور پیاپی از هر یک از عنصرهای مدار می‌گذرد.

در شکل ۳۱ـ۲(ج) جریان را در ترکیب دیگری از عنصرهای مدار نشان داده‌ایم. در اینجا وقتی جریان به نقطهٔ aی مدار می‌رسد باید تقسیم شود، به‌طوری که مقدار i_A از قطعهٔ A می‌گذرد و مقدار i_B از قطعهٔ B. (مقدارهای نسبی جریان در A و B، که در این مبحث مهم نیستند، به ویژگیهای A و B وابسته‌اند.) در نقطهٔ b جریانها باید دوباره با هم جمع شوند. چون هیچ‌گونه باری در نقطهٔ a گرفتار نمی‌شود، جریانی که به نقطهٔ a وارد می‌شود باید دقیقاً برابر با جریانی باشد که از آن خارج می‌شود، یا به عبارتی $i = i_A + i_B$. به‌طور مشابه، جریانی که به نقطهٔ b وارد می‌شود باید برابر همان جریانی باشد که از b خارج می‌شود، یعنی باید $i_A + i_B = i$. در تحلیل مدارها، این رابطه را اغلب قاعدهٔ نقطهٔ اتصال یا قاعدهٔ گره می‌خوانیم:

> در هر گرهی در مدار الکتریکی، کل جریانی که به گره وارد می‌شود باید برابر باشد با کل جریانی که از گره خارج می‌شود.

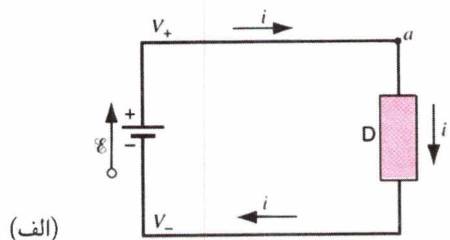
در این عبارت، واژهٔ "گره" به هر نقطه‌ای از مدار گفته می‌شود که در آن چند سیم به‌هم متصل می‌شود، مانند نقطهٔ a یا نقطهٔ b در شکل ۳۱ـ۲(ج). قاعدهٔ گره (که گاهی به نام قاعدهٔ اول کیرشهوف نامیده می‌شود) در واقع گزاره‌ای دربارهٔ پایستگی بار الکتریکی است.

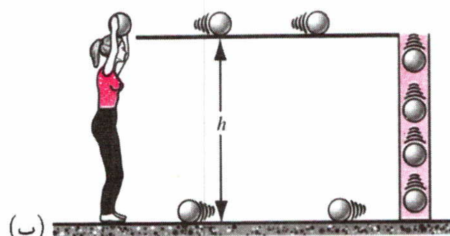
شکل ۳۱ـ۲(ج) نمونه‌ای از اتصال موازی عنصرهای مدار است. ویژگی اتصال موازی آن است که جریان باید تقسیم شود تا به‌طور جداگانه از عنصرهای منفرد مدار بگذرد و سپس دوباره با هم ترکیب شوند.

۳۱ـ۲ نیروی محرکهٔ الکتریکی

برای حرکت دادن بار در مدار، برای اغلب مدارهای الکتریکی به یک چشمهٔ انرژی خارجی نیاز داریم. بنابراین مدار باید شامل وسیله‌ای باشد که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از مدار را حفظ کند، درست همان‌طور که شاره برای جریان نیاز به‌وسیله‌ای (تلمبه ـ پمپ) دارد که اختلاف فشار بین دو نقطه را حفظ کند.

به هر وسیله‌ای که در مدار الکتریکی این وظیفه را انجام دهد چشمهٔ (یا جایگاه) نیروی محرکهٔ الکتریکی می‌گوییم (با نشانهٔ $\mathscr{E}$؛ علامت اختصاری emf). گاهی بهتر است چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی را سازوکاری درنظر بگیریم که یک "تپهٔ" پتانسیل به‌وجود می‌آورد و بار الکتریکی را به "بالای تپه" می‌رساند که از آنجا بارها در "سراشیبی تپه" در بقیهٔ مدار جاری می‌شوند. چشمهٔ عادی نیروی محرکهٔ الکتریکی یک باتری معمولی است؛ نمونهٔ دیگر آن مولد برق





شکل ۳۱ـ۳ (الف) یک مدار الکتریکی ساده، که در آن نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ (یک باتری) روی حاملهای بار کار انجام می‌دهد و جریان پایایی در قطعهٔ D برقرار می‌کند. (ب) یک مشابه گرانشی، که در آن کاری که شخص انجام می‌دهد جریان پایایی از توپهای بولینگ را در یک محیط چسبنده حفظ می‌کند.

در نیروگاههاست. باتریهای خورشیدی چشمه‌های دیگر نیروی محرکهٔ الکتریکی هستند که هم در سفینه‌های فضایی از آنها استفاده می‌شود و هم در ماشین‌حسابهای جیبی. چشمه‌های کمیاب‌تر نیروی محرکهٔ الکتریکی عبارت‌اند از پیلهای سوختی (که در تأمین انرژی شاتلهای فضایی به‌کار می‌روند) و ترموپیلها. سیستمهای زیست‌شناختی، از جمله قلب انسان، نیز به مثابه چشمه‌های نیروی محرکهٔ الکتریکی عمل می‌کنند.

در شکل ۳۱ـ۳(الف) یک چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی را نشان داده‌ایم که به یک قطعهٔ الکترونیکی متصل شده است. این قطعه ممکن است مقاومت، خازن، یا هر عنصر مدار دیگری باشد. نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار به‌وسیلهٔ پیکانی که در کنار چشمه قرار گرفته نشان داده می‌شود و در جهتی است که اگر نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌تنهایی عمل کند باعث حرکت حامل بار مثبت در مدار خارجی در آن جهت می‌شود. برای اینکه این پیکان را با پیکان جریان اشتباه نکنیم، یک دایرهٔ کوچک در دُم پیکان نیروی محرکهٔ الکتریکی رسم می‌کنیم. در مدار خارجی، حاملهای بار مثبت در جهت نشان داده‌شده با پیکان جریان، که با علامت i نشانه‌گذاری شده است، به حرکت درمی‌آیند. به عبارت دیگر، چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار شکل ۳۱ـ۳(الف)، یک جریان ساعتگرد برقرار می‌کند.

رایج‌ترین چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی که مورد استفاده قرار می‌دهیم یک باتری معمولی است. همان‌طورکه در شکل ۳۱ـ۳(الف) نشان داده‌ایم، باتری در مدار به‌وسیلهٔ دو خط موازی با طولهای نامساوی نمایش داده می‌شود. خط بلندتر همواره نشانگر پایانهٔ مثبت باتری است. چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی (یا باتری) همواره پایانهٔ بالایی را در پتانسیل بالاتر V_+ و پایانهٔ پایینی آن را در پتانسیل کمتر V_- نگه می‌دارد. باتریهای معمولی (اندازه‌های AAA، AA، C، یا D) که در چراغ قوه یا دستگاههای پخش CD استفاده می‌کنیم دارای emf برابر ۱٫۵ ولت است. در بخش بعدی خواهیم دید که نیروی محرکهٔ الکتریکی (emf) باتری فقط در صورتی برابر با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های آن $(V_+ - V_-)$ است که در مدار هیچ جریانی وجود نداشته باشد یا اینکه مقاومت داخلی باتری چشم‌پوشیدنی باشد.

چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی باید بتواند روی حاملهای باری که وارد آن می‌شود کار انجام دهد. در داخل جایگاه، چشمه روی بار مثبت اثر می‌کند و آن را از یک نقطه با پتانسیل کم (پایانهٔ منفی) از داخل چشمه به یک نقطه با پتانسیل زیاد (پایانهٔ مثبت) می‌برد. سپس بارها در مدار خارجی به حرکت در می‌آیند، و در این فرایند انرژی تأمین‌شده توسط چشمه را تلف می‌کنند. سرانجام، این بارها به پایانهٔ منفی باز می‌گردند، که از آنجا نیروی محرکهٔ الکتریکی دوباره آنها را به پایانهٔ مثبت می‌برد و چرخه ادامه می‌یابد. (توجه کنید که، بنابر قرارداد متداول، مدار را طوری تحلیل می‌کنیم که گویی بارهای مثبت در مدار جاری می‌شوند. حرکت واقعی حاملهای بار که مربوط به الکترونهاست در جهت مخالف صورت می‌گیرد.)

وقتی که جریان پایایی در مدار شکل ۳۱ـ۳(الف) برقرار شد، بار dq در زمان dt از هر مقطعی از مدار می‌گذرد. به‌ویژه، این بار از سر پتانسیل کم چشمه نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ وارد و از سر پتانسیل زیاد آن خارج می‌شود. چشمه باید کار dW را روی حاملهای بار (مثبت) انجام دهد تا آنها را وادار کند که به پتانسیل بالاتر بروند. نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ چشمه به‌صورت کار به‌ازای واحد بار تعریف شده است، یا

$$\mathscr{E} = dW/dq \qquad (۳۱\text{ـ}۱)$$

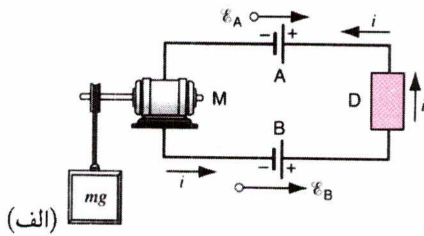
یکای نیروی محرکهٔ الکتریکی ژول بر کولن، یعنی همان ولت است. توجه کنید که از معادلهٔ (۳۱ـ۱) نیروی محرکهٔ الکتریکی واقعاً یک نیرو نیست؛ یعنی، آن را برحسب نیوتون اندازه‌گیری نمی‌کنیم. این نام از روزهای اولیهٔ تاریخچهٔ این موضوع سرچشمه می‌گیرد.

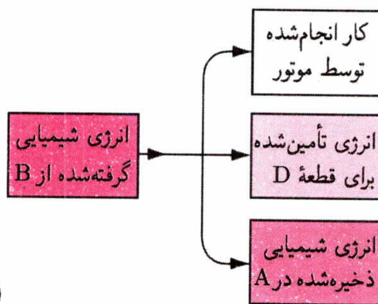
چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی برای مدار انرژی تأمین می‌کند. این انرژی ممکن است از فرایندهای متفاوتی نظیر: شیمیایی (مانند باتری یا پیل سوختی)، مکانیکی (مولد یا ژنراتور)، گرمایی (ترموپیل)، یا

تابشی (باتری خورشیدی) فراهم شود. جریان برقرارشده در مدار شکل ۳۱ـ۳(الف) انرژی را از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی به قطعهٔ D منتقل می‌کند. اگر قطعهٔ D باتری دیگری باشد که به‌وسیلهٔ چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی باردار پُر می‌شود، در آن صورت انرژی انتقال‌یافته به‌صورت انرژی شیمیایی جدیدی که در باتری ذخیره می‌شود جلوه می‌کند. اگر قطعه یک مقاومت باشد، انرژی انتقال‌یافته به‌صورت انرژی داخلی پدیدار می‌شود (که احتمالاً به‌صورت افزایش دما مشاهده می‌شود) و ممکن است که پس از آن به‌صورت گرما به محیط انتقال یابد. اگر قطعه یک خازن باشد، در آن صورت انرژی انتقال‌یافته به‌صورت انرژی پتانسیل ذخیره‌شده در میدان الکتریکی خازن درمی‌آید. در هر یک از این موارد، پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که مقدار انرژی ازدست‌رفته توسط باتری باید برابر با انرژی انتقال‌یافته به، تلف‌شده توسط، یا ذخیره‌شده در قطعهٔ D باشد.

در شکل ۳۱ـ۳(ب) مشابه گرانشی شکل ۳۱ـ۳(الف) را نشان داده‌ایم. در تصویر پایینی شخص به هنگام بلندکردن توپهای بولینگ از زمین تا تاقچه روی آنها کار انجام می‌دهد. توپها آرام و یکنواخت در امتداد تاقچه می‌غلتند و از انتهای سمت راست تاقچه به داخل یک استوانهٔ پر از روغن چسبناک می‌افتند. این توپها با سرعت ثابتی به ته استوانه فرو می‌روند. در آنجا با استفاده از یک سازوکار ویژه، که در شکل نشان داده نشده است، از یک دریچه خارج می‌شوند و روی کف به طرف چپ می‌غلتند. انرژیی که شخص به این سیستم می‌دهد، سرانجام به‌صورت انرژی داخلی شارهٔ چسبنده در می‌آید و سبب افزایش دما می‌شود. انرژیی که شخص تأمین می‌کند از انرژی داخلی (شیمیایی) او سرچشمه می‌گیرد. گردش بارهای الکتریکی در شکل ۳۱ـ۳(الف)، سرانجام با پایان‌یافتن چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی متوقف می‌شود؛ گردش توپهای بولینگ در شکل ۳۱ـ۳(ب) هم سرانجام وقتی انرژی شخص تمام شد متوقف می‌شود.

در شکل ۳۱ـ۴(الف) مداری شامل دو چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی (دو باتری) A و B، یک قطعهٔ D، و یک موتور الکتریکی ایده‌آل M را که برای بالا بردن وزنه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد نشان داده‌ایم. باتریها چنان متصل شده‌اند که بارهای الکتریکی را در جهتهای مخالف در مدار روانه کنند؛ جهت واقعی جریان در مدار را باتری B مشخص می‌کند، که دارای نیروی محرکهٔ الکتریکی بزرگتری است. در شکل ۳۱ـ۴(ب) تبدیلهای انرژی در این مدار را نشان داده‌ایم. انرژی شیمیایی در باتری B به‌طور پیوسته خالی می‌شود، این انرژی به سه صورت ظاهر می‌شود که در طرف راست شکل نشان داده‌ایم. وقتی





شکل ۳۱ـ۴ $\mathscr{E}_B > \mathscr{E}_A$، به‌طوری که در این مدار تک‌حلقه‌ای باتری B جهت جریان را تعیین می‌کند. (ب) تبدیلهای انرژی در این مدار.

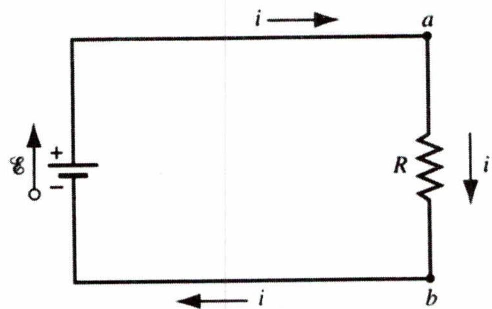
باتری B تخلیه شود باتری A پر می‌شود.

توجه کنید که مدار می‌تواند انرژی را از یک چشمهٔ emf به چشمهٔ دیگری انتقال دهد. در حالت ایده‌آل، فرایند انتقال انرژی وابسته به یک چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی، به مفهوم ترمودینامیکی، برگشت‌پذیر است (بخش ۲۴ـ۱ را ببینید). باتری را می‌توان پُر کرد (به این معنی که چشمهٔ خارجی به ذخیرهٔ انرژی باتری می‌افزاید، نه به این معنی که ما بار مضاعفی به باتری وارد می‌کنیم) یا تخلیه کرد (به این معنی که از آن انرژی می‌گیریم). به‌صورت مشابه، مولد یا ژنراتور را می‌توان به‌طور مکانیکی به حرکت درآورد تا انرژی الکتریکی تولید کند، یا می‌تواند انرژی الکتریکی مصرف کند تا حرکت مکانیکی انجام دهد، مانند موتور.

۳۱ـ۳ تحلیل مدارها

ساده‌ترین مدار الکتریکی تشکیل شده است از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی (مانند باتری) و یک قطعهٔ مداری (مانند مقاومت). مثالهایی از این نوع مدار ممکن است شامل چراغ قوه یا بخاری برقی شود. در شکل ۳۱ـ۵ مداری متشکل از یک باتری ایده‌آل و یک مقاومت R را نشان داده‌ایم. نماد نموداری مقاومت در مدار به‌صورت -ᐯᐯᐯ- است.

در تحلیل مدارها، اغلب هدف ما تعیین مقدار و جهت جریان در مدار است، مشروط بر اینکه نیروی محرکهٔ الکتریکی و مقاومت



شکل ۳۱ـ۵ یک مدار تک‌حلقه‌ای. جریان در همه جای مدار یکسان است. پتانسیل، در داخل باتری از − به + افزایش می‌یابد، و درگذر از مقاومت از a به b (در جهت جریان) کاسته می‌شود.

مدار را داشته باشیم. این مدار را با درنظرگرفتن اختلاف پتانسیل در دو سر هر یک از عناصر مدار تحلیل می‌کنیم. بعداً در همین فصل روش دیگری که مبتنی بر انرژی تأمین یا تلف‌شده توسط هر یک از عنصرهای مدار است مورد توجه قرار می‌دهیم.

نخستین گام در تحلیل مدار حدس‌زدن جهت جریان است. معمولاً تلاش می‌کنیم که بهترین حدس را داشته باشیم؛ اگر جهت جریان را اشتباه در نظر بگیریم به جواب منفی می‌رسیم، که حاکی از اشتباه‌بودن حدس نخستین ما دربارهٔ جهت جریان است، ولی مقداری که برای جریان محاسبه کرده‌ایم هنوز درست و معتبر است. در مدار شکل ۳۱ـ۵، انتظار داریم که جریان ساعتگرد باشد، که این جهت توسط نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری معین می‌شود. باتری پتانسیل بالاتری را در نقطهٔ a نسبت به نقطهٔ b حفظ می‌کند، و در نتیجه بارهای مثبت در مدار، در مقاومت از a به b "سقوط" می‌کنند، سپس به‌وسیلهٔ باتری دوباره به پتانسیل بالاتر a پمپ می‌شوند.

وقتی مدار را با استفاده از روش اختلاف پتانسیل تحلیل می‌کنیم، گرداگرد مدار می‌چرخیم و حساب اختلاف پتانسیلها را در دو سر هر یک از عنصرهای مدار نگه می‌داریم. در انجام تحلیل به این روش، اهمیت ندارد که در چه جهت به گرد مدار بچرخیم. فرض کنید که، با شروع از نقطهٔ a، ساعتگرد (در همان جهت جریان) گرد مدار بچرخیم.

فرض کنید که ΔV_R اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت باشد. یعنی، پتانسیل در نقطهٔ a به اندازهٔ ΔV_R از پتانسیل در نقطهٔ b بیشتر است، که این مقدار برابر با iR است. چگونه می‌دانیم که V_a بیشتر از V_b است؟ این موضوع را در این مرحله به‌طور قطعی نمی‌دانیم، ولی این گزینه، با حدسی که برای جهت جریان در مقاومت R زدیم، سازگار است. اگر جریان از a به b جاری شود، در آن صورت حاملهای بار مثبت در داخل مقاومت از پتانسیل بالاتر در نقطهٔ a به پتانسیل پایین‌تر در نقطهٔ b "سقوط" می‌کنند. اگر حدس نخستین ما در مورد جهت جریان اشتباه باشد، در آن صورت حل مسئله نشان خواهد داد که هم i و هم ΔV_R منفی هستند.

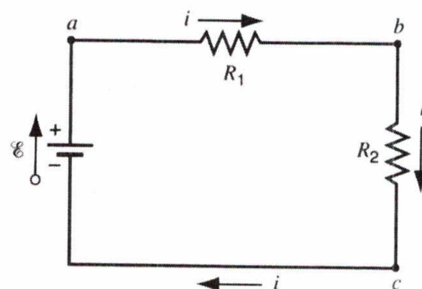
اکنون در موقعیتی قرار داریم که می‌توانیم مدار را تحلیل کنیم. دستورکار این است که از هر نقطه‌ای از مدار شروع کنیم، گرداگرد مدار بچرخیم و تمام اختلاف پتانسیلها را به‌هم بیفزاییم، و سرانجام به نقطهٔ آغاز بازگردیم و در این فرایند باید به همان پتانسیلی که با آن شروع کردیم برسیم. این روش را می‌توانیم به شرح زیر خلاصه کنیم:

جمع جبری تمام اختلاف پتانسیلها در گرداگرد حلقهٔ کامل باید برابر صفر شود.

این قاعده به نام قاعدهٔ حلقه مشهور است (وگاهی اوقات به نام قانون دوم کیرشهوف خوانده می‌شود). در نهایت، این قاعده گزاره‌ای است از پایستگی انرژی. مشابه مکانیکی این فرایند آن است که در مسیر تپه ماهور گردش کنیم؛ ممکن است که به هنگام گردش بالا و پایین برویم، ولی اگر حساب تمام تغییراتمان را در انرژی پتانسیل گرانشی نگه داریم، در خواهیم یافت که وقتی به نقطهٔ آغاز حرکت باز می‌گردیم، حاصل کل تغییرات برابر صفر است.

اکنون تغییر در پتانسیل مدار شکل ۳۱ـ۵ را بررسی می‌کنیم. این کار را از نقطهٔ a که در آن پتانسیل V_a است شروع می‌کنیم. با حرکت ساعتگرد گرد مدار از نقطهٔ a و گذر از مقاومت، پتانسیل به اندازهٔ $\Delta V_R = iR$ کاهش می‌یابد، بنابراین پتانسیل در نقطهٔ b برابر است با $V_b = V_a - iR$. در ادامهٔ این حرکت گرد مدار، از باتری می‌گذریم، که از پایانهٔ منفی آن وارد و از پایانهٔ مثبت خارج می‌شویم، و در نتیجه پتانسیل به اندازهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری، $\mathscr{E}$، افزایش می‌یابد. اکنون به نقطهٔ آغازین a بازگشته‌ایم که در آن پتانسیل برابر V_a است. چون پتانسیلهای آغازی و پایانی در نقطهٔ a باید برابر باشند (پتانسیل یک کمیت مستقل از مسیر است)، بنابراین باید داشته باشیم $V_a = V_a - iR + \mathscr{E}$. به‌صورت هم‌ارز، می‌توانیم همین نتیجه را با بهره‌برداری مستقیم از قاعدهٔ حلقه، یعنی جمع‌کردن اختلاف در پتانسیلها و برابر قرار دادن آن با صفر، به‌دست آوریم. باز هم، محاسبه را از نقطهٔ a و گردش ساعتگرد گرد مدار آغاز می‌کنیم. در اینجا ابتدا با اختلاف پتانسیل منفی $-iR$ مواجه می‌شویم و سپس با اختلاف پتانسیل مثبت $+\mathscr{E}$ برخورد می‌کنیم. با برابر قرار دادن حاصل‌جمع این اختلاف پتانسیلها با صفر، می‌رسیم به

$$-iR + \mathscr{E} = ۰$$



شکل ۳۱ـ۶ یک مدار تک حلقه‌ای شامل دو مقاومت. جریان در همه‌جا یکسان است؛ در گردش گِرد مدار در جهت جریان، پتانسیل از a به b و نیز از b به c کاهش می‌یابد.

یا

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} \tag{۳۱ـ۲}$$

اکنون جریان را در این مدار مشخص کردیم، که این کار، تحلیل مدار را پایان می‌بخشد.

اکنون مدار تک‌حلقه‌ای اندکی پیچیده‌تر، که در شکل ۳۱ـ۶ نشان داده‌ایم، در نظر بگیرید. این مدار شامل فقط یک باتری و دو مقاومت است. باز هم می‌توانیم حدس بزنیم که جریان ساعتگرد است. فرض کنید که این دفعه در جهت پادساعتگرد گرد مدار می‌چرخیم. از نقطهٔ a شروع می‌کنیم و ابتدا از باتری می‌گذریم و درمی‌یابیم که اختلاف پتانسیل برابر $-\mathscr{E}$ است. سپس از مقاومت R_2 در خلاف جهت جریان عبور می‌کنیم، که در نتیجه پتانسیل افزایش پیدا می‌کند و اختلاف پتانسیل در اینجا برابر با $+iR_2$ است. به صورتی مشابه وقتی از مقاومت R_1 می‌گذریم اختلاف پتانسیل برابر $+iR_1$ است، که پس از آن به نقطهٔ آغازین حرکت می‌رسیم. بنابر قاعدهٔ حلقه حاصل‌جمع کل این اختلاف پتانسیلها باید برابر با صفر باشد:

$$-\mathscr{E} + iR_2 + iR_1 = 0$$

یا

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2} \tag{۳۱ـ۳}$$

توجه کنید که اگر $R_1 = 0$ یا $R_2 = 0$ باشد، معادلهٔ (۳۱ـ۳) به معادلهٔ (۳۱ـ۲) تبدیل می‌شود.

اختلاف پتانسیلها در یک مدار

اغلب علاقه‌مندیم که در مدار اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را مشخص کنیم. به‌عنوان مثال، در مدار شکل ۳۱ـ۶، چگونه اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b، $\Delta V_{ab}(= V_a - V_b)$، به عناصر مدار یعنی $\mathscr{E}$، R_1، و R_2 بستگی پیدا می‌کند؟ برای اینکه رابطهٔ بین آنها را به‌دست آوریم، از نقطهٔ b شروع می‌کنیم و در جهت پادساعتگرد. از طریق مقاومت R_1، به a می‌رویم. اگر پتانسیلها در نقطه‌های a و b به‌ترتیب برابر V_a و V_b باشند، داریم

$$V_b + iR_1 = V_a$$

زیرا، در گذر از مقاومت در خلاف جهت جریان با افزایش پتانسیل مواجه می‌شویم. این رابطه را برحسب ΔV_{ab}، یعنی اختلاف پتانسیل بین a و b، به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = +iR_1$$

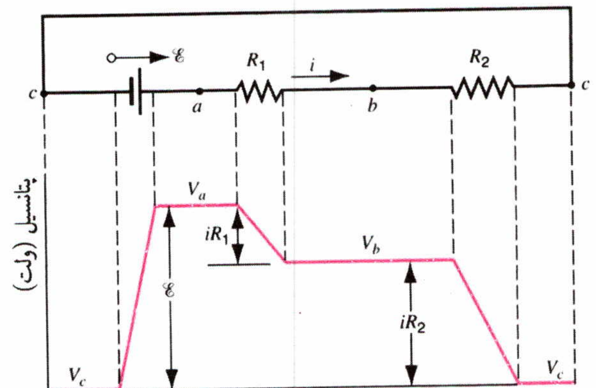
که حاکی از آن است که مقدار ΔV_{ab} برابر با iR_1 است و نیز اینکه نقطهٔ a در پتانسیل بالاتری از نقطهٔ b قرار دارد. از ترکیب این معادلهٔ آخری با معادلهٔ (۳۱ـ۳) می‌رسیم به

$$\Delta V_{ab} = \mathscr{E}\frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{۳۱ـ۴}$$

به‌طور خلاصه، برای یافتن اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه در مدار از یک نقطه شروع می‌کنیم و از طریق مدار به نقطهٔ دیگر می‌رویم و اختلاف پتانسیلهایی را که سر راه با آنها مواجه می‌شویم با هم جمع جبری می‌کنیم. این جمع جبری همان اختلاف پتانسیل بین دو نقطه است. این روش کار مشابه روش یافتن جریان در یک حلقهٔ بسته است، جز اینکه در اینجا اختلاف پتانسیلها فقط در قسمتی از حلقه با هم جمع می‌شوند و نه روی کل حلقه.

می‌توانیم در مدار از هر مسیری بین دو نقطه حرکت کنیم، و باید مقدار یکسانی برای اختلاف پتانسیل به‌دست آوریم، زیرا مستقل از مسیر بودن یک جزء اصلی مفهوم پتانسیل است. اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه فقط می‌تواند یک مقدار داشته باشد؛ یعنی باید برای تمام مسیرهایی که این دو نقطه را به‌هم متصل می‌کنند نتیجهٔ یکسانی به‌دست آوریم. (به‌طور مشابه، اگر دو نقطه را در اطراف یک تپه در نظر بگیریم، اختلاف اندازه‌گیری‌شده در پتانسیل گرانشی بین آنها، بدون توجه به مسیری که از یک نقطه به نقطهٔ دیگر می‌رویم، یکسان است.) در شکل ۳۱ـ۶، با استفاده از مسیری که از a شروع می‌شود و پادساعتگرد از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی می‌گذرد و به b می‌رسد، ΔV_{ab} را مجدداً محاسبه می‌کنیم. در این حالت داریم

$$V_a - \mathscr{E} + iR_2 = V_b$$



شکل ۳۱ـ۷ مدار شکل ۳۱ـ۶ را دوباره چنان ترسیم کرده‌ایم که همهٔ اجزای آن در امتداد یک خط مستقیم و در بالای شکل قرار گرفته است. اختلاف پتانسیل بین دو سر هر یک از اجزای مدار را در پایین شکل نشان داده‌ایم.

یا

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = +\mathscr{E} - iR_۲$$

از ترکیب این نتیجه با معادلهٔ (۳۱ـ۳) به معادلهٔ (۳۱ـ۴) دست پیدا می‌کنیم.

با استفاده از روشهای مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که

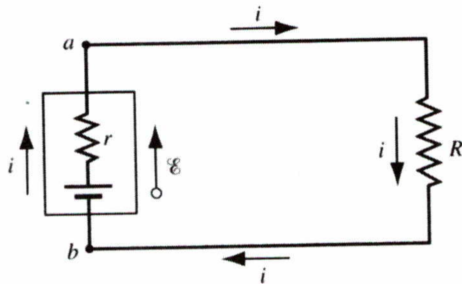
$$\Delta V_{bc} = \mathscr{E}\frac{R_۲}{R_۱ + R_۲} \qquad (۳۱\text{ـ}۵)$$

توجه کنید که، همان‌طور که انتظار داریم، $\Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = \mathscr{E}$. ترکیب مقاومتها در مدار شکل ۳۱ـ۶ را تقسیم‌کنندهٔ ولتاژ می‌خوانیم. در واقع، این مدار اختلاف ولتاژ باتری را به دو جزئی که متناسب با اندازهٔ مقاومتهاست تقسیم می‌کند.

روش دیگری برای نشان دادن اختلاف پتانسیلها در این مدار، در شکل ۳۱ـ۷ نشان داده شده است. برای سادگی ترسیم شکل در اینجا حرکت گرد مدار را از نقطهٔ c آغاز کرده‌ایم و به‌طور ساعتگرد گرد مدار چرخیده‌ایم. در اینجا به‌روشنی می‌توانید ببینید که چگونه نیروی محرکهٔ الکتریکی (emf) باتری به اختلاف پتانسیلهای بین دو سر دو مقاومت "تقسیم شده است".

مقاومت داخلی چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی (emf)

برعکس باتریهای ایده‌آل که تاکنون مورد بررسی قرار دادیم، باتریهای واقعی دارای مقاومت داخلی هستند. این مقاومت ویژگی ماده‌ای است که باتری از آن ساخته شده است. چون جزئی از سرشت باتری است،



شکل ۳۱ـ۸ یک باتری به‌وسیلهٔ قطعه‌ای نمایش داده‌شده که شامل یک چشمهٔ emf و یک مقاومت داخلی است.

نمی‌توان آن را از بین برد؛ معمولاً علاقه‌مندیم که آن را حذف کنیم، زیرا مقاومت داخلی آثار نامطلوبی، مانند کاهش ولتاژ پایانه‌ای باتری و محدودکردن جریانی را که می‌تواند در مدار جاری شود، در بردارد.

در شکل ۳۱ـ۸ مدار سادهٔ شکل ۳۱ـ۵ را نشان داده‌ایم که در آن مقاومت داخلی r باتری در نظر گرفته شده است. با آنکه آنها اجزای یک قطعه هستند، چشمهٔ emf و مقاومت داخلی را به‌صورت عنصرهای جداگانه‌ای، نشان داده‌ایم.

مدار شکل ۳۱ـ۸ با مدار شکل ۳۱ـ۶ یکسان است، و می‌توانیم جریان را فقط با جایگزینی مقدارهای مربوط به عنصرهای مدار شکل ۳۱ـ۸ در معادلهٔ (۳۱ـ۳) به‌دست آوریم:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R + r} \qquad (۳۱\text{ـ}۶)$$

مقاومت داخلی، جریانی را که emf می‌تواند در مدار خارجی برقرار کند، کاهش می‌دهد.

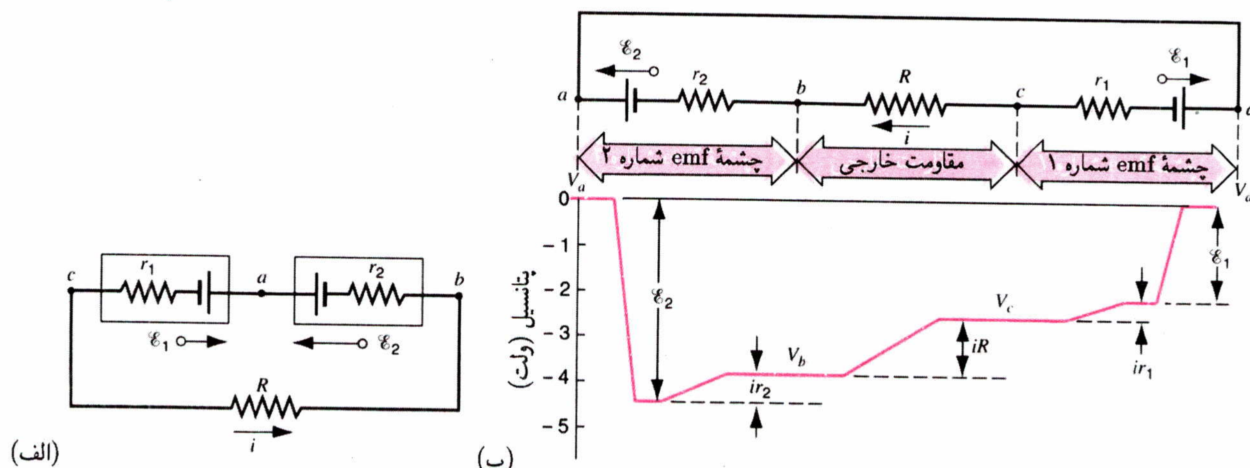
اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری برابر

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = \mathscr{E} - ir$$

است؛ که با استفاده از معادلهٔ (۳۱ـ۶) می‌رسیم به

$$\Delta V_{ab} = \mathscr{E}\frac{R}{R + r} \qquad (۳۱\text{ـ}۷)$$

از این عبارت مشاهده می‌کنیم که اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری ثابت نیست، بلکه در این حالت به مقاومت R مدار خارجی وابسته است. با کوچکتر کردن مقاومت R، و از آن رو افزایش جریان، اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری کاهش پیدا می‌کند. یک باتری ۱٫۵ V فقط در صورتی اختلاف ولتاژ بین پایانه‌هایش ۱٫۵ V است که هیچ جریانی از باتری عبور نکند. وقتی که باتری به یک قطعهٔ مداری مانند رادیو متصل می‌شود، اختلاف ولتاژ بین پایانه‌های آن کمتر از ۱٫۵ V است.



شکل ۳۱ـ۹ مسئله‌های نمونهٔ ۳۱ـ۱ و ۳۱ـ۲. (الف) یک مدار تک‌حلقه‌ای شامل دو چشمهٔ emf. (ب) تغییر پتانسیلی که در چرخش ساعتگرد گرد مدار با شروع از نقطهٔ a با آن مواجه می‌شود.

از معادلهٔ (۳۱ـ۷) مشاهده می‌کنیم که ΔV_{ab} فقط در صورتی برابر با $\mathscr{E}$ است که یا باتری هیچ مقاومت داخلی نداشته باشد ($r=۰$) یا اینکه مدار خارجی باز باشد ($R=\infty$).

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۱ جریان در مدار شکل ۳۱ـ۹(الف) چقدر است؟ نیروهای محرکهٔ الکتریکی و مقاومتها به قرار زیرند: $\mathscr{E}_۱ = ۲٫۱\,\text{V}$، $\mathscr{E}_۲ = ۴٫۴\,\text{V}$، $r_۱ = ۱٫۸\,\Omega$، $r_۲ = ۲٫۳\,\Omega$، $R = ۵٫۵\,\Omega$.

حل. دو نیروی محرکهٔ الکتریکی چنان متصل شده‌اند که با همدیگر مخالفت می‌کنند، ولی چون $\mathscr{E}_۲$ بزرگتر از $\mathscr{E}_۱$ است، جهت جریان را در مدار کنترل می‌کند، که در این مورد پادساعتگرد است. قاعدهٔ حلقه، که از نقطهٔ a به‌صورت ساعتگرد به‌کار گرفته شود، نتیجه می‌دهد

$$-\mathscr{E}_۲ + ir_۲ + iR + ir_۱ + \mathscr{E}_۱ = ۰$$

بررسی کنید که با چرخش پادساعتگرد گرد مدار یا با شروع از نقطهٔ دیگری غیر از a همین نتیجه به‌دست می‌آید. همچنین، این معادله را جمله به جمله با شکل ۳۱ـ۹(ب)، که تغییرات پتانسیل را به‌صورت نموداری نشان می‌دهد، مقایسه کنید.

با حل معادلهٔ بالا برای جریان i، به‌دست می‌آوریم

$$i = \frac{\mathscr{E}_۲ - \mathscr{E}_۱}{R + r_۱ + r_۲} = \frac{۴٫۴\,\text{V} - ۲٫۱\,\text{V}}{۵٫۵\,\Omega + ۱٫۸\,\Omega + ۲٫۳\,\Omega} = ۰٫۲۴\,\text{A}$$

دانستن جهت جریان قبل از حل مسئله ضروری نیست. برای روشن‌شدن موضوع فرض کنید که جریان در شکل ۳۱ـ۹(الف) ساعتگرد، یعنی، در جهت مخالف با جهت پیکان جریان، در شکل ۳۱ـ۹(الف) باشد. با استفاده از قاعدهٔ حلقه در این حالت خواهیم داشت (چرخش ساعتگرد از نقطهٔ a)

$$-\mathscr{E}_۲ - ir_۲ - iR - ir_۱ + \mathscr{E}_۱ = ۰$$

یا

$$i = -\frac{\mathscr{E}_۲ - \mathscr{E}_۱}{R + r_۱ + r_۲}$$

با قرار دادن مقدارهای عددی می‌رسیم به $i = -۰٫۲۴\,\text{A}$. علامت منفی نشان می‌دهد که جهت واقعی جریان در خلاف جهتی است که برای آن فرض کرده‌ایم.

در مدارهای پیچیده‌تر که شامل چندین حلقه و شاخه هستند، اغلب نمی‌توان جهت واقعی جریانها را در تمام قسمتهای مدار از قبل مشخص کرد. با این همه، می‌توان جهت جریان را برای هر شاخه به‌صورت دلخواه انتخاب کرد. اگر برای یک جریان مشخص پاسخی با علامت مثبت به‌دست آوردید، جهت جریان را درست انتخاب کرده‌اید؛ اگر پاسخ منفی به‌دست آوردید، جهت واقعی جریان برخلاف جهتی است که انتخاب کرده‌اید. در هر صورت مقدار عددی به‌دست‌آمده، مقداری درست است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۲ (الف) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b در شکل ۳۱ـ۹(الف) چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و c در شکل ۳۱ـ۹(الف) چقدر است؟

حل. (الف) این اختلاف پتانسیل در واقع همان اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری ۲ است، که شامل نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}_۲$

و مقاومت داخلی $r_۲$ می‌شود. فرض کنید که چرخش گرد مدار را از نقطهٔ b آغاز و پادساعتگرد با عبور مستقیم از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی به طرف a برویم. در این صورت داریم

$$V_b - ir_۲ + \mathcal{E}_۲ = V_a$$

یا

$$V_a - V_b = -ir_۲ + \mathcal{E}_۲ = -(۰٫۲۴\,\text{A})(۲٫۳\Omega) + ۴٫۴\,\text{V}$$
$$= +۳٫۸\,\text{V}$$

مشاهده می‌کنیم که نقطهٔ a مثبت‌تر از b و اختلاف پتانسیل بین آنها ($۳٫۸\,\text{V}$) کمتر از نیروی محرکهٔ الکتریکی این چشمه ($۴٫۴\,\text{V}$) است؛ شکل ۳۱ـ۹(ب) را ببینید.

می‌توان درستی این نتیجه را با شروع از نقطهٔ b در شکل ۳۱ـ۹(الف) و حرکت ساعتگرد گِرد مدار تا رسیدن به نقطهٔ a بررسی کرد. برای این مسیر متفاوت، داریم

$$V_b + iR + ir_۱ + \mathcal{E}_۱ = V_a$$

یا

$$V_a - V_b = iR + ir_۱ + \mathcal{E}_۱$$
$$= (۰٫۲۴\,\text{A})(۵٫۵\Omega + ۱٫۸\Omega) + ۲٫۱\,\text{V} = +۳٫۸\,\text{V}$$

که درست همان مقدار قبلی است. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه برای تمام راههایی که آن دو نقطه را به‌هم مربوط می‌کنند یکسان است.

(ب) توجه کنید که اختلاف پتانسیل بین a و c همان اختلاف پتانسیل پایانه‌های باتری ۱ است، که شامل نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathcal{E}_۱$ و مقاومت داخلی $r_۱$ می‌شود. با شروع از نقطهٔ c و حرکت ساعتگرد گرد مدار به نقطهٔ a می‌رویم، با توجه به شکل نتیجه می‌گیریم که

$$V_c + ir_۱ + \mathcal{E}_۱ = V_a$$

یا

$$V_a - V_c = ir_۱ + \mathcal{E}_۱ = (۰٫۲۴\,\text{A})(۱٫۸\Omega) + ۲٫۱\,\text{V} = +۲٫۵\,\text{V}$$

این جواب نشان می‌دهد که a در پتانسیل بالاتری از c قرار دارد. اختلاف پتانسیل پایانه‌ها ($۲٫۵\,\text{V}$) در این مورد بیشتر از نیروی محرکهٔ الکتریکی ($۲٫۱\,\text{V}$) باتری است؛ شکل ۳۱ـ۹(ب) را ببینید. بار الکتریکی برخلاف جهتی که اگر باتری ۱ به‌تنهایی عمل می‌کرد، به‌صورت واداشته از $\mathcal{E}_۱$ می‌گذرد؛ اگر باتری $\mathcal{E}_۱$ یک باتری انباره‌ای بود، به هزینهٔ باتری $\mathcal{E}_۲$ که تخلیه می‌شود، پر می‌شد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۳ در شکل ۳۱ـ۱۰، مداری متشکل از دو حلقه را نشان داده‌ایم. جریانها را در این مدار معین کنید. اجزای این مدار دارای این مقدارهاست: $\mathcal{E}_۱ = ۲٫۱\,\text{V}$، $\mathcal{E}_۲ = ۶٫۳\,\text{V}$، $R_۱ = ۱٫۷\Omega$، $R_۲ = ۳٫۵\Omega$.

حل. اولین گام در تحلیل این مدار آن است که جریانها را تعریف و جهت آنها را در هر یک از شاخه‌ها مشخص کنیم. جریانهای $i_۱$، $i_۲$، و $i_۳$ را در سه شاخه ترسیم و برای آنها جهتهای دلخواهی اختیار کرده‌ایم. در نقطهٔ a، جریان $i_۳$ به آن وارد و جریانهای $i_۱$ و $i_۲$ از آن خارج می‌شوند. با استفاده از قاعدهٔ نقطهٔ اتصال یا قاعدهٔ گره (بخش ۳۱ـ۱)، داریم

$$i_۳ = i_۱ + i_۲$$

اکنون قاعدهٔ حلقه را در مورد هر یک از دو حلقه به‌کار می‌بریم. با شروع از نقطهٔ a و چرخیدن پادساعتگرد گِرد حلقهٔ سمت چپ، داریم

$$-i_۱R_۱ - \mathcal{E}_۱ - i_۱R_۱ + \mathcal{E}_۲ + i_۲R_۲ = ۰$$ یا

$$۲i_۱R_۱ - i_۲R_۲ = \mathcal{E}_۲ - \mathcal{E}_۱$$

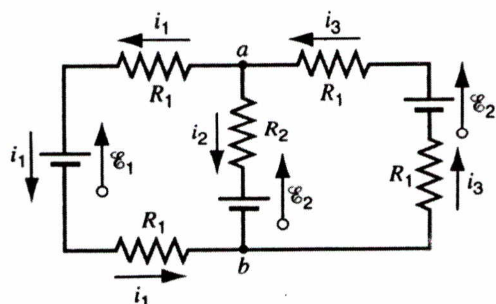
اگر حلقهٔ سمت راست را با شروع از نقطهٔ a، ساعتگرد دور بزنیم، درمی‌یابیم که

$$+i_۳R_۱ - \mathcal{E}_۲ + i_۳R_۱ + \mathcal{E}_۲ + i_۲R_۲ = ۰$$

یا، پس از جایگزینی $i_۳ = i_۱ + i_۲$ (از قاعدهٔ گره)

$$۲i_۱R_۱ + (۲R_۱ + R_۲)i_۲ = ۰$$

اکنون برای دو جریان $i_۱$ و $i_۲$ دو معادله داریم. می‌توانیم این معادله‌ها را برای این دو متغیر حل کنیم، که پس از انجام اندکی عملیات



شکل ۳۱ـ۱۰ مسئله‌های نمونهٔ ۳۱ـ۳ و ۳۱ـ۴. مداری متشکل از دو حلقه.

جبری می‌رسیم به

$$i_۱ = \frac{(\mathscr{E}_۲ - \mathscr{E}_۱)(۲R_۱ + R_۲)}{۴R_۱(R_۱ + R_۲)}$$

$$= \frac{(۶٫۳\,\mathrm{V} - ۲٫۱\,\mathrm{V})(۲ \times ۱٫۷\Omega + ۳٫۵\Omega)}{(۴)(۱٫۷\Omega)(۱٫۷\Omega + ۳٫۵\Omega)} = ۰٫۸۲\,\mathrm{A}$$

$$i_۲ = -\frac{\mathscr{E}_۲ - \mathscr{E}_۱}{۲(R_۱ + R_۲)}$$

$$= -\frac{۶٫۳\,\mathrm{V} - ۲٫۱\,\mathrm{V}}{(۲)(۱٫۷\Omega + ۳٫۵\Omega)} = -۰٫۴۰\,\mathrm{A}$$

جریان سوم را می‌توان با بهره‌گیری از قاعدهٔ گره به‌دست آورد.

$$i_۳ = i_۱ + i_۲ = ۰٫۸۲\,\mathrm{A} + (-۰٫۴۰\,\mathrm{A}) = ۰٫۴۲\,\mathrm{A}$$

علامتهای مربوط به جریانها نشان می‌دهند که حدس ما در مورد جهت جریانهای $i_۱$ و $i_۳$ درست ولی برای جهت جریان $i_۲$ نادرست بوده است؛ جهت این جریان در شاخهٔ مرکزی مدار شکل ۳۱ـ۱۰ باید به طرف بالا باشد و نه سمت پایین.

توجه داشته باشید، پس از اینکه دریافتیم که جهت جریان $i_۲$ نادرست است، لازم نیست که آن را در شکل ۳۱ـ۱۰ تغییر دهیم. می‌توانیم آن را به همان صورت در شکل باقی بگذاریم، فقط باید به خاطر داشته باشیم که برای $i_۲$ یک مقدار عددی منفی در تمام محاسبات بعدی منظور کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۴ در مدار شکل ۳۱ـ۱۰، اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b چقدر است؟

حل. برای یافتن اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b، شاخهٔ ab را در شکل ۳۱ـ۱۰ می‌پیماییم و جهت جریانهای نشان داده‌شده در شکل را در نظر می‌گیریم و از آنجا به‌دست می‌آوریم

$$V_a - i_۲R_۲ - \mathscr{E}_۲ = V_b$$

یا

$$V_a - V_b = \mathscr{E}_۲ + i_۲R_۲$$

$$= ۶٫۳\,\mathrm{V} + (-۰٫۴۰\,\mathrm{A})(۳٫۵\Omega) = +۴٫۹\,\mathrm{V}$$

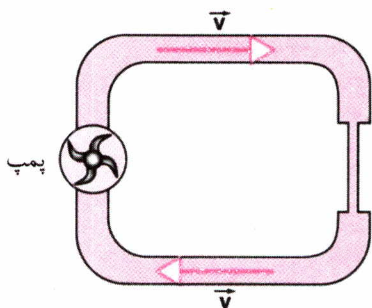
علامت مثبت حاکی از آن است که پتانسیل a مثبت‌تر از پتانسیل b است. البته با نگاه کردن به نمودار مدار باید چنین انتظاری هم داشته باشیم، زیرا قطب مثبت همهٔ باتریها به طرف بالای شکل است.

۳۱ـ۴ میدانهای الکتریکی در مدارها*

تا اینجا مدارها را به صورتی نسبتاً رمزآلود بررسی کردیم. در فصل ۲۹ ارتباط بین جریان و میدان الکتریکی را مورد توجه قرار دادیم: $\vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{j}}$ (معادلهٔ ۲۹ـ۱۰)، که در آن ρ مقاومت ویژهٔ ماده و $\vec{\mathbf{j}}$ چگالی جریان (جریان بر واحد مسطح مقطع) است. در مدارهایی که مورد بررسی قرار می‌دهیم، سیمها رسانا هستند و بنابراین برای اینکه جریان ایجاد و برقرار شود، باید میدان الکتریکی وجود داشته باشد. این میدان الکتریکی از کجا می‌آید؟

در اینجا بازگشت به شباهت بین جریان و جاری‌شدن شاره در لوله مفید است. در شکل ۳۱ـ۱۱ حلقهٔ بسته‌ای شبیه به مدار شکل ۳۱ـ۵ را نشان داده‌ایم. تلمبه شبیه چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی است، و باریک‌شدگی یا گرفتگی لوله شبیه مقاومت است. در حالت پایا، مقدار شاره‌ای که در واحد زمان از هر نقطهٔ مدار می‌گذرد باید با مقداری که از هر نقطهٔ دیگر مدار می‌گذرد برابر باشد. بنابراین، در محل باریک‌شدگی شاره باید سریع‌تر حرکت کند (با این فرض که شاره تراکم‌ناپذیر است).

باتری نیروی محرکهٔ الکتریکی را برای مدار فراهم می‌کند؛ نقش باتری آن است که بارهای الکتریکی را از پتانسیل پایین به پتانسیل بالا "پمپ" کند. نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌صورت کار مورد نیاز به‌ازای یک واحد بار تعریف شده است. با بهره‌گیری از تعریف رسمی کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ به‌صورت $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$، کار به‌ازای واحد بار یعنی W/q (نیروی محرکهٔ الکتریکی) باید به نیروی وارد بر



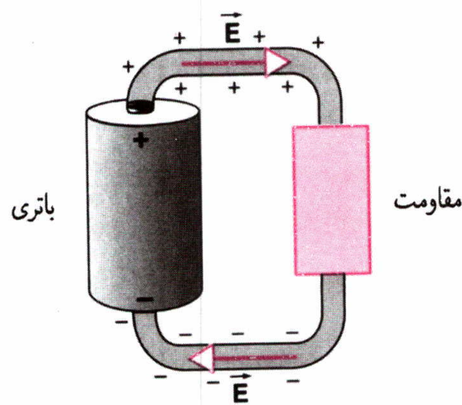
شکل ۳۱ـ۱۱ مشابهٔ شاره مکانیکی مدار الکتریکی ۳۱ـ۵. باریک‌شدگی مقاومتی را در برابر شارش شاره نشان می‌دهد.

---

* برای بحث مفصل‌تر دربارهٔ این موضوع، رجوع کنید به:
Electric and Magnetic Interaction by R. Chabay and B. Sherwood (New York: Wiley, 1995), chapter 6.

و همچنین

W. G. V. Rosser, *American Journal of Physics*, Vol. 31, 1963, p. 884 and Vol. 38, 1970, p. 265.



شکل ۳۱ـ۱۲ میدان الکتریکی در داخل سیمهای یک مدار تک‌حلقه‌ای. بارهای موجود روی سطح سیم عامل ایجاد میدانها در داخل سیمها هستند.

واحد بار، $\vec{\mathbf{F}}/q$ ارتباط داشته باشد:

$$\mathscr{E} = \oint (\vec{\mathbf{F}}/q) \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (۳۱\text{ـ}۸)$$

وابسته‌کردن میدان الکتریکی به کمیت $\vec{\mathbf{F}}/q$ اغواکننده است، ولی این کار در حالت کلی درست نیست. در این مورد نیروی $\vec{\mathbf{F}}$ نیرویی است که در داخل چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی عمل می‌کند؛ این نیرو ممکن است از مبادی مکانیکی، شیمیایی، ترمودینامیکی، یا مغناطیسی سرچشمه گرفته باشد، ولی الزاماً وابسته به میدان الکتریکی نیست.

معادلهٔ (۳۱ـ۸) را به‌صورت انتگرال روی مسیر بسته نوشته‌ایم. در این روش، نیروی محرکهٔ الکتریکی فقط به اثر خالصی وابسته است که چشمه برای واداشتن بار الکتریکی به چرخش کامل گرد مدار روی آن می‌گذارد. میدانهای خارجی پایستار نمی‌توانند منجر به نیروی محرکهٔ الکتریکی شوند، زیرا معادلهٔ (۳۱ـ۸) برای این‌گونه میدانها مقدار صفر را به‌دست می‌دهد.

در داخل سیمها، میدان الکتریکی وجود دارد. برای اینکه بار الکتریکی در داخل سیمها به حرکت در آید، باید میدان الکتریکی وجود داشته باشد (بحث فصل ۲۷ را به‌خاطر بیاورید که در آن قاعدهٔ $E = ۰$ در داخل رسانا فقط در شرایط الکتروستاتیکی معتبر بود اما وقتی جریان وجود داشته باشد، دیگر این قاعده برقرار نیست.) در شکل ۳۱ـ۱۲ شمایی از میدانهای الکتریکی در داخل سیم رسانا را نشان داده‌ایم. برای برقراری جریان متداول، بزرگی میدانهای الکتریکی باید چقدر باشد؟

ارائهٔ چند برآورد عددی سودمند است. فرض کنید که جریان $i = ۱$ آمپر در سیمی به شعاع $R = ۱\,\mathrm{mm}$ برقرار است. در این حالت چگالی جریان برابر است با

$$j = \frac{i}{A} = \frac{۱\,\mathrm{A}}{\pi(۱ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m})^۲} \approx ۳ \times ۱۰^۵\mathrm{A/m^۲}$$

در مورد سیم مسی، مقاومت ویژه برابر $۱٫۶۹ \times ۱۰^{-۸}\Omega \cdot \mathrm{m}$ است، بنابراین میدان الکتریکی وابسته به این جریان برابر است با

$$E = \rho j = (۱٫۶۹ \times ۱۰^{-۸}\Omega \cdot \mathrm{m})(۳ \times ۱۰^۵\mathrm{A/m^۲}) \approx ۵ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{V/m}$$

که این میدان الکتریکی، میدان بسیار کوچکی است.

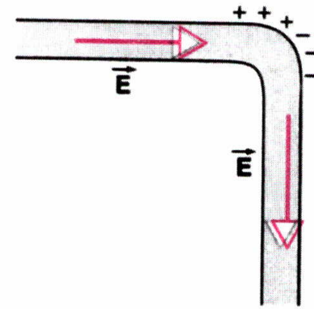
وقتی که در آغاز، باتری به یک مدار متصل می‌شود، جریانهای گذرای اولیه برقرار می‌شوند. این جریانها، بارهای الکتریکی را در سطح سیمها به روشی کاملاً دقیق توزیع می‌کنند که میدان الکتریکی ایجادشده برای برقراری یک جریان پایا در سیمها لازم است ــ کل این فرایند در زمانی که نوعاً از مرتبهٔ نانوثانیه است صورت می‌گیرد!

چه مقدار بار روی سطح سیم مورد نیاز است تا میدانی با شدت $۵ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{V/m}$ در داخل سیم ایجاد کند؟ برای اینکه برآوردی، با مرتبهٔ بزرگی تقریبی، داشته باشیم می‌توانیم از معادلهٔ (۲۶ـ۶)، که میدان الکتریکی بار نقطه‌ای را به‌دست می‌دهد، یعنی $E = q/۴\pi\epsilon_۰ R^۲$، استفاده کنیم، تا بار الکتریکی q روی سطح سیم که چنین میدان E را در مرکز سیم ایجاد می‌کند، مشخص کنیم:

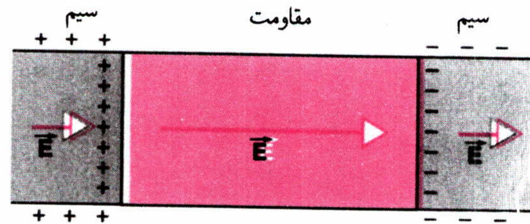
$$q = ۴\pi\epsilon_۰ R^۲ E = \frac{(۱۰^{-۳}\mathrm{m})^۲(۵ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{V/m})}{۹ \times ۱۰^۹\mathrm{N \cdot m^۲/C^۲}} = ۵٫۵ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$$

یا در حدود سه الکترون! تنها به مقدار بسیار کوچکی بار روی سطح سیم نیاز داریم تا میدان الکتریکی مورد نیاز را برای برقراری جریانهایی به بزرگی یک آمپر در داخل رسانا تأمین کند.

به روشی مشابه، می‌توانیم سؤال کنیم که جریان چطور ”می‌داند“ که به هنگام رسیدن به یک خم در یک سیم باید تغییر جهت دهد. باز هم، حالتهای گذرای اولیه باید سبب شود که دقیقاً بار کافی روی سطح سیم قرار گیرد که جریان را در راستای مناسب هدایت کند. در شکل ۳۱ـ۱۳ نمودار طرح‌وار یک خم نود درجه را نشان داده‌ایم، که در آن خم بارها به‌طور تقریبی به صورتی‌که نشان داده‌ایم توزیع می‌شوند. بار منفی در نزدیکی خم، میدانی ایجاد می‌کند که با حرکت جریان در حال ورود به خم مخالفت می‌کند، و بار مثبت ”هُل“ اولیه را برای جاری‌شدن در جهت جدید فراهم می‌آورد. باز هم محاسبه‌های



شکل ۳۱ـ۱۳ جزییات توزیع بارهای سطحی در نزدیکی یک خم نود درجه.



شکل ۳۱ـ۱۴ جزییات توزیع بارهای سطحی در نزدیکی یک مقاومت. تجمع بارها روی دو سر منتهی به مقاومت سیمها، میدان الکتریکی بزرگی را در مقاومت ایجاد می‌کند.

انجام‌شده در قبل برآوردی از مرتبهٔ بزرگی بارهای لازم را به‌دست می‌دهد ــ چند الکترون روی سطح سیم برای تغییر جهت یک جریان یک آمپری کفایت می‌کند!

ملاحظه‌های مربوط به بار سطحی، همچنین می‌تواند به ما در شناخت تأثیر مقاومت در مدار کمک کند. یک مقاومت کربنی را درنظر می‌گیریم، و برای سادگی کار فرض می‌کنیم که قطر آن برابر با قطر سیمهای مدار باشد (شکل ۳۱ـ۱۴). کربن یک رسانای ضعیف است، ولی عایق کاملاً خوبی نیست ــ مقاومت ویژهٔ آن در حدود $۳ \times ۱۰^{-۵} \Omega \cdot \mathrm{m}$، یعنی در حدود ۲۰۰۰ مرتبه بیشتر از مس است، ولی با تقریب ,م به بزرگی عایقهای نوعی نیست (جدول ۲۹ـ۱ را ببینید). چون سیم و مقاومت هر دو دارای سطح مقطع یکسان هستند، چگالی جریان در هر دو یکسان است. با استفاده از چگالی جریانی که قبلاً برای جریان ۱ آمپری در سیمی به شعاع ۱ میلی‌متر به‌دست آورده‌ایم، می‌توانیم میدان الکتریکی را در مقاومت مشخص کنیم:

$$E = \rho j = (۳ \times ۱۰^{-۵} \Omega \cdot \mathrm{m})(۳ \times ۱۰^{۵} \mathrm{A/m^۲}) \approx ۱۰\ \mathrm{V/m}$$

که میدانی در حدود ۲۰۰۰ بار بزرگتر از میدان داخل سیمهای مسی را به‌دست می‌دهد. (آیا اکنون می‌توانیم درک کنیم که چرا اُفت پتانسیل در سیمها در مقایسه با افت پتانسیل در مقاومت چشم‌پوشیدنی است؟)

این میدان الکتریکی بزرگ برای راندن الکترونها در طول "گرفتگی" ناشی از وجود مقاومت در مدار ضروری است. همان‌طورکه در شکل ۳۱ـ۱۴ نشان داده‌ایم، بارهایی که در انتهای سیم روی هم انباشته می‌شوند (شبیه بارهای روی خازن) این میدان الکتریکی بزرگ را به‌وجود می‌آورند. برای مقاومتی به ضخامت ۱ mm، باید بتوانید نشان بدهید که در حدود ۱۰۰۰ الکترون در هر یک از دو انتها می‌تواند میدان مورد نیاز را تأمین کند.

آنچه تا به اینجا توصیف کردیم یک سیستم شگفت‌آور خودتنظیم‌کننده است. باتری "یورش" اولیهٔ جریان در مدار را فراهم می‌آورد و، تقریباً به‌طور آنی و لحظه‌ای، بار راه خودش را به سوی مکانهایی که باید جریان پایا را هدایت کند پیدا می‌کند و از تجمع بیشتر بارها در روی سطح سیمها جلوگیری می‌کند. این حالت تعادل تا زمانی که باتری به تلمبه‌کردن بار درگرداگرد مدار ادامه دهد تداوم دارد.

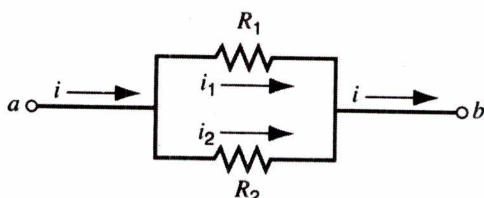
۳۱ـ۵ اتصال سری و موازی مقاومتها

مانند مورد خازنها (بخش ۳۰ـ۴ را ببینید)، مقاومتها نیز اغلب با ترکیبهای گوناگون در مدارها ظاهر می‌شوند. در تحلیل مدارها، بهتر است به‌جای مجموعهٔ مقاومتها تک‌مقاومت معادل R_{eq} را قرار دهیم، که مقدار آن چنان انتخاب شده است که عملکرد مدار تغییر نکند. در اینجا دو روش ترکیب مقاومتها را بررسی می‌کنیم.

اتصال موازی مقاومتها

تعریف ترکیب موازی اجزای مدار در بخش ۳۰ـ۴ را به‌خاطر آورید: می‌توان با عبور از فقط یک جزء مدار از مجموعهٔ مدارگذشت، اختلاف پتانسیل یکسان ΔV بین دو سر هر یک از اجزای مدار برقرار است و جریان بار بین اجزا تقسیم می‌شود.

در شکل ۳۱ـ۱۵، دو مقاومت را که به‌صورت موازی متصل شده‌اند، نشان داده‌ایم. می‌خواهیم مقاومت معادل بین نقطه‌های a و b را تعیین کنیم. فرض کنید که از باتری (با یک چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی دیگری) استفاده می‌کنیم که اختلاف پتانسیل ΔV را بین



شکل ۳۱ـ۱۵ اتصال موازی دو مقاومت.

نقطه‌های a و b برقرار می‌کند. اختلاف پتانسیل بین دو سر هر یک از مقاومتها همان ΔV است. از معادلهٔ (۲۹_۱۲) جریانی که از هر کدام از مقاومتها می‌گذرد چنین است.

$$i_۱ = \Delta V/R_۱ \quad \text{و} \quad i_۲ = \Delta V/R_۲ \qquad (۹_۳۱)$$

با توجه به ویژگیهای مدار موازی، جریان کل i باید بین شاخه‌ها تقسیم شود، بنابراین داریم

$$i = i_۱ + i_۲ \qquad (۱۰_۳۱)$$

اگر قرار باشد که این ترکیب موازی را با تک‌مقاومت معادل R_{eq} جایگزین کنیم، باید همان جریان کل i در آن جاری شود (زیرا جایگزین‌کردن نباید عملکرد مدار را تغییر دهد). در این صورت جریان برابر است با

$$i = \Delta V/R_{eq} \qquad (۱۱_۳۱)$$

با قرار دادن معادله‌های (۳۱_۹) و (۳۱_۱۱) در معادلهٔ (۳۱_۱۰)، می‌رسیم به

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_۱} + \frac{\Delta V}{R_۲}$$

یا

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} \qquad (۱۲_۳۱)$$

برای یافتن مقاومت معادل اتصال موازی با بیش از دو مقاومت، ابتدا مقاومت معادل $R_{۱۲}$ مربوط به مقاومتهای $R_۱$ و $R_۲$ را با استفاده از معادلهٔ (۳۱_۱۲) به‌دست می‌آوریم. سپس مقاومت معادل مربوط به $R_{۱۲}$ و مقاومت موازی بعدی، $R_۳$، را باز هم با استفاده از معادلهٔ (۳۱_۱۲) معین می‌کنیم. این کار را تکرار می‌کنیم و یک فرمول کلی برای مقاومت معادل یک ترکیب موازی مشتمل بر هر تعدادی از مقاومت در شاخه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \sum_n \frac{۱}{R_n} \quad \text{(اتصال موازی)} \qquad (۱۳_۳۱)$$

یعنی، برای یافتن مقاومت معادل مجموعهٔ موازی از مقاومتها، وارون هرکدام از مقاومتها را تعیین و آنها را با هم جمع می‌کنیم و سپس وارون آن حاصل‌جمع را به‌دست می‌آوریم که کمیت مورد نظر است. توجه کنید که R_{eq} همواره کوچکتر از کوچکترین مقاومت در شاخه‌های موازی است، یعنی، با اضافه کردن تعداد مسیرهای جریان، جریان بیشتری را از یک اختلاف پتانسیل خواهیم کشید.

در حالت خاصی که دو مقاومت به‌صورت موازی بسته شده باشند معادلهٔ (۳۱_۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$R_{eq} = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} \qquad (۱۴_۳۱)$$

یا به عبارت دیگر مقاومت معادل آنها برابر است با حاصلضرب دو مقاومت تقسیم بر مجموع آنها.

اتصال سری یا متوالی مقاومتها

در شکل ۳۱_۱۶ دو مقاومت را نشان داده‌ایم که به‌صورت سری به‌هم بسته شده‌اند. ویژگیهای اتصال سری اجزای مدار را به‌خاطر بیاورید (بخش ۳۰_۴ را ببینید): برای حرکت در مدار باید پی‌درپی از همهٔ اجزای مدار بگذریم، اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه برابر است با حاصل‌جمع اختلاف پتانسیلهای دو سر هرکدام از اجزای مدار و جریان یکسانی از همهٔ اجزای مدار می‌گذرد.

فرض کنید که باتریی با اختلاف پتانسیل ΔV به نقطه‌های a و b در شکل ۳۱_۱۶ متصل شود. جریان i در مجموعه و در هر یک از مقاومتها برقرار می‌شود. اختلاف پتانسیل بین دو سر هر یک از مقاومتها عبارت است از

$$\Delta V_۱ = iR_۱ \quad \text{و} \quad \Delta V_۲ = iR_۲ \qquad (۱۵_۳۱)$$

مجموع این اختلاف پتانسیلها باید با اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b که به‌وسیلهٔ باتری تأمین می‌شود برابر باشد، یا باید داشته باشیم

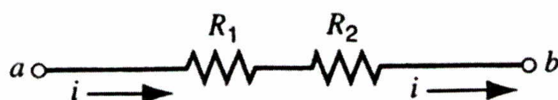
$$\Delta V = \Delta V_۱ + \Delta V_۲ \qquad (۱۶_۳۱)$$

اگر به‌جای این مجموعه، مقاومت معادل آن، R_{eq}، را قرار دهیم، باید همان جریان i برقرار شود، و در نتیجه

$$\Delta V = iR_{eq} \qquad (۱۷_۳۱)$$

با ترکیب معادله‌های (۳۱_۱۵)، (۳۱_۱۶)، و (۳۱_۱۷)، می‌رسیم به

$$iR_{eq} = iR_۱ + iR_۲$$



شکل ۳۱_۱۶ اتصال سری دو مقاومت.

یا

$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ \qquad (۳۱\text{-}۱۸)$$

از تعمیم این نتیجه به مجموعه‌ای متشکل از چندین مقاومت سری، خواهیم داشت

$$R_{eq} = \sum_n R_n \qquad \text{(اتصال متوالی)} \qquad (۳۱\text{-}۱۹)$$

یعنی، برای یافتن مقاومت معادل مجموعه‌ای از مقاومتها که به‌صورت متوالی به‌هم متصل شده‌اند، حاصل‌جمع تک‌تک مقاومتها را به‌دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که مقاومت معادل ترکیب سری مقاومتها همواره بزرگتر از بزرگترین مقاومت در مجموعه است. یعنی، هرچه تعداد مقاومتهای موجود در یک مجموعهٔ سری بیشتر شود، برای اختلاف پتانسیل معین، جریان کمتری در مدار جاری می‌شود.

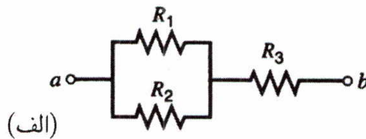
از مقایسهٔ این نتیجه‌ها با معادله‌های (۳۰-۱۷) و (۳۰-۲۲) برای اتصال سری و موازی خازنها، می‌بینیم که مقاومتها در اتصال موازی مانند خازنها در اتصال سری با هم جمع می‌شوند و مقاومتها در اتصال سری مانند خازنها در اتصال موازی با هم جمع می‌شوند. این موضوع به چگونگی تعریف این کمیتها مربوط می‌شود، یعنی مقاومت خارج قسمت پتانسیل بر جریان است و ظرفیت خارج قسمت بار الکتریکی به پتانسیل.

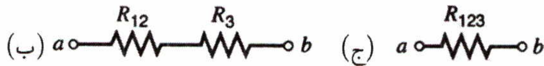
ممکن است مقاومتها گاهی در مجموعه‌هایی باشند که نه موازی هستند و نه سری. در این موارد، مقاومت معادل را می‌توان با تجزیهٔ مسئله به واحدهای کوچکتری، به‌دست آورد که بتوان در آن اتصالها را به‌صورت موازی یا سری در نظر گرفت. مثالهای زیر این موضوع را نمایش می‌دهند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۵ (الف) مقاومت معادل مجموعهٔ نشان داده‌شده در شکل ۳۱-۱۷(الف) را با استفاده از مقدارهای $R_۱ = ۴٫۶\Omega$، $R_۲ = ۳٫۵\Omega$، و $R_۳ = ۲٫۸\Omega$ به‌دست آورید. (ب) وقتی باتری $۱۲٫۰$ V بین نقطه‌های a و b متصل شود، جریانی که از مقاومت $R_۱$ می‌گذرد چقدر است؟

حل. (الف) ابتدا مقاومت معادل $R_{۱۲}$، مربوط به ترکیب موازی $R_۱$ و $R_۲$ را تعیین می‌کنیم. با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳۱-۱۴) می‌رسیم به

$$R_{۱۲} = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} = \frac{(۴٫۶\Omega)(۳٫۵\Omega)}{۴٫۶\Omega + ۳٫۵\Omega} = ۲٫۰\Omega$$





شکل ۳۱-۱۷ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۵. (الف) ترکیب موازی $R_۱$ و $R_۲$ با مقاومت $R_۳$ به‌صورت سری قرار دارد. (ب) ترکیب موازی $R_۱$ و $R_۲$ با مقاومت معادلشان، $R_{۱۲}$، جایگزین شده‌اند. (ج) ترکیب سری $R_{۱۲}$ و $R_۳$ با مقاومت معادلشان، یعنی $R_{۱۲۳}$ جایگزین شده‌اند.

همان‌طور که در شکل ۳۱-۱۷(ب) نشان داده شده است مقاومتهای $R_{۱۲}$ و $R_{۱۳}$ به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند. با استفاده از معادلهٔ (۳۱-۱۸)، می‌توان مقاومت معادل $R_{۱۲۳}$ مربوط به این اتصال سری را به‌دست آورد.

$$R_{۱۲۳} = R_{۱۲} + R_۳ = ۲٫۰\Omega + ۲٫۸\Omega = ۴٫۸\Omega$$

(ب) اگر یک باتری $۱۲٫۰$ V به نقطه‌های a و b در شکل ۳۱-۱۷(ج) متصل شود، جریان حاصل در مدار برابر است با

$$i = \frac{\Delta V}{R_{۱۲۳}} = \frac{۱۲٫۰\ \text{V}}{۴٫۸\Omega} = ۲٫۵\ \text{A}$$

با برقراری این جریان در ترکیب سری شکل ۳۱-۱۷(ب)، اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت $R_{۱۲}$ عبارت است از

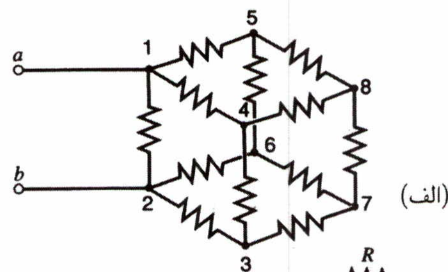
$$\Delta V_{۱۲} = iR_{۱۲} = (۲٫۵\ \text{A})(۲٫۰\Omega) = ۵٫۰\ \text{V}$$

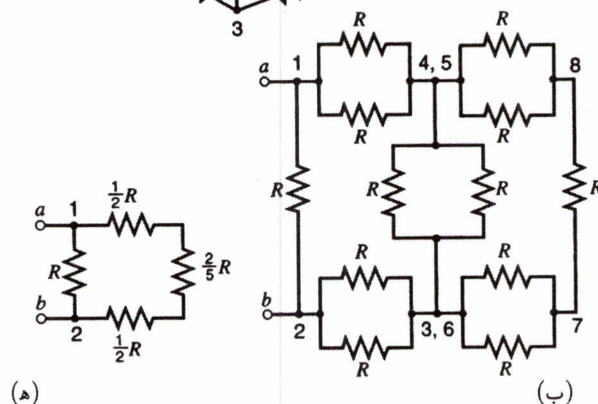
در اتصال موازی، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از اجزا (و دو سر ترکیب آنها) یکسان است. بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو سر $R_۱$ (و $R_۲$) برابر با $۵٫۰$ V است و جریانی که از $R_۱$ می‌گذرد عبارت است از

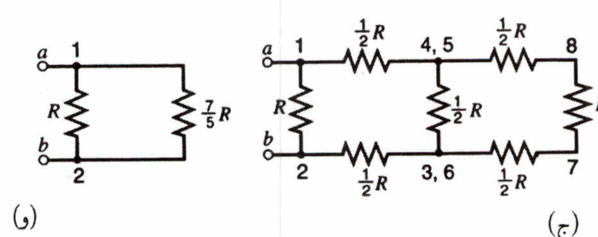
$$i_۱ = \frac{\Delta V_{۱۲}}{R_۱} = \frac{۵٫۰\ \text{V}}{۴٫۶\Omega} = ۱٫۱\ \text{A}$$

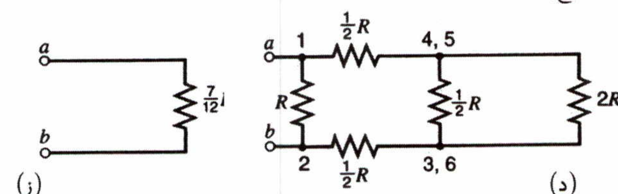
مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱-۶ در شکل ۳۱-۱۸(الف) مکعبی متشکل از ۱۲ مقاومت R را نشان داده‌ایم. مقاومت معادل، $R_{۱۲}$، مربوط به هر ضلع (بین دو رأس مجاور) را معین کنید.

حل. گرچه در ابتدا تجزیهٔ این مسئله به اجزای سری و موازی کوچکتر واقعاً نومیدکننده به نظر می‌رسد، اما تقارن اتصالها راهی برای









شکل ۳۱ـ۱۸ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۶ (الف) مکعبی متشکل از ۱۲ مقاومت یکسان. (ب) تا (ز) تبدیل گام به گام مکعب تا رسیدن به یک مقاومت معادل برای کل مدار.

انجام این کار پیش پایمان می‌گذارد. کلید حل این مسئله که تنها با تکیه بر ملاحظه‌های تقارنی به‌دست می‌آید، این است که نقطه‌های ۳ و ۶ باید در یک پتانسیل باشند، و نیز اینکه نقطه‌های ۴ و ۵ باید پتانسیل یکسانی داشته باشند.

اگر دو نقطه در مدار، پتانسیل یکسانی داشته باشند، در صورتی‌که آنها را با یک سیم به‌هم متصل کنیم، جریان در مدار تغییر نخواهد کرد. چون اختلاف پتانسیلی بین دو سر آن وجود ندارد در نتیجه جریانی هم در آن موجود نیست. به این ترتیب می‌توان نقطه‌های ۳ و ۶ را با یک رشته سیم به‌هم وصل کرد و همین کار را برای نقطه‌های ۴ و ۵ نیز انجام داد.

بنابراین، می‌توان مکعب را به‌صورت شکل ۳۱ـ۱۸(ب) مجدداً ترسیم کرد. از اینجا به بعد کار ما تقلیل کار مدار به یک مقاومت معادل بین دو پایانهٔ ورودی با استفاده از قاعده‌های اتصال موازی و سری مقاومتهاست. در شکل ۳۱ـ۱۸(ج)، این کار را با جایگزین‌کردن پنج مجموعهٔ موازی متشکل از دو مقاومت R، با مقاومت معادل آنها در هرکدام از اتصالهای موازی، یعنی $\frac{۱}{۲}R$ آغاز می‌کنیم.

در شکل ۳۱ـ۱۸(د)، در حلقهٔ سمت راست، سه مقاومتی را که به‌صورت سری قرار گرفته‌اند با هم جمع کرده‌ایم و مقاومت معادل $۲R$ را برای آنها به‌دست آورده‌ایم. در شکل ۳۱ـ۱۸(ه)، دو مقاومتی که در حلقهٔ سمت راست را به‌صورت موازی قرار گرفته‌اند با معادل آنها، یعنی $\frac{۲}{۵}R$ جایگزین کرده‌ایم. در انجام این کار، بد نیست به خاطر داشته باشیم که مقاومت معادل دو مقاومت موازی برابر است با حاصلضرب مقاومتها تقسیم بر مجموع آنها (معادلهٔ ۳۱ـ۱۴).

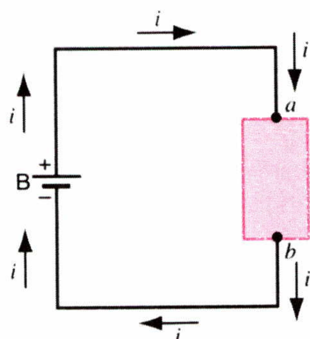
در شکل ۳۱ـ۱۸(و)، سه مقاومت سری شکل ۳۱ـ۱۸(ه)، را با هم جمع کرده‌ایم و معادل آنها یعنی $۷/۵R$ را به‌دست آورده‌ایم و در شکل ۳۱ـ۱۸(ز)، دو مقاومت موازی را با معادل آنها، که در جستجوی آن هستیم، یعنی

$$R_{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}R$$

جایگزین می‌کنیم. از این روش می‌توان برای یافتن مقاومت معادل $R_{۱۳}$، بین دو سر قطر یک وجه، و $R_{۱۷}$، مقاومت معادل بین دو سر قطر مکعب استفاده کرد (مسئلهٔ ۷ را ببینید).

۳۱ـ۶ انتقال انرژی در مدار الکتریکی

در شکل ۳۱ـ۱۹ مداری متشکل از باتری B را که به یک قطعهٔ الکتریکی، مانند مقاومت، خازن، موتور یا باتری دیگری متصل شده



شکل ۳۱ـ۱۹ باتری B جریان i را در مدار الکتریکی شامل یک قطعهٔ الکتریکی دلخواه، ایجاد می‌کند.

است نشان داده‌ایم. جریان i در سیمها جاری و اختلاف پتانسیل ΔV_{ab} بین پایانه‌های قطعه برقرار است.

ابتدا عملکرد باتری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که باتری چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی، $\mathscr{E}$، ایده‌آل (بدون مقاومت) باشد. وقتی که باتری، مقدار بار dq را از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت خود انتقال می‌دهد، کاری معادل (معادلهٔ ۳۱ـ۱) $dW = \mathscr{E} dq$ روی بار انجام می‌دهد. توان تأمین‌شده توسط چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی با آهنگ انجام کار مشخص می‌شود: یعنی $P_{\text{emf}} = dW/dt = \mathscr{E} dq/dt$، یا

$$P_{\text{emf}} = \mathscr{E} i \qquad (۳۱\text{ـ}۲۰)$$

این کمیت، آهنگ انتقال انرژی را توسط چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی ایده‌آل به بقیهٔ مدار به‌دست می‌دهد. همان‌گونه که در بخش ۳۱ـ۲ مورد بحث قرار دادیم، این انرژی ممکن است به‌صورت انرژی داخلی در یک مقاومت، انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی خازن، انرژی مکانیکی در موتور، یا انرژی شیمیایی در باتریی که در حال پرشدن است، پدیدار شود. اگر در نظر بگیریم که این مدار یک سیستم منزوی است، در آن صورت انرژی کل آن نمی‌تواند تغییر کند، و کاهش در انرژی چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی باید با افزایش خالص انرژی در سایر قسمتهای مدار موازنه کند.

تصور کنید که مدار تشکیل شده باشد از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی و مقاومت R. اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های a و b شکل ۳۱ـ۱۹ برابر، $\Delta V_R = iR$، است. در مدتی که مقدار بار dq در داخل مقاومت از a به b می‌رود، این مقدار بار تغییر در انرژی پتانسیل $dU = dq\Delta V_R$ (معادلهٔ ۲۸ـ۱۴ را ببینید) را تجربه می‌کند. این انرژی باید به مقاومت انتقال یافته باشد، در نتیجه توان انتقال‌یافته به مقاومت (آهنگ انتقال انرژی) برابر است با $P_R = dU/dt = (dq/dt)\Delta V_R = i\Delta V_R$ یا

$$P_R = i^2 R \qquad (۳۱\text{ـ}۲۱)$$

و چون $i = \Delta V_R/R$ است، این نتیجه را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$P_R = \frac{(\Delta V_R)^2}{R} \qquad (۳۱\text{ـ}۲۲)$$

این انتقال انرژی مقاومت در مدار اغلب به نام گرمایش ژول نامیده می‌شود.

وقتی که بار الکتریکی از درون یک مقاومت از پتانسیل بالاتر (پایانهٔ a) به پتانسیل پایین‌تر (پایانهٔ b) حرکت می‌کند، اگر برخورد با سایر اتمهای مقاومت وجود نداشت، انرژی به‌دست می‌آورد. این برخوردها سبب می‌شوند که سرعت سوق حاملهای بار ثابت بماند، و انرژی کسب‌شده در این برخوردها توسط اتمها (که سبب افزایش دامنهٔ ارتعاش اتمها حول وضعیت تعادلشان می‌شود) می‌تواند متناظر با افزایش دمای مقاومت باشد. این وضعیت شبیه سقوط سنگ با سرعت حدیش در یک محیط گرانرو مانند هوا یا آب است. وقتی که سنگ بر اثر گرانش سقوط می‌کند، کاهش انرژی پتانسیل آن بلافاصله و بی‌درنگ، نه به افزایش انرژی جنبشی آن، بلکه به افزایش انرژی داخلی سیستم متشکل از سنگ و محیط اطرافش تبدیل می‌شود.

در باتری واقعی با مقاومت داخلی r، اختلاف پتانسیل بین پایانه‌ها برابر است با $\Delta V_{\text{batt}} = \mathscr{E} - ir$، و باری که از داخل باتری می‌گذرد انرژی پتانسیلی برابر با

$$dU = dq\Delta V_{\text{batt}} = dq(\mathscr{E} - ir)$$

کسب می‌کند. توان تأمین‌شده توسط باتری برابر است با $P_{\text{batt}} = dU/dt$ یا

$$P_{\text{batt}} = \mathscr{E} i - i^2 r = P_{\text{emf}} - P_r \qquad (۳۱\text{ـ}۲۳)$$

انرژی در دسترس برای سایر قسمتهای مدار به اندازهٔ گرمایش ژول در مقاومت داخلی باتری کاهش یافته است.

یکای توان، که از معادله‌های (۳۱ـ۲۰) به (۳۱ـ۲۱) حاصل می‌شود، همانا ولت‌آمپر است، که می‌توان نشان داد معادل وات است. برای نشان دادن این ارتباط می‌توانیم از تعریف ولت (ژول بر کولن) و آمپر (کولن بر ثانیه) استفاده کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۷ یک قطعه سیم بخاری برقی در اختیار داریم. این سیم از آلیاژی از نیکل‌ـکروم‌ـآهن ساخته شده است که به آن "نیکروم" می‌گوییم. مقاومت R این سیم ۷۲Ω است. می‌خواهیم این سیم را بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل ۱۲۰ V وصل کنیم. در کدام یک از دو وضعیت زیر این سیم گرمای بیشتری ایجاد می‌کند؟ (الف) سیم را به‌طور کامل بین دو نقطه وصل کنیم، یا (ب) سیم را به دو نیم کرده و دو نیمه را به‌طور موازی به ولتاژ شبکهٔ ۱۲۰ ولتی وصل کنیم؟

حل. (الف) توان تلف‌شده توسط کل سیم، از معادلهٔ (۳۱ـ۲۲)، چنین به‌دست می‌آید

$$P_R = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{(۱۲۰\ \text{V})^2}{۷۲\Omega} = ۲۰۰\ \text{W}$$

(ب) توان مصرف‌شده در نصف سیم (و در نتیجه نصف مقاومت) چنین است

$$P'_R = \frac{(\Delta V)^۲}{\frac{۱}{۲}R} = \frac{(۱۲۰\ \text{V})^۲}{۳۶\Omega} = ۴۰۰\ \text{W}$$

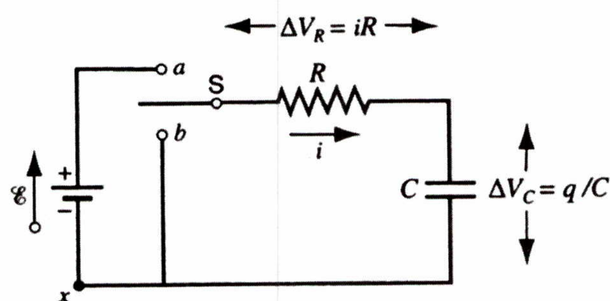
چون دو نیمه سیم داریم، در نتیجه توان گرمایی حاصل از کل دو نیمه برابر $۸۰۰\ \text{W}$ است، یعنی چهار برابر سیم کامل است. به نظر می‌رسد که محاسبات بالا به این معناست که می‌توانیم یک قطعه سیم بخاری بخریم، آن را به دو نیم کرده مجدداً به‌هم متصل کنیم تا چهار برابر گرما به‌دست آوریم. چرا این کار چندان هم پسندیده نیست؟

۳۱ـ۷ مدارهای RC

در بخش قبلی مدارهایی را مطالعه کردیم که فقط شامل مقاومت بودند، و در آنها جریانها برحسب زمان تغییر نمی‌کرد. در اینجا خازن را جزء یا عنصر مدار معرفی می‌کنیم، که سبب می‌شود جریانهای متغیر برحسب زمان را مورد توجه قرار دهیم.

فرض کنید که خازن شکل ۳۱ـ۲۰ را با قرار دادن کلید S در وضعیت a، باردار می‌کنیم. (بعداً اتصال به نقطهٔ b را مورد توجه قرار می‌دهیم.) چه جریانی در مدار تک‌حلقه‌ای حاصل برقرار می‌شود؟ برای مطالعهٔ این موضوع از اصول پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

در زمان dt مقدار بار dq ($= i\,dt$) از هر مقطع مدار می‌گذرد و روی صفحهٔ مثبت خازن می‌نشیند. در این انتقال بار کار انجام‌شده توسط چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی ($= \mathscr{E}dq$؛ معادلهٔ (۳۱ـ۱) را



شکل ۳۱ـ۲۰ وقتی کلید S در موقعیت a قرار می‌گیرد، خازن C از طریق مقاومت R به‌وسیلهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ باردار می‌شود. پس از آنکه خازن باردار (پُر) شد، کلید را در موقعیت b قرار می‌دهیم، و خازن از طریق مقاومت R تخلیه می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت، ΔV_R (برابر با iR)، را می‌توانیم به‌سادگی اندازه‌گیری و جریان i را معین کنیم و نیز می‌توانیم اختلاف پتانسیل دو سرخازن، ΔV_C (برابر با q/C)، را اندازه‌گیری و بار q را معین کنیم.

ببینید) باید برابر باشد با انرژی داخلی ایجادشده در مقاومت در مدت dt ($= i^۲R\,dt$)، به اضافهٔ افزایش dU، در مقدار انرژی ذخیره‌شده در خازن U ($= q^۲/۲C$؛ معادلهٔ ۳۰ـ۲۴ را ببینید). از پایستگی انرژی داریم

$$\mathscr{E}dq = i^۲Rdt + d\left(\frac{q^۲}{۲C}\right)$$

یا

$$\mathscr{E}dq = i^۲Rdt + \frac{q}{C}dq$$

از تقسیم معادلهٔ بالا بر dt نتیجه می‌گیریم

$$\mathscr{E}\frac{dq}{dt} = i^۲R + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

چون q مقدار بار روی صفحهٔ بالایی خازن است، مثبت بودن i به معنی مثبت بودن dq/dt است. اگر در این معادله، $i = dq/dt$، را قرار دهیم، می‌رسیم به

$$\mathscr{E} = iR + \frac{q}{C} \qquad (۳۱\text{ـ}۲۴)$$

معادلهٔ (۳۱ـ۲۴) را می‌توان از قاعدهٔ حلقه نیز به‌دست آورد، زیرا قاعدهٔ حلقه از اصل پایستگی انرژی به‌دست آمده است. با شروع از نقطهٔ x و حرکت ساعتگرد به گرد مدار، درمی‌یابیم که در عبور از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی، پتانسیل افزایش می‌یابد و در عبور از مقاومت و خازن، پتانسیل کاهش پیدا می‌کند، یا به عبارت دیگر

$$\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} = ۰$$

که همانند معادلهٔ (۳۱ـ۲۴) است.

برای اینکه معادلهٔ (۳۱ـ۲۴) را حل کنیم، ابتدا به‌جای i مقدار dq/dt را قرار می‌دهیم، یعنی داریم

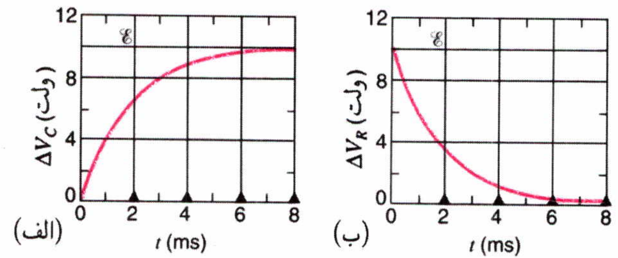
$$\mathscr{E} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \qquad (۳۱\text{ـ}۲۵)$$

که می‌توانیم معادلهٔ (۳۱ـ۲۵) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\frac{dq}{q - \mathscr{E}C} = -\frac{dt}{RC} \qquad (۳۱\text{ـ}۲۶)$$

با انتگرال‌گیری از این تابع برای حالتی که در $t = ۰$ داشته باشیم $q = ۰$، نتیجه می‌گیریم (البته پس از حل معادلهٔ برای q)،

$$q = C\mathscr{E}(۱ - e^{-t/RC}) \qquad (۳۱\text{ـ}۲۷)$$



شکل ۳۱ـ۲۱ (الف) همان‌طورکه نمودار اختلاف پتانسیل ΔV_C بیان می‌کند، در خلال فرایند پرشدن خازن، بار روی صفحات خازن با گذشت زمان افزایش می‌یابد، و ΔV_C به مقدار نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ میل می‌کند. پس از آنکه در لحظهٔ $t = ۰$ کلید را در وضعیت a قرار دادیم زمان را اندازه می‌گیریم. (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت با گذشت زمان کاهش می‌یابد، و سرانجام به صفر میل می‌کند، زیرا وقتی خازن کاملاً پر شد جریان به صفر سقوط می‌کند. این منحنیها برای: $\mathscr{E} = ۱۰\ \text{V}$، $R = ۲۰۰۰\Omega$، و $C = ۱\mu\text{F}$ رسم شده‌اند. مثلثهای سیاه ثابتهای زمانی متوالی را مشخص می‌کنند.

می‌توانیم بررسی کنیم که تابع $q(t)$ واقعاً جوابی برای معادلهٔ (۳۱ـ۲۵) است. این کار را با قرار دادن این جواب در معادله و مشاهدهٔ اینکه، آیا اتحاد واقعاً برقرار می‌شود، انجام می‌دهیم. با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۳۱ـ۲۷) نسبت به زمان، می‌رسیم به

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/RC} \qquad (۳۱\text{ـ}۲۸)$$

با جایگزین کردن q (معادلهٔ ۳۱ـ۲۷) و dq/dt (معادلهٔ ۳۱ـ۲۸) در معادلهٔ (۳۱ـ۲۵) اتحادی حاصل می‌شود که باید درستی آن را تحقیق کنیم. بنابراین معادلهٔ (۳۱ـ۲۷) جوابی برای معادلهٔ (۳۱ـ۲۵) است.

در آزمایشگاه به‌آسانی می‌توان i و q را با اندازه‌گیری کمیتهایی که متناسب با آنها هستند یعنی اختلاف پتانسیل $\Delta V_R (= iR)$ دو سر مقاومت و اختلاف پتانسیل $\Delta V_C (= q/C)$ دو سر خازن تعیین کرد. این‌گونه اندازه‌گیریها را، می‌توان با اتصال ولت‌سنجها (یا کاوه‌های نوسان‌نما) به دو سر مقاومت و خازن به صورتی نسبتاً آسان انجام داد. در شکل ۳۱ـ۲۱ نمودارهای حاصل از اندازه‌گیریهای ΔV_R و ΔV_C را نشان داده‌ایم. به نکات زیر توجه کنید: (۱) در $t = ۰$ داریم $\Delta V_R = \mathscr{E}$ (تمام اختلاف پتانسیل در دو سر مقاومت ظاهر می‌شود) و $\Delta V_C = ۰$ (خازن خالی است). (۲) وقتی $t \to \infty$، داریم $\Delta V_C \to \mathscr{E}$ (خازن کاملاً پر شده است) و $\Delta V_R \to ۰$ (جریان متوقف می‌شود). (۳) در همهٔ زمانها، همان‌طورکه معادلهٔ (۳۱ـ۲۵) ایجاب می‌کند، داریم $\Delta V_R + \Delta V_C = \mathscr{E}$.

کمیت RC در معادله‌های (۳۱ـ۲۷) و (۳۱ـ۲۸) دارای بُعد زمان است و آن را ثابت زمانی خازنی، τ_C، مدار می‌نامیم:

$$\tau_C = RC \qquad (۳۱\text{ـ}۲۹)$$

این زمانی است که بار روی صفحات خازن به $۱ - e^{-۱}$ برابر مقدار نهایی آن (یعنی تقریباً ۶۳ درصد) $C\mathscr{E}$ رسیده است. برای نشان‌دادن این مطلب، در معادلهٔ (۳۱ـ۲۷) چنین قرار می‌دهیم $t = \tau_C = RC$ و نتیجه می‌گیریم

$$q = C\mathscr{E}(۱ - e^{-۱}) = ۰{,}۶۳ C\mathscr{E}$$

شکل ۳۱ـ۲۱(الف) نشان می‌دهد، اگر مداری که خازن را پُر می‌کند شامل مقاومت باشد، افزایش بار خازن به مقدار حدی آن به مدتی که با ثابت زمانی RC مشخص می‌شود به تأخیر می‌افتد. اگر مقاومتی در مدار نباشد ($RC = ۰$) بار بی‌درنگ تا مقدار حدی صعود می‌کند. اگر چه نشان داده‌ایم که این تأخیر زمانی پیامد کاربرد قاعدهٔ حلقه در مورد مدارهای RC است، درک فیزیکی علل این تأخیر حائز اهمیت است.

وقتی در شکل ۳۱ـ۲۰ کلید S در موقعیت a بسته شود، بار روی صفحات خازن در ابتدا صفر و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر خازن نیز در آغاز صفر است. معادلهٔ (۳۱ـ۲۴) نشان می‌دهد که در این زمان $\mathscr{E} = iR$ و در نتیجه در $t = ۰$ داریم $i = \mathscr{E}/R$. به واسطهٔ این جریان، بارها به خازن سرازیر می‌شوند و با گذشت زمان اختلاف پتانسیل بین دو سر خازن افزایش می‌یابد. اما معادلهٔ (۳۱ـ۲۴) اکنون نشان می‌دهد که چون نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ ثابت است، هر افزایشی در اختلاف پتانسیل دو سر خازن باید با کاهش متناظری در اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت متوازن شود، و به صورتی مشابه کاهش در جریان را شاهد خواهیم بود. این کاهش جریان نشان می‌دهد که بارهای روی خازن با آهنگ کندتری افزایش می‌یابند. این فرایند تا آنجا ادامه می‌یابد که جریان به صفر کاهش پیدا کند، که در آن زمان دیگر هیچ افت پتانسیلی در دو سر مقاومت وجود ندارد. در این حالت کل اختلاف پتانسیل مربوط به نیروی محرکهٔ الکتریکی در دو سر خازن ظاهر می‌شود، که اکنون کاملاً پر شده است ($q = C\mathscr{E}$). تا وقتی که تغییری در مدار صورت نگیرد، دیگر هیچ جریان باری وجود ندارد. چگونگی به‌دست آوردن معادله‌های (۳۱ـ۲۷) و (۳۱ـ۲۸) و بررسی و مطالعهٔ شکل ۳۱ـ۲۰ را با توجه به بحث کیفی این بند مرور کنید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۸ مقاومت R(۶٫۲ MΩ) و خازن C(۲٫۴μF) به‌طور سری به‌هم متصل شده‌اند و باتری ۱۲ V با مقاومت داخلی ناچیز به دو سر مجموعه وصل شده است. (الف) ثابت زمانی خازنی این مدار چقدر است؟ (ب) چه مدت پس از آنکه باتری به مجموعه متصل شد اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر ۵٫۶ V می‌شود؟

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۱ـ۲۹) داریم

$$\tau_C = RC = (۶٫۲ \times ۱۰^{۶}\Omega)(۲٫۴ \times ۱۰^{-۶}\text{F}) = ۱۵\,\text{s}$$

(ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر $\Delta V_C = q/C$ است که بنابر معادلهٔ (۳۱ـ۲۷) می‌توان نوشت

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} = \mathscr{E}(۱ - e^{-t/RC})$$

از حل این معادله برای متغیر t، و بهره‌گیری از $\tau_C = RC$، داریم

$$t = -\tau_C \ln\left(۱ - \frac{\Delta V_C}{\mathscr{E}}\right)$$

$$= -(۱۵\,\text{s})\ln\left(۱ - \frac{۵٫۶\,\text{V}}{۱۲\,\text{V}}\right) = ۹٫۴\,\text{s}$$

همان‌طور که دیدیم، پس از گذشت زمان $\tau_C = ۱۵\,\text{s}$، اختلاف پتانسیل دو سر خازن $۰٫۶۳\mathscr{E} = ۷٫۶\,\text{V}$ می‌شود. منطقی است که در مدت زمان کوتاه‌تر ۹٫۴ s، اختلاف پتانسیل خازن به مقدار کمتر ۵٫۶ V برسد.

تخلیهٔ خازن

اکنون فرض کنید که کلید S در شکل ۳۱ـ۲۰ برای مدتی بسیار طولانی‌تر از RC در موقعیت a قرار گرفته باشد. برای تمام هدفهای عملی، می‌توان فرض کرد که خازن کاملاً پُر شده است و هیچ باری جاری نمی‌شود. سپس کلید S را در موقعیت b قرار می‌دهیم. بار روی صفحه‌های خازن و جریان مدار برحسب زمان چگونه تغییر می‌کنند؟

وقتی کلید S در موقعیت b بسته می‌شود، بار خازن از طریق مقاومت تخلیه می‌شود. هیچ نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار وجود ندارد و معادلهٔ (۳۱ـ۲۴) برای مدار در حالت $\mathscr{E} = ۰$، به شکل سادهٔ زیر در می‌آید

$$iR + \frac{q}{C} = ۰ \qquad (۳۱\text{ـ}۳۰)$$

با قرار دادن $i = dq/dt$، این امکان به‌وجود می‌آید که معادلهٔ مدار را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم (با معادلهٔ (۳۱ـ۲۵) مقایسه کنید):

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = ۰ \qquad (۳۱\text{ـ}۳۱)$$

جواب این معادله، که می‌توانید با انتگرال‌گیری (پس از نوشتن معادله به‌صورت $dq/q = -dt/RC$) به‌دست آورید و درستی آن را با جایگزینی بررسی کنید، چنین است:

$$q = q_۰ e^{-t/\tau_C} \qquad (۳۱\text{ـ}۳۲)$$

که در این معادله $q_۰$ بار اولیهٔ روی صفحه‌های خازن است (که در این مورد، برابر $\mathscr{E}C$ است). ثابت زمانی خازنی $\tau_C = RC$ در این رابطهٔ مربوط به تخلیهٔ خازن، و همین‌طور برای معادلهٔ مربوط به پُرکردن خازن (معادلهٔ ۳۱ـ۲۷) ظاهر می‌شود. می‌بینیم که در زمانی مانند $t = \tau_C = RC$ بار خازن به مقدار $q_۰ e^{-۱}$ کاهش یافته که در حدود ۳۷٪ بار اولیهٔ $q_۰$ است.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۳۱ـ۳۲)، جریان تخلیهٔ بار خازن را پیدا می‌کنیم،

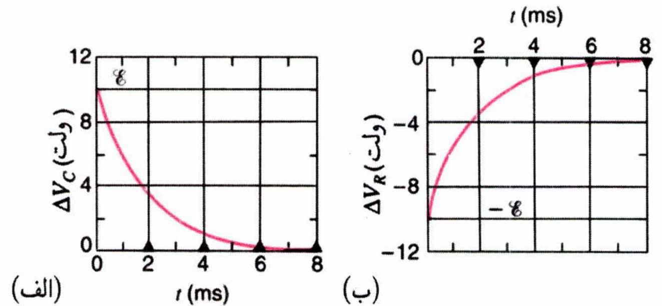
$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_۰}{RC}e^{-t/\tau_C} \qquad (۳۱\text{ـ}۳۳)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که جهت جریان برخلاف جهتی است که در شکل ۳۱ـ۲۰ نشان داده شده است. این جریان در همان جهتی است که باید باشد، زیرا در این حالت خازن تخلیه می‌شود و پر نمی‌شود. اگر خازن در آغاز کاملاً پُر شده باشد، در آن صورت $q_۰ = C\mathscr{E}$، و معادلهٔ (۳۱ـ۳۳) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$i = -\frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/\tau_C} \qquad (۳۱\text{ـ}۳۴)$$

جریان اولیه را با قرار دادن $t = ۰$ در معادلهٔ (۳۱ـ۳۴) برابر $-\mathscr{E}/R$ به‌دست می‌آوریم. این جواب منطقی است زیرا اختلاف پتانسیل اولیهٔ دو سر مقاومت برابر $\mathscr{E}$ است.

اختلاف پتانسیلهای دو سر R و C را، که به‌ترتیب با i و q متناسب‌اند، می‌توان باز هم همان‌گونه که در شکل ۳۱ـ۲۰ بیان شد، اندازه‌گیری کرد. نتیجه‌های نوعی این‌گونه اندازه‌گیریها در شکل ۳۱ـ۲۲ نشان داده شده است. توجه داشته باشید، همان‌طور که معادلهٔ (۳۱ـ۳۲) نشان می‌دهد $\Delta V_C = q/C$ از مقدار بیشینه‌اش، که در $t = ۰$ رخ می‌دهد، به‌صورت نمایی فرو می‌افتد، در حالی‌که $\Delta V_R = iR$ منفی است و به‌طور نمایی افزایش می‌یابد تا به صفر برسد. همچنان توجه داشته باشید، که بنابر الزام معادلهٔ (۳۱ـ۳۰)، داریم $\Delta V_C + \Delta V_R = ۰$.



شکل ۳۱ـ۲۲ (الف) در شکل ۳۱ـ۲۰ پس از آنکه خازن به‌طور کامل پُر شد کلید S را از a به b تغییر می‌دهیم، و این لحظه را $t=۰$ جدید در نظر می‌گیریم. با خالی‌شدن خازن اختلاف پتانسیل دو سر آن به‌صورت نمایی به صفر کاهش پیدا می‌کند. (ب) وقتی در ابتدا کلید S را در موقعیت b قرار می‌دهیم، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت در مقایسه با مقدار آن در خلال فرایند پُر شدن خازن که در شکل ۳۱ـ۲۱ نشان داده شده است منفی است. همزمان با تخلیه شدن خازن، اندازهٔ جریان به‌صورت نمایی به صفر میل می‌کند و افت پتانسیل در دو سر مقاومت نیز به صفر نزدیک می‌شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۹ خازن C از طریق مقاومت R تخلیه می‌شود. (الف) پس از چند ثابت زمانی بار آن به نصف مقدار اولیه کاهش پیدا می‌کند؟ (ب) پس از چند ثابت زمانی انرژی ذخیره‌شده در آن به نصف مقدار انرژی اولیه کاهش می‌یابد؟

حل. (الف) بار روی خازن مطابق معادلهٔ (۳۱ـ۳۲) تغییر می‌کند،

$$q = q_{\circ} e^{-t/\tau_C}$$

که در این رابطه $q_{\circ}$ بار اولیهٔ خازن است. در جستجوی زمانی هستیم که برای آن $q = ۱/۲ q_{\circ}$ است، یعنی

$$\frac{۱}{۲} q_{\circ} = q_{\circ} e^{-t/\tau_C}$$

$q_{\circ}$ را از طرفین معادله حذف می‌کنیم و سپس با گرفتن لگاریتم طبیعی می‌رسیم به

$$-\ln ۲ = -\frac{t}{\tau_C}$$

یا

$$t = (\ln ۲)\tau_C = ۰{,}۶۹\tau_C$$

پس از ۰٫۶۹ ثابت زمانی مقدار بار خازن به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش پیدا می‌کند.

(ب) انرژی ذخیره‌شده در خازن عبارت است از

$$U = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{q_{\circ}^۲}{۲C} e^{-۲t/\tau_C} = U_{\circ} e^{-۲t/\tau_C}$$

که در اینجا $U_{\circ}$ مقدار انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیه است. زمانی که سپری می‌شود تا $U = \frac{۱}{۲} U_{\circ}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲} U_{\circ} = U_{\circ} e^{-۲t/\tau_C}$$

با حذف $U_{\circ}$ و گرفتن لگاریتم از طرفین معادله، می‌رسیم به

$$-\ln ۲ = -۲t/\tau_C$$

یا

$$t = \tau_C \frac{\ln ۲}{۲} = ۰{,}۳۵\tau_C$$

انرژی ذخیره‌شده پس از ۰٫۳۵ برابر ثابت زمانی به نصف مقدار اولیه‌اش فرو می‌افتد. این موضوع بدون توجه به اینکه انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیه چقدر است همواره معتبر است. زمان لازم برای اینکه بار خازن به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش یابد، یعنی $۰{,}۶۹\tau_C$، از زمان لازم برای اینکه انرژی ذخیره‌شده در خازن به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش پیدا کند، یعنی $۰{,}۳۵\tau_C$، طولانی‌تر است. چرا؟

چندگزینه‌ای

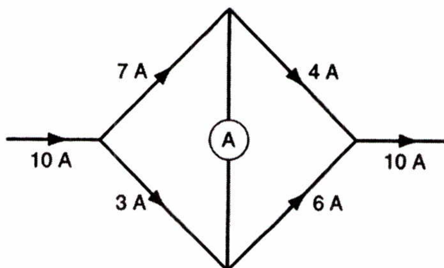
۳۱ـ۱ جریان الکتریکی

۱. قاعدهٔ گره، پیامد مستقیم

(الف) قانون دوم نیوتون است. (ب) پایستگی تکانه است.
(ج) پایستگی انرژی است. (د) پایستگی بار الکتریکی است.

۲. در شکل ۳۱ـ۲۳ شبکه‌ای از سیمهای حامل جریانهای گوناگون را نشان داده‌ایم. جریانی که از A می‌گذرد چقدر است؟

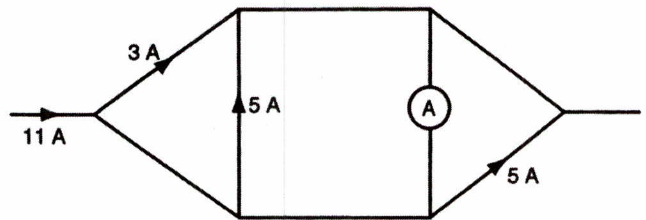
(الف) 1A (ب) 2A (ج) 3A (د) 9A (ه) 11A



شکل ۳۱ـ۲۳ پرسش چندگزینه‌ای ۲.

۳. در شکل ۳۱ـ۲۴ شبکه‌ای از سیمهای حامل جریانهای گوناگون را نشان داده‌ایم. جریانی که از A می‌گذرد چقدر است؟

(الف) 1A (ب) 2A (ج) 6A (د) 8A
(ه) برای پاسخگویی به این پرسش اطلاعات کافی نداریم.



شکل ۳۱ـ۲۴ پرسش چندگزینه‌ای ۳.

۳۱ـ۲ نیروی محرکهٔ الکتریکی

۴. یکای اندازه‌گیری نیروی محرکهٔ الکتریکی، $\mathscr{E}$، چیست؟

(الف) emf (ب) ژول (ج) ولت (V) (د) نیوتون (N)

۵. عمل چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار آن است که

(الف) الکترونها را برای مدار تأمین کند.

(ب) پتانسیل الکترونها را بالا ببرد.

(ج) پتانسیل الکترونها را کاهش دهد.

(د) الکترونها را به سرعتهای بالاتر شتاب دهد.

۳۱ـ۳ تحلیل مدار

۶. قاعدهٔ حلقه، پیامد مستقیم

(الف) قانون دوم نیوتون است. (ب) پایستگی تکانه است.

(ج) پایستگی انرژی است. (د) پایستگی بار الکتریکی است.

۷. مقاومت ثابت R به‌صورت سری به یک مقاومت متغیر و یک باتری ایده‌آل متصل است. در آغاز مقاومتها یکسان‌اند.

(۱) وقتی مقاومتِ این مقاومت متغیر کاهش می‌یابد، جریانی که از آن می‌گذرد

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) تغییر نمی‌کند.

(د) بدون اطلاعات بیشتر نمی‌توان به این پرسش پاسخ گفت.

(۲) وقتی از مقاومتِ این مقاومت متغیر کاسته می‌شود، اختلاف پتانسیل بین دو سر آن

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) تغییر نمی‌کند.

(د) بدون اطلاعات بیشتر نمی‌توان به این پرسش پاسخ گفت.

۳۱ـ۴ میدانهای الکتریکی در مدارها

۳۱ـ۵ اتصال سری و موازی مقاومتها

۸. دو مقاومت R_1 و R_2 به‌صورت سری به هم متصل شده‌اند؛ فرض کنید $R_1 < R_2$ است. مقاومت معادل این مجموعه R است، به‌طوری که

(الف) $R < R_1/2$ (ب) $R_1/2 < R < R_1$

(ج) $R_1 < R < R_2$ (د) $R_2 < R < 2R_2$

(هـ) $2R_2 < R$

۹. دو مقاومت R_1 و R_2 به‌صورت موازی به‌هم متصل شده‌اند؛ فرض کنید $R_1 < R_2$ است. مقاومت معادل این مجموعه R است به‌طوری که

(الف) $R < R_1/2$ (ب) $R_1/2 < R < R_1$

(ج) $R_1 < R < R_2$ (د) $R_2 < R < 2R_2$

(هـ) $2R_2 < R$

۱۰. کمینهٔ تعداد مقاومت مورد نیاز برای ساختن شبکه‌ای که جهت مشخص کردن مقاومت معادل آن نتوان شبکه را به‌صورت اتصالهای سری و موازی تحلیل و از معادله‌های (۳۱ـ۱۳) و (۳۱ـ۱۹) استفاده کرد چقدر است؟

(الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶

۳۱ـ۶ انتقال انرژی در مدار الکتریکی

۱۱. توان یک لامپ روشنایی استاندارد، در امریکا ۶۰ وات است. این لامپ چنان طراحی شده است که در مدار ۱۲۰ ولت کار می‌کند. در خلال یک‌بار روشن کردن متوجه می‌شویم که توان خروجی لامپ به ۳۰ وات کاهش پیدا کرده است. ولتاژ این لامپ به چند درصد مقدار اصلی کاهش یافته است؟

(الف) ٪۷۵ (ب) ٪۷۰ (ج) ٪۵۰ (د) ٪۳۳

۱۲. یک مقاومت ثابت R به‌صورت سری به یک مقاومت متغیر و یک باتری واقعی (که مقاومت داخلی آن چشم‌پوشیدنی نیست) متصل شده است. در آغاز مقاومت ثابت و مقاومت متغیر مقدار یکسانی دارند.

(۱) همین که مقاومتِ این مقاومت متغیر کاهش داده می‌شود، آهنگ انتقال انرژی به مقاومت ثابت

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

(د) بدون داشتن اطلاعات بیشتر نمی‌توان آن را تعیین کرد.

(۲) همین که مقاومتِ این مقاومت متغیر کاهش داده می‌شود، آهنگ انتقال انرژی به مقاومت متغیر

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

(د) بدون داشتن اطلاعات بیشتر نمی‌توان آن را تعیین کرد.

۱۳. یک مقاومت ثابت به‌طور موازی به یک مقاومت متغیر وصل شده است؛ و این مجموعه را به دو سر یک باتری واقعی (که مقاومت داخلی آن چشم‌پوشیدنی نیست) متصل کرده‌ایم. در آغاز مقاومت ثابت و مقاومت متغیر مقدار یکسانی دارند.

(۱) همین که مقاومتِ این مقاومت متغیر کاهش داده می‌شود،

جریانی‌که از مقاومت ثابت می‌گذرد از این شرط پیروی می‌کند:

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.
(د) بدون داشتن اطلاعات بیشتر نمی‌توان آن را تعیین کرد.

(۲) همین که مقاومتِ این مقاومت متغیر کاهش داده می‌شود، آهنگ انتقال انرژی به مقاومت ثابت

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.
(د) بدون داشتن اطلاعات بیشتر نمی‌توان آن را تعیین کرد.

(۳) همین که مقاومتِ این مقاومت متغیر کاهش داده می‌شود، آهنگ انتقال انرژی به مقاومت متغیر

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.
(د) بدون داشتن اطلاعات بیشتر نمی‌توان آن را تعیین کرد.

۳۱ـ۷ مدارهای RC

۱۴. یک مقاومت، خازن، کلید و باتری ایده‌آل به‌طور سری به‌هم متصل شده‌اند. در آغاز این فرایند، خازن بدون بار است. سپس کلید را می‌بندیم و اجازه می‌دهیم که جریان جاری شود.

(۱) هنگامی که جریان جاری می‌شود، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

(۲) هنگامی که جریان جاری می‌شود، اختلاف پتانسیل دو سر خازن

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت می‌ماند.

۱۵. خازنی را با اتصال به‌صورت سری به یک مقاومت و یک باتری ایده‌آل باردار می‌کنیم. باتری با آهنگ $P(t)$ انرژی را تأمین می‌کند، انرژی داخلی مقاومت با آهنگ $P_R(t)$ افزایش پیدا می‌کند، و خازن با آهنگ $P_C(t)$ انرژی را ذخیره می‌کند. دربارهٔ ارتباط بین $P_R(t)$ و $P_C(t)$ به چه نتیجه‌ای می‌توان دست یافت؟

(الف) برای تمام زمانهای t که خازن در حال پُرشدن است، داریم $P_R(t) > P_C(t)$.

(ب) برای تمام زمانهای t که خازن در حال پُرشدن است، داریم $P_R(t) = P_C(t)$.

(ج) برای تمام زمانهای t که خازن در حال پُرشدن است، داریم $P_R(t) < P_C(t)$.

(د) فقط در آغاز فرایند پُرشدن خازن، داریم $P_R(t) > P_C(t)$.

(ه) فقط در آغاز فرایند پُرشدن خازن داریم $P_R(t) < P_C(t)$.

پرسشها

۱. آیا جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری به جهت جریان در آن بستگی دارد؟

۲. اگر در شکل ۳۱ـ۴ جرم m را آن قدر افزایش دهیم که جهت حرکت "موتور" وارون و به "مولد"، یعنی چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی، تبدیل شود، چه تغییراتی رخ خواهد داد؟

۳. دربارهٔ این گزاره که روش انرژی و روش قاعدهٔ حلقه در حل مسئله‌های مربوط به مدارها کاملاً هم‌ارزند به تفصیل بحث کنید.

۴. روشی را برای اندازه‌گیری نیروی محرکهٔ الکتریکی و مقاومت داخلی باتری طراحی کنید.

۵. منشأ مقاومت داخلی باتری کدام است؟ آیا مقاومت داخلی باتری به طول عمر و ابعاد آن بستگی دارد؟

۶. جریانی را که از یک باتری با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ و مقاومت داخلی r می‌گذرد به‌وسیلهٔ عاملهای خارجی کاهش داده‌ایم. اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری کاهش می‌یابد یا افزایش. دربارهٔ پاسخ خود توضیح دهید.

۷. در شکل ۳۱ـ۸(الف) چگونه می‌توان اختلاف پتانسیل ΔV_{ab} را با طی مسیری از a به b که در مدار رسانا قرار ندارد محاسبه کرد؟

۸. یک لامپ ۲۵ وات ۱۲۰ ولت وقتی به یک مجموعه باتری متصل شود با روشنایی متداول می‌درخشد. یک لامپ ۵۰۰ وات ۱۲۰ ولتی وقتی به همین مجموعه باتری متصل می‌شود روشنایی اندکی دارد. این وضعیت چگونه روی می‌دهد؟

۹. در چه شرایطی اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های یک باتری از نیروی محرکهٔ الکتریکی آن بیشتر می‌شود؟

۱۰. اتومبیلها عموماً از سیستم برقی ۱۲ ولتی استفاده می‌کنند. سالها قبل از سیستم ۶ ولتی استفاده می‌شد. چرا این تغییر به‌وجود آمد؟ چرا به ۲۴ ولت تبدیل نشد؟

۱۱. قاعدهٔ حلقه بر اصل پایستگی انرژی استوار است و قاعدهٔ گره بر اصل پایستگی بار الکتریکی. توضیح دهید که چگونه این قاعده‌ها بر این اصلها استوار شده‌اند.

۱۲. در چه شرایطی علاقه‌مندید باتریها را به‌صورت موازی به‌هم متصل کنید؟ در چه شرایطی به‌صورت سری؟

۱۳. تشابه و تفاوت فرمولهای مربوط به مقدارهای معادل اتصالهای سری و موازی (الف) خازنها و (ب) مقاومتها را مشخص کنید.

۱۴. در چه شرایطی علاقه‌مندید که مقاومتها را به‌صورت موازی به‌هم متصل کنید؟ در چه شرایطی به‌صورت سری؟

۱۵. تفاوت نیروی محرکهٔ الکتریکی و اختلاف پتانسیل در چیست؟

۱۶. با مراجعه به شکل ۳۱ـ۱۰ و استفاده از یک استدلال کیفی مطمئن شوید که i_2 در جهت برعکس رسم شده است.

۱۷. آیا قاعده‌های گره و حلقه برای مدارهایی که شامل خازن هستند به‌کار می‌رود؟

۱۸. نشان دهید که در معادلهٔ (۳۱ـ۲۹) حاصلضرب RC دارای بعد زمان است، یعنی اینکه، ۱ ثانیه = ۱ اهم × ۱ فاراد.

۱۹. یک خازن به‌صورت سری به باتری و مقاومت متصل شده است. باری که خازن ذخیره می‌کند به مقدار مقاومت بستگی ندارد. پس نقش مقاومت در این مدار چیست؟

۲۰. توضیح دهید که چرا در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۹، انرژی با سرعت بیشتری از بار الکتریکی به نصف مقدار اولیه‌اش فرو می‌افتد.

۲۱. نور فلاش در دوربین عکاسی با تخلیهٔ خازن در لامپ تولید می‌شود. چرا نمی‌توان لامپ فلاش عکاسی را مستقیماً به منبع تغذیه‌ای که برای پُر کردن خازن به‌کار می‌رود متصل کرد؟

۲۲. آیا زمان لازم برای اینکه بار خازن در مدار RC به کسر معینی از مقدار نهایی آن برسد به نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده بستگی دارد؟ آیا زمان لازم برای اینکه بار خازن را به مقدار معینی تغییر دهیم به نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده وابسته است؟

۲۳. خازنی را به دو قطب یک باتری متصل کرده‌ایم. آیا باری که در نهایت روی صفحه‌های خازن ظاهر می‌شود به مقاومت داخلی باتری بستگی دارد؟

۲۴. روشی را ابداع کنید که به‌وسیلهٔ آن بتوان از مدار RC برای اندازه‌گیری مقاومتهای بسیار زیاد استفاده کرد.

۲۵. فرض کنید در شکل ۳۱ـ۲۰، کلید S در موقعیت a بسته شود. با توجه به اینکه قطب منفی باتری به مقاومت R متصل نیست، توضیح دهید چرا جریان در مقاومت R، همان‌طور که معادلهٔ (۳۱ـ۲۸) پیش‌بینی می‌کند، باید برابر با $\mathscr{E}/R$ باشد.

۲۶. فرض کنید در شکل ۳۱ـ۲۰، کلید S در موقعیت a بسته شود. چرا بار روی خازن C بلافاصله به مقدار نهایی $q = C\mathscr{E}$ افزایش پیدا نمی‌کند؟ به هر حال، قطب مثبت باتری به یک صفحهٔ خازن و قطب منفی باتری به صفحهٔ دیگر خازن متصل است.

۲۷. سیم بخاری برقی چه ویژگی خاصی باید داشته باشد؟

۲۸. به نظر می‌رسد معادلهٔ (۳۱ـ۲۱) که اگر مقاومت کاهش پیدا کند آهنگ افزایش انرژی داخلی در مقاومت کاسته می‌شود؛ در عین حال، به نظر می‌رسد معادلهٔ (۳۱ـ۲۲) درست برعکس این رفتار را نشان می‌دهد. چگونه می‌توانید بین این دو وضعیت سازش برقرار کنید؟

۲۹. چرا شرکتهای تولید انرژی الکتریکی در هنگام اوج تقاضا، ولتاژ را کاهش می‌دهند؟ در انجام این کار چه چیزی ذخیره می‌شود؟

۳۰. آیا مقاومت رشتهٔ لامپ ۵۰۰ واتی کمتر یا بیشتر از لامپ ۱۰۰ واتی است؟ هر دو لامپ طراحی شده‌اند که با ولتاژ ۱۲۰ ولت کار کنند.

۳۱. پنج تکه سیم با طولها و قطرهای مساوی به‌ترتیب یکی پس از دیگری بین دو نقطه که اختلاف پتانسیل ثابتی دارند قرار گرفته‌اند. آیا آهنگ افزایش انرژی داخلی در سیمی که مقاومت (الف) کمتری یا (ب) بیشتری دارد، سریع‌تر است؟

۳۲. چرا بهتر است، برای ارسال ۱۰ MW توان الکتریکی به فاصله‌های دوردست به‌جای ولتاژ ۲۲۰ V از اختلاف پتانسیل ۱۰ kV استفاده کنیم؟

تمرینها

۳۱ـ۱ جریان الکتریکی

۳۱ـ۲ نیروی محرکهٔ الکتریکی

۱. یک باتری انبارشی ۶٫۰۰ ولتی جریانی به شدت ۵٫۱۲ آمپر را به مدت ۵٫۷۵ دقیقه در یک مدار خارجی برقرار می‌کند. انرژی شیمیایی باتری چقدر کاهش می‌یابد؟

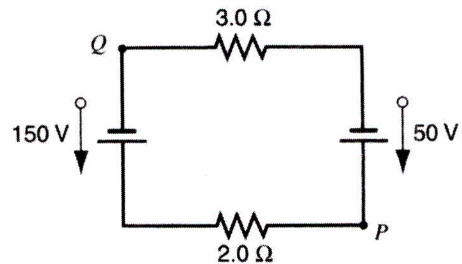
۲. (الف) چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی ۱۲٫۰ ولتی، روی الکترونی که در داخل آن از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی می‌رود چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) اگر در هر ثانیه 3.40×10^{18} الکترون از این چشمه عبور کند، توان خروجی این چشمه چقدر است؟

۳. باتری ۱۲ ولتی اتومبیل، از نوعی ویژه می‌تواند، مقدار بار ۱۲۵ A·h را، قبل از آنکه کاملاً خالی شود، "پمپ کند". فرض کنید که اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های این باتری همواره ثابت می‌ماند. این باتری برای چه مدت می‌تواند انرژی را با آهنگ ۱۱۰ W تأمین کند؟

۴. یک باتری استاندارد چراغ‌قوه می‌تواند قبل از تخلیهٔ کامل در حدود ۲٫۰ W·h انرژی تأمین کند. (الف) اگر قیمت هر باتری ۸۰۰۰ ریال باشد، هزینهٔ روشن کردن یک لامپ ۱۰۰ واتی برای مدت ۸٫۰ ساعت توسط این باتریها چقدر است؟ (ب) هزینهٔ انرژیی که سازمان برق منطقه‌ای، با نرخ ۱۱۰۰ ریال به‌ازای هر kW·h تأمین می‌کند چقدر است؟

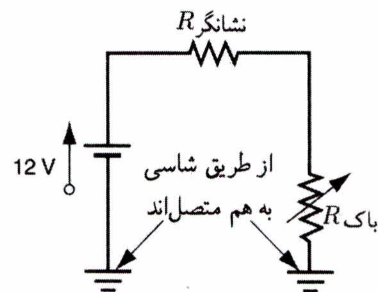
۳۱ـ۳ تحلیل مدارها

۵. در شکل ۳۱ـ۲۵ پتانسیل در نقطهٔ P برابر ۱۰۰ V است. پتانسیل در نقطهٔ Q چقدر است؟



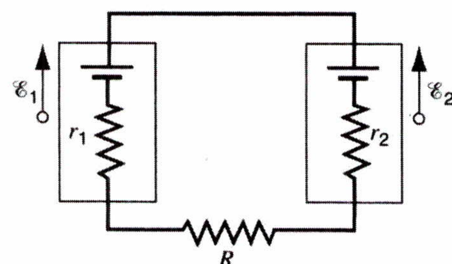
شکل ۳۱ـ۲۵ تمرین ۵.

۶. سنجهٔ اندازه‌گیری بنزین یک اتومبیل به‌صورت طرحواره در شکل ۳۱ـ۲۶ نشان داده شده است. مقاومت بخش نشانگر این مجموعه (روی داشبرد) $10\,\Omega$ است. بخش داخل باک فقط یک قطعهٔ شناور متصل به مقاومت است که مقاومت آن برای باک کاملاً خالی $140\,\Omega$ و برای باک پُر $20\,\Omega$ است و با حجم بنزین موجود در باک به‌صورت خطی تغییر می‌کند. وقتی باک (الف) خالی، (ب) نیمه‌پُر و (ج) پر است جریانی را که از مدار می‌گذرد به‌دست آورید.



شکل ۳۱ـ۲۶ تمرین ۶.

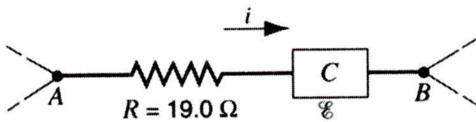
۷. (الف) اگر بخواهیم جریان در مدار شکل ۳۱ـ۲۷ برابر $50\ \text{mA}$ شود، مقدار مقاومت R مدار چقدر باید باشد؟ فرض کنید $\mathscr{E}_1 = 2{,}0\ \text{V}$، $\mathscr{E}_2 = 3{,}0\ \text{V}$ و $r_1 = r_2 = 3{,}0\,\Omega$ است. (ب) انرژی داخلی با چه آهنگی در مقاومت R ظاهر می‌شود؟



شکل ۳۱ـ۲۷ تمرین ۷.

۸. جریان در یک مدار تک‌حلقه‌ای ۵٫۰ آمپر است. وقتی یک مقاومت ۲٫۰ اهمی را به‌صورت سری در مدار قرار می‌دهیم جریان به ۴٫۰ آمپر فرو می‌افتد. مقاومت در مدار اولیه چقدر است؟

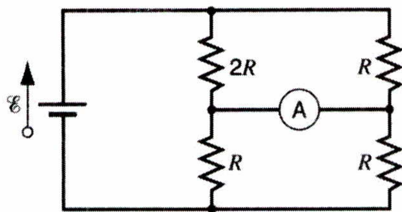
۹. وقتی جریان $i = 1{,}20\ \text{A}$ از بخش AB مدار (شکل ۳۱ـ۲۸) در جهت نشان داده‌شده می‌گذرد توان $53{,}0\ \text{W}$ را جذب می‌کند. (الف) اختلاف پتانسیل بین A و B را تعیین کنید. (ب) اگر جزء C این مدار مقاومت داخلی نداشته باشد، نیروی محرکهٔ الکتریکی آن چقدر است؟ (ج) کدام‌یک از دو پایانهٔ، راست یا چپ، مثبت است؟



شکل ۳۱ـ۲۸ تمرین ۹.

۱۰. می‌خواهیم با اتصال یک مقاومت $108\ \text{m}\Omega$ به باتریی که نیروی محرکهٔ الکتریکی آن $1{,}50\ \text{V}$ است انرژی داخلی با آهنگ $9{,}88\ \text{W}$ تولید کنیم. (الف) مقاومت داخلی باتری چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل موجود در دو سر مقاومت چقدر است؟

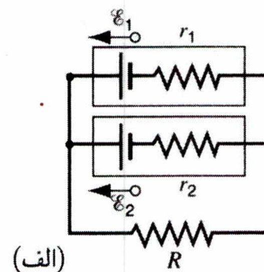
۱۱. آمپرسنج A در شکل ۳۱ـ۲۹ چه جریانی را برحسب $\mathscr{E}$ و R نشان می‌دهد؟ فرض کنید که مقاومت آمپرسنج A برابر صفر باشد.

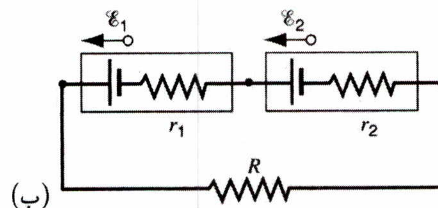


شکل ۳۱ـ۲۹ تمرین ۱۱.

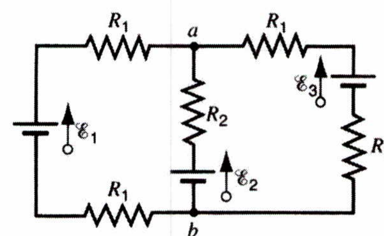
۱۲. دو باتری با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}_1$ و $\mathscr{E}_2$ و مقاومت داخلی r_1 و r_2 در اختیار دارید. این باتریها را می‌توانید به‌صورت (الف) موازی یا (ب) سری به‌هم ببندید و از آنها برای برقراری جریان در یک مقاومت R، مطابق شکل ۳۱ـ۳۰، استفاده کنید. عبارتی را برای جریان برقرارشده در R در هر مورد به‌دست آورید.

۱۳. (الف) جریانی را که از هریک از چشمه‌های نیروی محرکهٔ الکتریکی در شکل ۳۱ـ۳۱ می‌گذرد محاسبه کنید. (ب) اختلاف پتانسیل $V_b - V_a$ را محاسبه کنید. فرض کنید $R_1 = 1{,}20\,\Omega$، $R_2 = 2{,}30\,\Omega$، $\mathscr{E}_1 = 2{,}00\ \text{V}$، $\mathscr{E}_2 = 3{,}80\ \text{V}$، و $\mathscr{E}_3 = 5{,}00\ \text{V}$ است.





شکل ۳۱ـ۳۰ تمرین ۱۲.



شکل ۳۱ـ۳۱ تمرین ۱۳.

۱۴. (الف) نشان دهید که در مدار شکل ۳۱ـ۸ توان تحویل‌شده به مقاومت R به‌صورت انرژی داخلی وقتی بیشینه می‌شود که R برابر مقاومت داخلی باتری، یعنی r، باشد. (ب) نشان دهید که این بیشینهٔ توان برابر $P = \mathscr{E}^۲/۴r$ است.

۱۵. باتری با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ = ۲٫۰ V و مقاومت داخلی r = ۰٫۵۰ Ω یک موتور الکتریکی را به حرکت درمی‌آورد. این موتور جسمی به وزن ۲٫۰ N را با سرعت ثابت v = ۰٫۵۰ m/s بالا می‌برد. با فرض اینکه هیچ اتلاف توان نداشته باشیم، تعیین کنید (الف) جریان i را در مدار و (ب) اختلاف پتانسیل ΔV را بین دو پایانهٔ موتور. (ج) دربارهٔ اینکه برای این مسئله دو جواب وجود دارد بحث کنید.

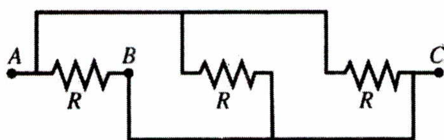
۳۱ـ۴ میدانهای الکتریکی در مدارها

۳۱ـ۵ اتصال سری و موازی مقاومتها

۱۶. چهار مقاومت ۱۸Ω را به‌صورت موازی به دو سر یک باتری ۲۷ ولتی بسته‌ایم. جریانی که از باتری می‌گذرد چقدر است؟

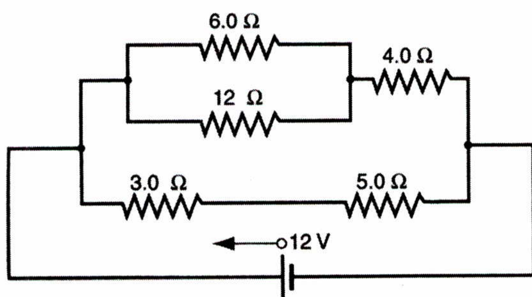
۱۷. با استفاده از فقط دو مقاومت ــ به‌تنهایی، به‌صورت سری، یا به‌صورت موازی ــ می‌توانید مقاومتهای ۳٫۰، ۴٫۰، ۱۲، و ۱۶ اهمی داشته باشید. مقاومت هر یک از این دو مقاومت چقدر است؟

۱۸. در شکل ۳۱ـ۳۲، مقاومت معادل بین نقاط (الف) A و B، (ب) A و C، و (ج) B و C را به‌دست آورید.



شکل ۳۱ـ۳۲ تمرین ۱۸.

۱۹. مداری مانند مدار شکل ۳۱ـ۳۳، شامل پنج مقاومت است که به یک باتری ۱۲ ولتی متصل شده‌اند. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵٫۰ اهمی را به‌دست آورید.



شکل ۳۱ـ۳۳ تمرین ۱۹.

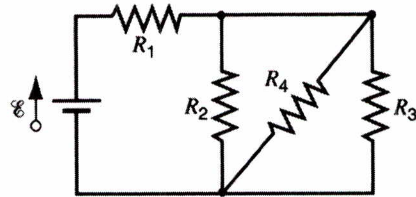
۲۰. یک خط انتقال نیروی ۱۲۰ ولتی با یک فیوز ۱۵ آمپری محافظت می‌شود. چه تعداد لامپ ۵۰۰ واتی را می‌توان همزمان موازی با این خط انتقال روشن کرد؟

۲۱. دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ را می‌توان به‌صورت سری یا موازی به دو سر یک باتری (بدون مقاومت داخلی) با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ متصل کرد. می‌خواهیم آهنگ تبدیل انرژی داخلی برای مجموعهٔ موازی پنج برابر مقدار مربوط به مجموعهٔ سری باشد. اگر مقاومت $R_۱$ = ۱۰۰Ω باشد، مقاومت $R_۲$ چقدر است؟

۲۲. تعدادی مقاومت ۱۰ اهمی در اختیار دارید، که هر کدام از آنها می‌تواند ۱٫۰ W انرژی را تلف کند. حداقل چه تعداد از این مقاومتها را باید به‌صورت سری یا موازی به‌هم متصل کرد تا یک مقاومت ۱۰ اهمی به‌دست آورد که توان از دست دادن حداقل ۵٫۰ W انرژی را داشته باشد؟

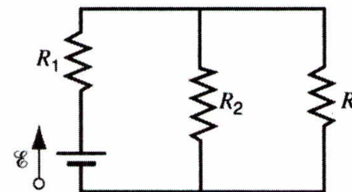
۲۳. (الف) مقاومت معادل شبکهٔ شکل ۳۱ـ۳۴ را تعیین کنید. (ب) جریان را در هر یک از مقاومتها محاسبه کنید. فرض کنید

$R_1 = ۱۱۲\Omega$، $R_2 = ۴۲٫۰\Omega$، $R_3 = ۶۱٫۶\Omega$، $R_4 = ۷۵٫۰\Omega$، و $\mathscr{E} = ۶٫۲۲\,V$.



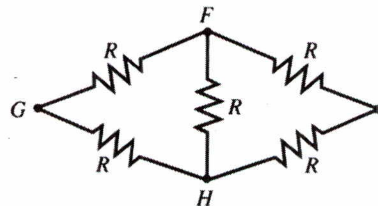
شکل ۳۱ـ۳۴ تمرین ۲۳.

۲۴. در مدار شکل ۳۱ـ۳۵، $\mathscr{E}$، R_1، و R_2 مقادیر ثابتی دارند ولی مقدار مقاومت R می‌تواند تغییر کند. R را چنان تعیین کنید که بیشترین گرما در آن مقاومت تولید شود.



شکل ۳۱ـ۳۵ تمرین ۲۴.

۲۵. در شکل ۳۱ـ۳۶ مقاومت معادل بین نقاط (الف) F و H و (ب) F و G را تعیین کنید.

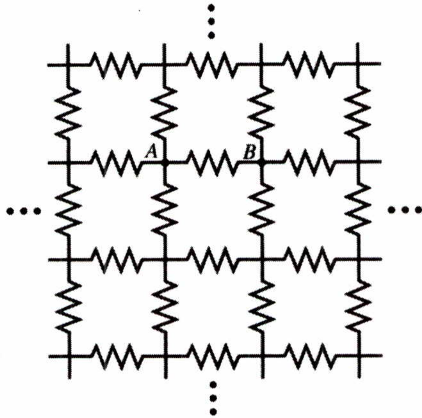


شکل ۳۱ـ۳۶ تمرین ۲۵.

۲۶. یک تقسیم‌کنندهٔ ولتاژ از دو مقاومت تشکیل شده که به‌صورت سری به هم بسته شده‌اند. اختلاف پتانسیل اعمال‌شده به دو سر مقاومتها ۱۲ V است، و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت دوم ۲٫۴ V است. با فرض اینکه جریانی که از این سیمها می‌گذرد برابر با ۱ mA باشد، مقاومتها را معین کنید.

۲۷. یک تقسیم‌کنندهٔ ولتاژ طراحی کنید که برای آن ولتاژ ورودی ۱٫۵۰ V و ولتاژ خروجی تقریباً $۰٫۹۵ \pm ۰٫۰۱$ V باشد. برای این منظور از مقدارهای مقاومت استاندارد استفاده کنید.

۲۸. قسمتی از یک آرایهٔ بینهایت از مقاومتهای یکسان برابر با $۱\mu\Omega$ را در شکل ۳۱ـ۳۷ نشان داده‌ایم. یک باتری به دو گره به فاصلهٔ دور از هم وصل شده است. نشان دهید که پتانسیل در هر گره برابر است با میانگین پتانسیل در نزدیکترین چهار گره آن. از این نتیجه برای حل مسئلهٔ کامپیوتری ۱ استفاده کنید.



شکل ۳۱ـ۳۷ تمرین ۲۸ و مسئلهٔ کامپیوتری ۱.

۳۱ـ۶ انتقال انرژی در مدار الکتریکی

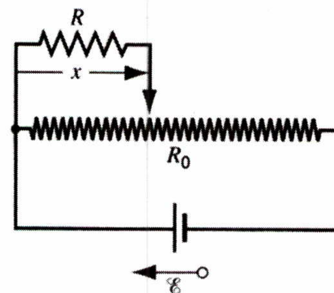
۲۹. دانشجویی رادیوی ۹٫۰ V، ۷٫۵ W خود را از ساعت ۹:۰۰ شب تا ۳:۰۰ بامداد روشن گذاشته بود. چه مقدار بار از سیمهای آن عبور کرده است؟

۳۰. چراغهای جلوی اتومبیل در حال حرکت از مولد (آلترناتور) ۱۲ V، که توسط موتور به حرکت درآمده جریان ۹٫۷ A را می‌کشد. فرض کنید بازده مولد ۸۲٪ باشد، در آن صورت حساب کنید که موتور برای روشن نگه‌داشتن لامپها چند اسب بخار باید تأمین کند.

۳۱. مقاومت داغ یک بخاری برقی که از برق شبکه (۲۳۰ V) استفاده می‌کند برابر ۵۱٫۴Ω است. (الف) انرژی الکتریکی با چه آهنگی به انرژی داخلی تبدیل می‌شود؟ (ب) اگر نرخ انرژی الکتریکی ۲۲۰ ریال به‌ازای هر کیلووات ساعت باشد، هزینهٔ این بخاری در ۶ ساعت و ۲۵ دقیقه چقدر است؟

۳۲. در شکل ۳۱ـ۳۸ باتریی را نشان داده‌ایم که به دو سر مقاومت یکنواخت R_0 متصل شده است. یک نقطهٔ تماس لغزنده می‌تواند از $x = ۰$ در طرف چپ تا $x = ۱۰$ cm در طرف راست در امتداد مقاومت R_0 جابه‌جا شود. رابطه‌ای برای انرژی تلف‌شده در مقاومت R برحسب x به‌دست آورید. این تابع را برای $\mathscr{E} = ۵۰\,V$، $R = ۲۰۰۰\Omega$ و $R_0 = ۱۰۰\Omega$ رسم کنید.

۳۳. دو لامپ روشنایی، یکی با مقاومت R_1 و دیگری با مقاومت $R_2 (< R_1)$، (الف) به‌طور موازی و (ب) به‌طور سری به‌هم بسته شده‌اند. در هر مورد کدام لامپ درخشان‌تر است؟



شکل ۳۱ـ۳۸ تمرین ۳۲.

۳۴. مؤسسهٔ ملی استاندارد و تحقیقات صنعتی بیشینهٔ جریان ایمن را برای سیمهای با اندازه‌ها و انواع گوناگون مشخص کرده است. برای سیم مسی با پوشش عایقی لاستیکی نمرهٔ ۱۰ (با قطر ۲٫۵۴ میلی‌متر) بیشینهٔ جریان ایمن ۲۵ آمپر است. برای این جریان، پیدا کنید (الف) چگالی جریان، (ب) میدان الکتریکی، (ج) اختلاف پتانسیل در طول ۳۰۰ m از این سیم، و (د) آهنگ ایجاد انرژی داخلی در طول ۳۰۰ m از این سیم.

۳۵. یک لامپ روشنایی ۱۰۰ W به شبکهٔ استاندارد، ۲۳۰ V، متصل شده است. (الف) هزینهٔ روشن‌ماندن این لامپ برای یک ماه (۳۱ روز) چقدر است؟ فرض کنید که نرخ انرژی الکتریکی ۲۲۰ ریال به‌ازای هر کیلووات ساعت است. (ب) مقاومت این لامپ چقدر است؟ جریان برقرارشده در لامپ چقدر است؟ (د) آیا وقتی لامپ خاموش است مقدار مقاومت فرق می‌کند؟

۳۶. یک بخاری با سیم نیکروم وقتی اختلاف پتانسیل ۱۱۰ V به آن اعمال شود و دمای رشته سیم آن ۸۰۰°C باشد، ۵۰۰ وات انرژی گرمایی ایجاد می‌کند. اگر این سیم را داخل حوضچهٔ روغن قرار دهیم (به منظور خنک نگه‌داشتن آن)، در دمای ۲۰۰°C چقدر توان از دست می‌دهد؟ اختلاف پتانسیل را ثابت نگه می‌داریم؛ α برای سیم نیکروم در دمای ۸۰۰°C برابر $۴٫۰ \times ۱۰^{-۴}/C°$ است.

۳۷. یک شتابدهندهٔ خطی الکترون، باریکهٔ تپی از الکترونها ایجاد می‌کند. جریان تپ ۴۸۵ mA است و به مدت ۹۵٫۰ ns ادامه می‌یابد. (الف) به‌ازای هر پالس چند الکترون شتاب داده می‌شود؟ (ب) متوسط جریان را برای ماشینی که ۵۲۰ تپ در ثانیه ایجاد می‌کند پیدا کنید. (ج) اگر الکترونها تا انرژی ۴۷٫۷ MeV شتاب داده شوند، مقدار میانگین و قلهٔ توان خروجی شتابدهنده چقدر است؟

۳۸. یک مقاومت استوانه‌ای به شعاع ۵٫۱۲ mm و طول ۱٫۹۶ cm از ماده‌ای ساخته شده که مقاومت ویژهٔ آن $۳٫۵۰ \times ۱۰^{-۵}\Omega \cdot m$ است. (الف) چگالی جریان و (ب) اختلاف پتانسیل بین دو سر این مقاومت وقتی که با توان ۱٫۵۵ W انرژی مبادله می‌کند چقدر است؟

۳۹. جزء گرم‌کن بخاری را به این ترتیب ساخته‌ایم که اختلاف پتانسیل ۷۵ ولت را بین دو سر یک سیم نیکروم، که سطح مقطع آن $۲٫۶\ mm^۲$ و مقاومت ویژهٔ آن $۵٫۰ \times ۱۰^{-۷}\Omega \cdot m$ است، ثابت نگه داشته‌ایم. (الف) وقتی این جزء با آهنگ ۴٫۸ kW انرژی از دست می‌دهد طول آن چقدر است؟ (ب) اگر از اختلاف پتانسیل ۱۱۰ V برای رسیدن به همان میزان توان خروجی استفاده کنیم، طول سیم باید چقدر باشد؟

۴۰. یک جزء گرم‌کن غوطه‌ور، ۴۲۰ W، را در داخل یک ظرف حاوی ۲٫۱۰ لیتر آب ۱۸٫۵°C قرار داده‌ایم. (الف) با فرض اینکه ۷۷٫۰٪ از انرژی مصرف‌شده توسط آب جذب شود، چه مدت زمان لازم است تا آب به جوش بیاید؟ (ب) پس از این زمان چه مدت وقت لازم است تا با جوشاندن آب، مقدار آن را به نصف برسانیم؟

۳۱ـ۷ مدارهای RC

۴۱. (الف) گامهای از قلم‌افتاده برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۳۱ـ۲۷) از معادلهٔ (۳۱ـ۲۶) را انجام دهید. (ب) همین کار را در مورد به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۳۱ـ۳۲) از معادلهٔ (۳۱ـ۳۱) انجام دهید. توجه داشته باشید که در $t = ۰$ داریم $q = q_۰$ (خازن باردار شده است).

۴۲. در یک مدار سری RC داریم $\mathscr{E} = ۱۱٫۰\ V$، $R = ۱٫۴۲\ M\Omega$، و $C = ۱٫۸۰\mu F$. (الف) ثابت زمانی این مدار را محاسبه کنید. (ب) بیشترین باری را که هنگام پُرشدن روی خازن قرار می‌گیرد تعیین کنید. (ج) چقدر طول می‌کشد تا بار روی خازن برابر ۱۵٫۵μC شود؟

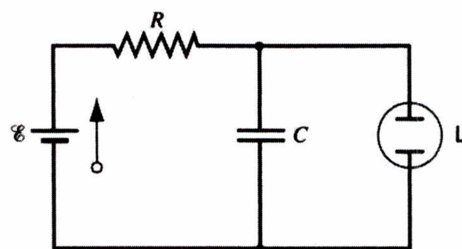
۴۳. در مدار RC چند ثابت زمانی باید سپری شود تا بار روی صفحه‌های خازن به ۹۹٪ بیشینهٔ مقدارش برسد؟

۴۴. یک مقاومت ۱۵٫۲ kΩ و یک خازن را به‌صورت سری به‌هم متصل کرده‌ایم و ناگهان اختلاف پتانسیل ۱۳٫۰ V به آنها اعمال می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر خازن در مدت ۱٫۲۸μs به ۵٫۰۰ V افزایش می‌یابد. (الف) ثابت زمانی این مدار را محاسبه کنید. (ب) ظرفیت خازن را تعیین کنید.

۴۵. با بستن کلیدی در لحظهٔ $t = ۰$ یک مدار RC تخلیه می‌شود. اختلاف پتانسیل اولیهٔ دو سر خازن ۱۰۰ V است. (الف) اگر این اختلاف پتانسیل در مدت ۱۰٫۰ ثانیه به ۱٫۰۶ V کاهش یابد، ثابت زمانی مدار را محاسبه کنید. (ب) در لحظهٔ $t = ۱۷\ s$ اختلاف پتانسیل چقدر است؟

۴۶. کلید کنترل یک بازی الکترونیکی شامل یک مقاومت متغیر است که به دو سر خازنی با ظرفیت ۲۲۰ nF متصل شده است. خازن تا ۵٫۰۰ ولت پُر و سپس از طریق مقاومت تخلیه می‌شود. زمان لازم برای کاهش اختلاف پتانسیل بین دو صفحه به ۸۰۰ mV را یک ساعت داخلی اندازه می‌گیرد. اگر گسترهٔ زمانهای تخلیه را بتوان بین μs ۱۰٫۰ تا ms ۶٫۰۰ اختیار کرد، محدودهٔ تغییرات مقاومت چقدر است؟

۴۷. شکل ۳۱ـ۳۹ مدار مربوط به چراغ چشمک‌زن را، مانند آنچه روی بشکه‌های کارگاههای عملیات ساختمانی بزرگراهها نصب می‌شود، نشان می‌دهد. لامپ فلورسنت را به‌صورت موازی با خازن C در مدار RC متصل شده است. جریان فقط زمانی از لامپ می‌گذرد که پتانسیل دو سر لامپ به ولتاژ شکست V_L برسد؛ در این حالت خازن از طریق لامپ تخلیه می‌شود و لامپ برای مدت زمان بسیار کوتاهی چشمک می‌زند. فرض کنید که بخواهیم لامپ در هر ثانیه دوبار چشمک بزند. با بهره‌گیری از یک لامپ با ولتاژ شکست $V_L = ۷۲$ V، یک باتری ۹۵۰ V و یک خازن با ظرفیت μF ۰٫۱۵، چه مقاومت Rی برای این کار مورد نیاز است؟



شکل ۳۱ـ۳۹ تمرین ۴۷.

۴۸. یک خازن با ظرفیت μF ۱٫۰ و انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیهٔ J ۰٫۵۰ در یک مقاومت MΩ ۱٫۰ تخلیه می‌شود. (الف) بار اولیهٔ موجود روی خازن چقدر است؟ (ب) در شروع تخلیه جریانی که در مقاومت جاری می‌شود چقدر است؟ (ج) ولتاژ ΔV_C، دو سر خازن و ولتاژ ΔV_R، مربوط به دو سر مقاومت را برحسب زمان تعیین کنید. (د) آهنگ تولید انرژی داخلی در مقاومت را برحسب زمان بیان کنید.

۴۹. یک مقاومت، MΩ ۳٫۰، و یک خازن، μF ۱٫۰، در یک مدار تک‌حلقه‌ای به یک چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی، $\mathscr{E} = ۴٫۰$ V، متصل شده‌اند. یک ثانیه پس از برقراری اتصال آهنگ تغییر کمیتهای زیر چگونه است؟ (الف) افزایش بار روی خازن. (ب) انرژی ذخیره‌شده در خازن، (ج) انرژی داخلی ظاهرشده در مقاومت و (د) انرژیی که جایگاه نیروی محرکهٔ الکتریکی تأمین می‌کند.

۵۰. ثابت کنید که وقتی کلید S در شکل ۳۱ـ۲۰ از موقعیت a به موقعیت b تغییر می‌کند، تمام انرژی ذخیره‌شده در خازن به انرژی داخلی مقاومت تبدیل می‌شود. فرض کنید، قبل از بسته شدن کلید، خازن به‌طور کامل پُر شده باشد.

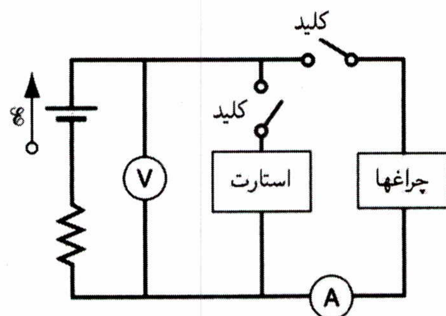
مسئله‌ها

۱. استارت یک اتومبیل کُند می‌چرخد و مکانیک باید تصمیم بگیرد که استارت، سیم اتصال، یا باتری را تعویض کند. در کتابچهٔ راهنمای شرکت سازندهٔ اتومبیل آمده است که مقاومت داخلی باتری ۱۲ ولتی نمی‌تواند بیش از Ω ۰٫۰۲۰ باشد و مقاومت داخلی استارت هم نباید بیش از Ω ۰٫۲۰۰ و مقاومت سیم اتصال هم نباید بیش از Ω ۰٫۰۴۰ باشد. مکانیک استارت می‌زند و اختلاف پتانسیل دو سر باتری را V ۱۱٫۴، دو سر سیم اتصال را V ۳٫۰، و جریان را A ۵۰ اندازه می‌گیرد. کدام قطعه خراب است؟

۲. دو باتری با نیروی محرکهٔ الکتریکی یکسان $\mathscr{E}$ ولی با مقاومت داخلیهای متناوب r_1 و r_2 $(r_1 > r_2)$ به‌طور سری به مقاومت خارجی R بسته شده‌اند. (الف) R را چنان معین کنید که اختلاف پتانسیل بین دو قطب یکی از باتریها صفر شود. (ب) این موضوع برای کدام باتری پیش می‌آید؟

۳. وقتی مقاومت Ω ۵۰۰ به دو سر یک باتری خورشیدی وصل شود اختلاف پتانسیل V ۰٫۱۰ و وقتی مقاومت Ω ۱۰۰۰ به دو سر آن متصل شود اختلاف پتانسیل V ۰٫۱۶ را تولید می‌کند. (الف) مقاومت داخلی و (ب) نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری خورشیدی چقدر است؟ (ج) مساحت باتری خورشیدی cm^2 ۵٫۰ است و نور با شدت mW/cm^2 ۲٫۰ بر سطح آن می‌تابد. کارایی باتری خورشیدی در تبدیل انرژی نوری به انرژی داخلی در مقاومت خارجی Ω ۱۰۰۰ چقدر است؟

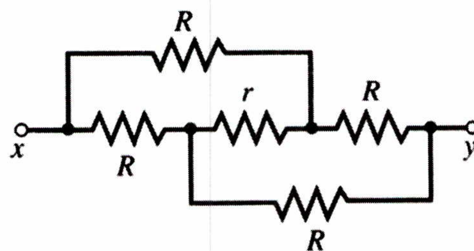
۴. وقتی چراغهای یک اتومبیل را روشن می‌کنیم، آمپرسنجی که با آنها به‌صورت سری قرارگرفته است جریان A ۱۰٫۰ و ولت‌سنجی که به دو سر آنها متصل کرده‌ایم اختلاف پتانسیل V ۱۲٫۰ را نشان می‌دهد (شکل ۳۱ـ۴۰ را ببینید). وقتی استارت می‌زنیم جریانی که آمپرسنج نشان می‌دهد به A ۸٫۰۰ فرو می‌افتد و چراغها تا حدودی کم‌فروغ‌تر می‌شوند. اگر مقاومت داخلی باتری mΩ ۵۰٫۰ و مقاومت داخلی آمپرسنج چشم‌پوشیدنی باشد، (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری و (ب) جریانی که به هنگام روشن بودن چراغها از استارت می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۳۱ـ۴۰ مسئلهٔ ۴.

۵. ریلهای رسانای A و B با طول مساوی m ۴۲٫۶ و سطح مقطع مساوی cm^2 ۹۱٫۰ را به‌صورت سری به‌هم بسته‌ایم. اختلاف پتانسیل V ۶۳۰ به دو سر آزاد ریلها اعمال شده است. مقاومت ریلها به‌ترتیب عبارت است از $\mu\Omega$۲٫۷۶ و $\mu\Omega$۳۵٫۰. کمیتهای (الف) مقاومت ویژهٔ هر یک از ریلها، (ب) چگالی جریان در هر یک از دو ریل، (ج) شدت میدان الکتریکی در هر ریل، و (د) اختلاف پتانسیل دو سر هریک از ریلها را معین کنید.

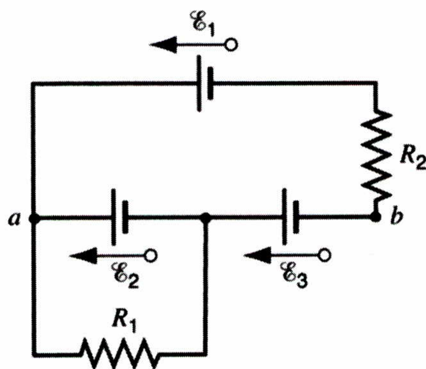
۶. مقاومت معادل بین نقاط x و y در شکل ۳۱ـ۴۱ را تعیین کنید. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است چهار مقاومت دارای مقدار مساوی R هستند؛ مقدار مقاومت "میانی" $r \neq R$ است. (این مسئله را با مسئلهٔ ۱۰ فصل ۳۰ مقایسه کنید.)



شکل ۳۱ـ۴۱ مسئلهٔ ۶.

۷. دوازده مقاومت، هرکدام به مقاومت R، یک مکعب تشکیل می‌دهند (شکل ۳۱ـ۱۸(الف) را ببینید). (الف) مقاومت R_{13}، مقاومت معادل بین دو سر قطر یک وجه را پیدا کنید. (ب) مقاومت R_{17}، مقاومت معادل بین دو سر قطر مکعب را معین کنید. مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱ـ۶ را ببینید.

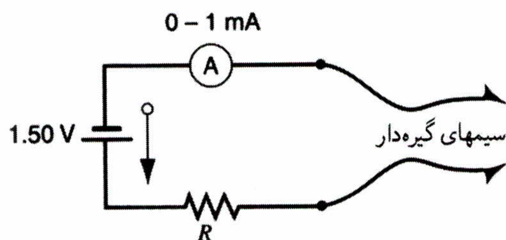
۸. در شکل ۳۱ـ۴۲ مقدارهای زیر را مشخص کنید: (الف) جریان در هر یک از مقاومتها و (ب) اختلاف پتانسیل بین a و b. فرض کنید، $\mathscr{E}_1 = ۶٫۰\ \text{V}$، $\mathscr{E}_2 = ۵٫۰\ \text{V}$، $\mathscr{E}_3 = ۴٫۰\ \text{V}$، $R_1 = ۱۰۰\Omega$، و $R_2 = ۵۰\Omega$ است.



شکل ۳۱ـ۴۲ مسئلهٔ ۸.

۹. یکی از رشته‌های یک لامپ سه‌حالتی ۱۲۰ ولتی که می‌توان آن را با توانهای اسمی ۱۰۰ـ ۲۰۰ـ ۳۰۰ وات روشن کرد، می‌سوزد. پس از آن، این لامپ وقتی کلید در پایین‌ترین حالت است همان شدت را دارد که در بالاترین حالت، ولی در حالت وسط اصلاً روشن نمی‌شود. (الف) دو رشته در داخل لامپ چگونه به‌هم متصل شده‌اند؟ (ب) مقاومت رشته‌ها را محاسبه کنید.

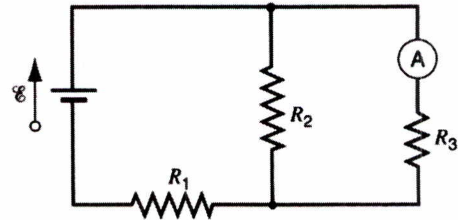
۱۰. یک اهم‌سنج ساده با اتصال یک باتری چراغ قوهٔ ۱٫۵۰ ولتی به‌صورت سری با یک مقاومت R و یک آمپرسنج mA ۱٫۰۰ مطابق شکل ۳۱ـ۴۳ ساخته می‌شود. مقاومت R چنان تنظیم می‌شود که وقتی دو سر مدار را به هم ببندیم آمپرسنج به‌طورکامل منحرف می‌شود و mA ۱٫۰۰ را نشان می‌دهد. چه مقاومت خارجی بین دو سر آزاد مدار سبب انحراف (الف) ۱۰٪، (ب) ۵۰٪، و (ج) ۹۰٪ مقیاس کامل می‌شود؟ (د) اگر مقاومت آمپرسنج Ω۱۸٫۵ و مقاومت داخلی باتری ناچیز باشد، مقدار مقاومت R چقدر است؟



شکل ۳۱ـ۴۳ مسئلهٔ ۱۰.

۱۱. در شکل ۳۱ـ۴۴، فرض کنید آمپرسنجی را در شاخه‌ای قرار دهیم که شامل مقاومت R_3 است. (الف) با فرض اینکه $\mathscr{E} = ۵٫۰\ \text{V}$، $R_1 = ۲٫۰\Omega$، $R_2 = ۴٫۰\Omega$، و $R_3 = ۶٫۰\Omega$، این آمپرسنج چه جریانی را نشان خواهد داد؟ (ب) جای آمپرسنج و چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی را عوض می‌کنیم. نشان دهید آنچه آمپرسنج نشان می‌دهد

تغییر نمی‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم که مقاومت داخلی آمپرسنج صفر است.

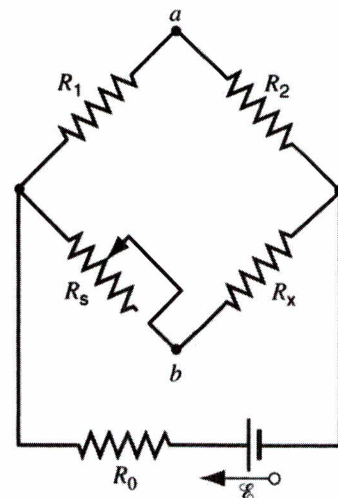


شکل ۳۱ـ۴۴ مسئلهٔ ۱۱.

۱۲. در شکل ۳۱ـ۴۵ مقاومت R_s باید طوری تنظیم شود که پتانسیل نقطه‌های a و b دقیقاً برابر هم باشد. (این موضوع را می‌توان با قراردادن یک آمپرسنج حساس بین a و b در یک لحظه آزمود؛ اگر پتانسیل این نقطه‌ها برابر باشد، آمپرسنج منحرف نخواهد شد.) نشان دهید که پس از این تنظیم، رابطهٔ زیر بین مقاومتها برقرار است:

$$R_x = R_s(R_۲/R_۱)$$

با به‌کارگرفتن این وسیله، که به آن پل وتستون می‌گویند می‌توان مقاومت مجهول (R_x) را برحسب یک مقاومت استاندارد (R_s) به‌دست آورد.



شکل ۳۱ـ۴۵ مسئله‌های ۱۲ و ۱۳.

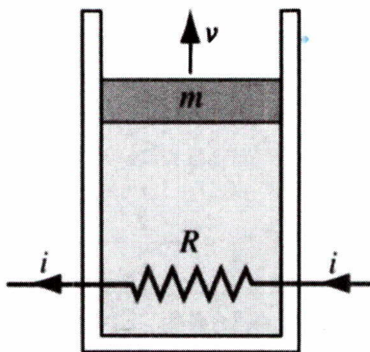
۱۳. اگر نقطه‌های a و b در شکل ۳۱ـ۴۵، را به‌وسیلهٔ یک سیم با مقاومت r به‌هم متصل کنیم، نشان دهید که جریان در این سیم برابر است با

$$i = \frac{\mathscr{E}(R_s - R_x)}{(R + ۲r)(R_s + R_x) + ۲R_sR_x}$$

که در اینجا $\mathscr{E}$ نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری است. در اینجا چنین فرض کرده‌ایم که $R_۱$ و $R_۲$ با هم برابر باشند ($R_۱ = R_۲ = R$) و $R_۰$ برابر با صفر است. آیا این فرمول با نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲ سازگار است؟

۱۴. یک پیچهٔ حامل جریان از جنس نیکروم در مایع داخل یک کالری‌متر فرو برده شده است. وقتی که اختلاف پتانسیل بین دو سر پیچه برابر با ۱۲ V است و جریان ۵٫۲ A در پیچه جاری است، مایع با آهنگ ثابتی می‌جوشد و با آهنگ ۲۱ mg/s تبخیر می‌شود. گرمای تبخیر مایع را محاسبه کنید.

۱۵. یک پیچهٔ مقاومتی را، که به باتری خارجی متصل است، در داخل یک استوانهٔ بی‌درروی حاوی گاز کامل قرار می‌دهیم، که در آن یک پیستون بدون اصطکاک پایین و بالا می‌رود. جریان $i =$ ۲۴۰ mA در پیچه که دارای مقاومت $R =$ ۵۵۰ Ω است، جاری می‌شود. این پیستون، با جرم $m =$ ۱۱٫۸ kg، باید با چه سرعت v به سمت بالا حرکت کند، تا دمای گاز ثابت بماند؟ شکل ۳۱ـ۴۶ را ببینید.



شکل ۳۱ـ۴۶ مسئلهٔ ۱۵.

۱۶. خازنی با ظرفیت ۳۲μF را به منبع تغذیهٔ برنامه‌ریزی‌شده‌ای متصل کرده‌ایم. در خلال بازهٔ زمانی از $t =$ ۰ تا $t =$ ۳ ثانیه، ولتاژ خروجی منبع تغذیه با عبارت

$$V(t) = (۶\,\mathrm{V}) + (۴\,\mathrm{V/s})t - (۲\,\mathrm{V/s^۲})t^۲$$

تغییر می‌کند. در زمان $t =$ ۰٫۵۰ s (الف) بار روی خازن، (ب) جریان جاری در خازن، و (ج) خروجی منبع تغذیه را معین کنید.

۱۷. اختلاف پتانسیل ΔV را به دو سر سیمی با سطح مقطع A، طول L، و رسانندگی σ اعمال می‌کنیم. می‌خواهید اختلاف پتانسیل اعمال‌شده را تغییر داده، سیم را تحت عمل کشش قرار دهید به‌طوری که توان تلف‌شده با ضریب ۳۰ و جریان با ضریب ۴ افزوده شود. مقدارهای جدید (الف) طول و (ب) سطح مقطع سیم چقدر خواهد شد؟

۱۸. خازنی که در ابتدا خالی و دارای ظرفیت C است توسط نیروی

محرکهٔ الکتریکی ثابت $\mathscr{E}$ که به‌صورت سری با مقاومت R بسته شده است به طور کامل پُر می‌شود. (الف) نشان دهید که انرژی ذخیره‌شدهٔ نهایی در خازن نصف انرژیی است که نیروی محرکهٔ الکتریکی تأمین می‌کند. (ب) با انتگرال‌گیری مستقیم از کمیت i^2R در مدتی که خازن پُر می‌شود، نشان دهید که انرژی داخلی که در مقاومت تلف می‌شود نیز نصف انرژیی است که نیروی محرکهٔ الکتریکی تأمین می‌کند.

۱۹. در چه زمانی پس از آغاز فرایند پُرشدن خازن در مسئلهٔ ۱۸ آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت برابر با آهنگ ذخیرهٔ انرژی در خازن است؟

مسئله‌های کامپیوتری

۱. از نتیجه‌های تمرین ۲۸ استفاده کنید تا مقاومت معادل بین هر دو نقطه‌ای از آرایهٔ بینهایت مقاومتها در شکل ۳۱ـ۳۷ را که به‌وسیلهٔ تک‌مقاومتی از هم جدا شده‌اند (مانند نقاط A و B) معین کنید. این مسئله به ساده‌ترین صورت با تکرار عملیات انجام می‌شود، و می‌توان برای آن برنامه‌ای نوشت و آن را در کمتر از یک دقیقه روی یک برگ گسترده حل کرد.

۲. مسئلهٔ کامپیوتری ۱ را تکرار کنید و آن را به‌جای ورق بینهایت برای چنبره حل کنید. این مسئله را با این فرض شروع کنید که چنبره از یک شبکهٔ ۱۰ × ۱۰ مقاومتی ساخته شده است. اگر اندازهٔ شبکهٔ اولیه دوبرابر شود جواب چقدر تغییر خواهد کرد؟ به‌منظور دریافت راهنمایی برای حل این مسئله به مسئلهٔ کامپیوتری ۲ در فصل ۳۰ مراجعه کنید.

۳۲

میدان مغناطیسی

مبدأ علم مغناطیس در دوران باستان است. این علم با مشاهدهٔ اینکه بعضی سنگهای طبیعی علاوه بر جذب یکدیگر قطعات کوچک فلز آهن را نیز جذب می‌کنند، ولی فلزات دیگر مانند طلا و نقره را جذب نمی‌کنند، شکل گرفت. واژهٔ" مغناطیس" از نام ناحیه‌ای (مگنسیا) در آسیای صغیر گرفته شده است، این ناحیه یکی از مکانهایی است که این نوع سنگها در عصر باستان در آنجا یافت شده‌اند.

امروزه این کشف کاربردهای عملی بسیار زیادی دارد، که از آهنرباهای کوچک "یخچال" تا نوارهای ضبط مغناطیسی و دیسکهای کامپیوتری را دربر می‌گیرد. پزشکان از خاصیت مغناطیسی هسته‌های تک‌تک اتمها برای تصویربرداری از اندامهایی که در اعماق بدن قرار گرفته‌اند استفاده می‌کنند. سفینه‌های فضایی شدت میدان مغناطیسی زمین و سایر سیاره‌ها را اندازه‌گیری کرده‌اند تا اطلاعاتی دربارهٔ ساختار داخلی آنها به‌دست آورند.

در این فصل مطالعه دربارهٔ مغناطیس را با بررسی میدان مغناطیسی و تأثیر آن بر ذرهٔ باردار الکتریکی متحرک آغاز می‌کنیم. در فصل بعد، به تولید میدانهای مغناطیسی به‌وسیلهٔ جریانهای الکتریکی می‌پردازیم. در فصلهای بعدتر، به کاوش دربارهٔ ارتباط نزدیک بین الکتریسیته و مغناطیس می‌پردازیم که با نام مشترک الکترومغناطیس به یکدیگر وابسته شده‌اند.

۳۲ـ۱ برهم‌کنشهای مغناطیسی و قطبهای مغناطیسی

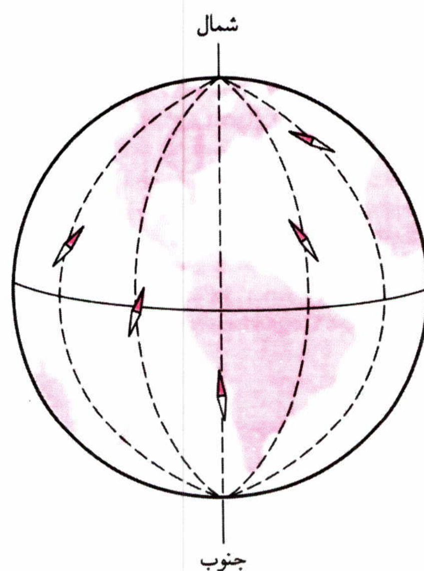
در فصل ۲۵ بررسی الکتروستاتیک را با توصیف مشاهداتی آغاز کردیم ــ ربایش بین یک میلهٔ پلاستیکی مالش داده‌شده توسط یک تکه پوست و یک میلهٔ شیشه‌ای مالش داده‌شده توسط یک تکه ابریشم ــ که تا آن زمان برمبنای نیروها و برهم‌کنشهای مورد مطالعه توضیح آن امکان نداشت. آن ربایش را چنین توجیه کردیم که بارهای الکتریکی موجود روی یک میله بر بارهای الکتریکی موجود روی میلهٔ دیگر نیرویی وارد می‌کنند. در فصلهای بعد از آن دریافتیم که پدیده‌های جالب و مفید بی‌شماری را می‌توانیم برحسب این نیروی الکتروستاتیک بنیادی تعبیر کنیم.

در این فصل مشاهدات جدید دیگری را معرفی می‌کنیم که، به اثبات خواهد رسید، پیامدهای جالب و مفیدی از همان مرتبه را دربر دارند. این مشاهدات برمبنای برهم‌کنش مغناطیسی بین اجسام پایه‌گذاری شده است، که آثار آن را در چند فصل آینده مورد بررسی قرار خواهیم داد. در مطالعهٔ مبحث مغناطیس به‌خاطر سپردن این موضوع که بین برهم‌کنشهای الکتریکی و مغناطیس هم شباهتهای مهم بسیار و هم اختلافهای مهم فراوانی وجود دارد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

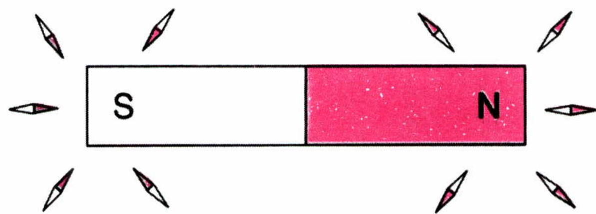
در حدود قرن هشتم قبل از میلاد مسیح، یونانیان کشف کرده بودند که قطعهٔ مگنتیت معدنی (که با نام سنگِ بار یا آهنربای طبیعی شناخته می‌شد، و نوعی اکسید آهن بود) می‌تواند قطعهٔ آهن را جذب کند ولی هیچ نیروی قابل اندازه‌گیری روی اغلب مواد معدنی دیگر وارد نمی‌کرد. بعداً کشف شد که قطعهٔ مگنتیت می‌تواند قطعهٔ دیگری از این ماده را برباید و یا براند، که این رفتار به آرایش نسبی آنها بستگی دارد. در این آزمایشها و آزمایشی که در پایین توصیف می‌کنیم، ضرورت دارد مشخص کنیم که هیچ‌یک از این جسمها حامل بار الکتریکی خالصی نیستند، به‌طوری که اطمینان حاصل کنیم که این نیروهای جدید منشأ الکتریکی ندارند.

در قرن دوازدهم میلادی، آزمایش زیر تجربه‌ای شناخته‌شده بود. یک قطعهٔ کوچک سوزنی‌شکل مگنتیت که از جایی آویخته شده باشد، می‌تواند حول یک محور قائم بچرخد. در این آزمایش، حتی اگر هیچ مگنتیت یا آهن دیگری در آن نزدیکی نباشد، این قطعه سوزنی‌شکل به‌طور خودبه‌خودی حول محورش خواهد چرخید و سرانجام وقتی به حالت سکون درآمد، چنان قرار می‌گیرد که یک انتهای آن به‌طور تقریبی به سمت قطب شمال جغرافیایی است. آن سر سوزن را با رنگ سرخ مشخص می‌کنیم. صرف‌نظر از اینکه ما در چه جایی روی سطح زمین این آزمایش را انجام دهیم، طرف سرخ سوزن همواره به‌طور تقریبی به سمت قطب شمال قرار می‌گیرد (شکل ۳۲ـ۱).

قطعه‌ای که به این ترتیب ساخته شده است، قطعاً یک قطب‌نمای



شکل ۳۲ـ۱ در هر موقعیتی روی سطح زمین، عقربهٔ مغناطیسی همواره به‌طور تقریبی به‌سوی قطب شمال قرار می‌گیرد.



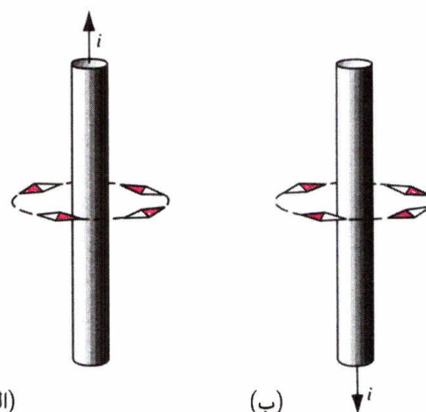
شکل ۳۲ـ۲ عقربهٔ مغناطیسی، میدان مغناطیسی در اطراف یک آهنربای میله‌ای را نشان می‌دهد.

مغناطیسی است، که به میدان مغناطیسی زمین پاسخ می‌دهد، درست به‌همان صورتی که دو قطعهٔ مگنتیت برهم نیرو وارد می‌کنند. این نتیجه را با همان زبانی توصیف می‌کنیم که در مورد برهم‌کنشهای الکتریکی به‌کار گرفتیم: قطعهٔ مگنتیت (یا زمین) یک میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد، و قطعهٔ دیگر به آن میدان مغناطیسی پاسخ (یا واکنش نشان) می‌دهد. جهت عقربهٔ مغناطیسی، جهت مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین را نشان می‌دهد.

همچنین می‌توانیم از این عقربهٔ مغناطیسی برای ردیابی میدان مغناطیسی آهنربای میله‌ای استفاده کنیم. در شکل ۳۲ـ۲، یک انتهای آهنربای میله‌ای را با رنگ سرخ رنگ کرده‌ایم، زیرا اگر این آهنربای میله‌ای را مانند عقربهٔ مغناطیسی بیاویزیم، این انتها به سمت شمال قرار می‌گیرد. بنابر قرارداد، این سر مغناطیس را "شمال‌جوینده" یا به‌سادگی قطب شمال مغناطیس می‌خوانیم و طرف دیگر را قطب جنوب. وقتی که عقربهٔ مغناطیسی را به مغناطیس میله‌ای نزدیک کنیم، عقربه می‌چرخد تا وقتی که جهت آن، جهت میدان مغناطیسی در آن نقطه را مشخص کند، که این رفتار در شکل ۳۲ـ۲ نشان داده شده است. همان‌طورکه در فصل ۳۵ بحث خواهیم کرد، میدان مغناطیسی زمین از بسیاری جهتها شبیه میدان مغناطیسی آهنربای میله‌ای است.

نتیجه‌های بسیار شگفت‌انگیزتر وقتی حاصل می‌شود که عقربهٔ مغناطیسی را، مانند شکل ۳۲ـ۳، در نزدیکی سیم حامل جریان قرار دهیم. وقتی جریان پایایی در سیم جاری است، عقربه به‌روشنی نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی وجود دارد، و جهت عقربه، جهت میدان مغناطیسی را در نزدیکی سیم مشخص می‌کند. اگر جریان را قطع کنیم، دیگر میدانی وجود ندارد. اگر جهت جریان را برعکس کنیم، عقربه در جهت برعکس قرار می‌گیرد (شکل ۳۲ـ۳(ب)).

این مشاهده‌ها، به رابطه‌های پیچیده و شگفت‌انگیز بین پدیده‌های الکتریکی (مانند جریان جاری در یک سیم) و پدیده‌های مغناطیسی (انحراف عقربهٔ قطب‌نما) اشاره‌هایی را ارائه می‌دهد. در قسمتهای بعدی این کتاب مثالهای دیگری از این بستگی را مورد بحث قرار



شکل ۳۲ـ۳ (الف) عقربهٔ مغناطیسی نشان می‌دهد که یک میدان مغناطیسی سیم حامل جریان را احاطه کرده است. (ب) وقتی جهت جریان برعکس شود، جهت میدان مغناطیسی برعکس می‌شود.

می‌دهیم. این بستگی سبب بروز آثار کاملاً گوناگونی از عملکرد موتور الکتریکی تا انتشار نور است.

مغناطیس و بارهای متحرک

تلاش برای درک میدانهای مغناطیسی با پیروی از همان روندی که در مورد میدانهای الکتریکی به‌کار بردیم، وسوسه‌انگیز است. یعنی، استفاده از بار آزمون برای کاوش میدان. این کار بلافاصله به پرسشهایی دربارهٔ ارتباط بین پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی منجر می‌شود.

۱. آیا در طبیعت درست به همان ترتیب که از نیروی وارد بر بار آزمون الکتریکی به‌منظور تعیین میدان الکتریکی استفاده کردیم "بار آزمون مغناطیسی" وجود دارد که بتوان از آن برای تعیین شدت و جهت میدان مغناطیسی استفاده کرد؟ (نگاه کنید به معادلهٔ (۲۶ـ۳)، $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}/q_0$). از لحاظ نظری، وجود بارهای مغناطیسی منزوی مجاز است، ولی با وجود جستجوهای تجربی بسیار جدی، تا به امروز هیچ‌کس موفق به یافتن حتی یکی از این بارها نشده است. به‌همین دلیل نتیجه می‌گیریم که بارهای مغناطیسی منزوی، که به آنها تک‌قطبیهای مغناطیسی می‌گوییم، یا بسیار نادرند و یا اصلاً وجود ندارند و در نتیجه معادله‌های مربوط به الکترومغناطیس را چنان می‌نویسیم که گویی بارهای مغناطیسی وجود ندارند.

۲. آیا می‌توانیم از بار آزمون الکتریکی جهت کاوش میدان مغناطیسی استفاده کنیم؟ پاسخ به این پرسش مثبت است، ولی فقط اگر بار آزمون نسبت به چشمهٔ میدان مغناطیسی در حرکت باشد. والا میدان مغناطیسی بر بار الکتریکی ساکن هیچ نیرویی وارد نمی‌آورد.

۳. اگر بتوان از بارهای الکتریکی متحرک به‌عنوان کاوهٔ میدانهای مغناطیسی استفاده کرد، آیا بارهای الکتریکی متحرک نیز می‌توانند میدان مغناطیسی ایجاد کنند؟ پاسخ به این پرسش مثبت است و آن را در شکل ۳۲ـ۳ به نمایش گذاشته‌ایم. در واقع، بارهای الکتریکی متحرک پدیدآورندهٔ میدانهای مغناطیسی زمین و آهنربای میله‌ای هم هستند (در حالت اخیر، بارهای الکتریکی همانا الکترونهای متحرک در اتمها هستند).

۴. در مبحث الکتروستاتیک، به بار آزمون در میدان الکتریکی انرژی پتانسیل الکتریکی نسبت دادیم (بخش ۲۸ـ۲). آیا به بار آزمون الکتریکی متحرک در میدان مغناطیسی "انرژی پتانسیل مغناطیسی" وابسته است؟ در حالت کلی پاسخ این پرسش منفی است، زیرا نیروهایی که به سرعت بستگی دارند نیروهای پایستار نیستند. (از فصل ۱۲ به یاد بیاورید که انرژی پتانسیل را فقط می‌توان برای نیروهای پایستار تعریف کرد).

همان‌طورکه فضای اطراف مجموعه‌ای از بارها را به‌صورت موقعیت میدان الکتریکی توصیف کردیم که با بردار $\vec{\mathbf{E}}$ نمایش می‌دهیم، فضای اطراف زمین، آهنربای میله‌ای، یا سیم حامل جریان را به عنوان موقعیت میدان مغناطیسی* که با بردار $\vec{\mathbf{B}}$ نمایش داده می‌شود توصیف می‌کنیم. مشابه میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی را هم با خطهای میدان نمایش می‌دهیم، که این خط وقتی میدان شدیدتر است به‌هم نزدیک‌ترند و وقتی میدان ضعیف‌تر است این خطها از هم دورترند. اغلب خطهای مربوط به میدان $\vec{\mathbf{B}}$ از نظر طرح شبیه خطهایی هستند که قبلاً برای میدان $\vec{\mathbf{E}}$ ترسیم کرده‌ایم، برای مثال خطهای مربوط به یک میدان یکنواخت یا میدان یک دوقطبی. با این وصف، همین‌طورکه در بررسی میدانهای مغناطیسی پیش می‌رویم، باید به چندین اختلاف مهم بین خطهای $\vec{\mathbf{E}}$ و خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ توجه کنیم، که اینها را در چند فصل بعد مورد بحث قرار می‌دهیم.

در مبحث الکتروستاتیک، رابطهٔ بنیادی بین بار الکتریکی و میدان الکتریکی را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

میدانهای الکتریکی به‌وسیلهٔ بارهای الکتریکی به‌وجود می‌آیند

بار الکتریکی ⟵ میدان الکتریکی ⟵ بار الکتریکی

به بارهای الکتریکی توسط میدانهای الکتریکی نیرو وارد می‌شود

* هیچ توافق کلی دربارهٔ نامگذاری بردارهای میدان در مغناطیس وجود ندارد. $\vec{\mathbf{B}}$ را می‌توان القای مغناطیسی یا چگالی شار مغناطیسی خواند، در حالی که میدان برداری دیگری را، که با $\vec{\mathbf{H}}$ مشخص شده است می‌توان میدان مغناطیسی نامید. در اینجا $\vec{\mathbf{B}}$ را کمیت بنیادیتر درنظر می‌گیریم و بنابراین آن را میدان مغناطیسی می‌نامیم.

یعنی، بارهای الکتریکی میدان الکتریکی به‌وجود می‌آورند، که به نوبهٔ خود می‌تواند نیرویی الکتریکی بر بارهای دیگر وارد کند. ای کاش می‌توانستیم رابطهٔ مشابهی برای میدانهای مغناطیسی بنویسیم:

بار مغناطیسی ← میدان مغناطیسی ← بار مغناطیسی

اما، چون تاکنون هیچ بار مغناطیسی منفردی یافت نشده است، باید از رابطهٔ متفاوتی استفاده کنیم:

بارهای الکتریکی متحرک ← میدان مغناطیسی ← بارهای الکتریکی متحرک

یعنی، بارهای الکتریکی متحرک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کنند و این میدان به نوبهٔ خود می‌تواند به بارهای الکتریکی متحرک دیگر نیرویی (که آن را نیروی مغناطیسی می‌گوییم) وارد کند. در این فصل قسمت دوم این رابطه (نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل بعد چگونگی ایجاد میدانهای مغناطیسی به‌وسیلهٔ بارهای متحرک، و از جمله جریانهای جاری در سیمها، را مورد بحث قرار خواهیم داد.

قطبهای مغناطیسی

با آویختن قطعه‌ای از مادهٔ مغناطیسی در نزدیکی سطح زمین، می‌توانیم قطب شمال آن قطعه را شناسایی و نشانه‌گذاری کنیم (آن طرف قطعه که به‌طور تقریبی در راستای شمال جغرافیایی زمین قرار می‌گیرد) و طرف مقابل آن را قطب جنوب بخوانیم. فرض کنید که دو قطعه از مادهٔ مغناطیسی را به این صورت آزمایش و نشانه‌گذاری کرده باشیم. پس از تهیهٔ این دو قطعهٔ نشانه‌گذاری‌شده، به‌طور مستقیم می‌توانیم نیرویی که یکی از این دو قطعه در آرایشهای گوناگون به قطعهٔ دیگر وارد می‌کند بررسی کنیم. به‌ویژه، می‌توانیم نیرویی که یک قطب شمال بر قطب شمال دیگر یا بر قطب جنوب وارد می‌کند بررسی کنیم. از آزمایشهایی از این دست قاعدهٔ زیر را برای برهم‌کنش بین قطبهای مغناطیسی استنتاج می‌کنیم:

> قطبهای همنام یکدیگر را می‌رانند و قطبهای غیرهمنام یکدیگر را می‌ربایند.

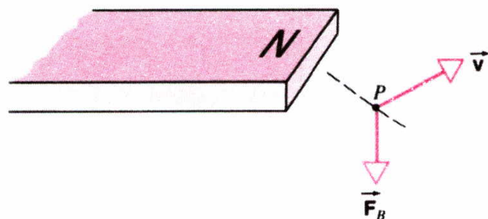
یعنی، قطب جنوب قطب شمال را می‌رباید، ولی دو قطب شمال یا دو جنوب یکدیگر را می‌رانند. این قاعده خیلی شبیه قاعدهٔ مربوط به برهم‌کنش بین بارهای الکتریکی است (بخش ۲۵ـ۲). از اعمال این قاعده در مورد رفتار عقربهٔ قطب‌نما روی سطح زمین، همان‌طور که در شکل ۳۲ـ۱ نشان داده شده است، نتیجه می‌گیریم که برای جذب قطب شمال عقربهٔ مغناطیسی باید قطب جنوب مغناطیسی در نزدیکی قطب شمال جغرافیایی زمین وجود داشته باشد.

۳۲ـ۲ نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک

برای درک خواص میدانهای مغناطیسی، اولین کاری که باید انجام دهیم مطالعهٔ نیروی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی است. در مبحث الکتروستاتیک، نیروی وارد بر ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی به‌صورت $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$ است (معادلهٔ ۲۶ـ۴). این عبارت روشی را ارائه می‌دهد که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم بررسی کنیم که آیا در نقطه‌های گوناگون در هر ناحیه از فضا میدان الکتریکی وجود دارد یا خیر؛ اگر پس از آنکه همهٔ نیروهای غیرالکتریکی (گرانش و غیره) را در نظر گرفتیم، دریافتیم که نیروی وارد بر بار آزمون در حال سکون غیرصفر است، نتیجه می‌گیریم که در آن نقطه باید میدان الکتریکی وجود داشته باشد. اکنون به جستجوی عبارت متناظری برای میدانهای مغناطیسی می‌پردازیم، که امکان بررسی وجود میدانهای مغناطیسی را بر پایهٔ نیروی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک فراهم می‌آورد. از پیش می‌دانیم که، عبارتی به‌سادگی عبارت مربوط به نیروی الکتریکی به‌دست نخواهیم آورد، زیرا نیروی مغناطیسی شامل دو بردار است: بردار میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ و بردار سرعت $\vec{\mathbf{v}}$.

قبل از آغاز آزمایشهایمان، ابتدا بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم در ناحیهٔ موردنظر هیچ‌گونه میدان الکتریکی وجود ندارد. برای این کار بار آزمون را در نقطه‌های مختلف این ناحیهٔ در حال سکون قرار می‌دهیم تا یقین حاصل کنیم که نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون برابر صفر است.

پس از آنکه یقین کردیم که هیچ‌گونه میدان الکتریکی روی ذرهٔ باردار اثر نمی‌کند، می‌توانیم از آن به‌عنوان کاوه جهت یافتن نیروی مغناطیسی استفاده کنیم. نقطهٔ مشخص P را در نزدیکی یک چشمهٔ میدان مغناطیسی، مانند یک آهنربای میله‌ای (شکل ۳۲ـ۴)، اختیار



شکل ۳۲ـ۴ ذرهٔ بارداری با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ در نزدیکی یک مغناطیس میله‌ای حرکت می‌کند. نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ به ذره وارد می‌شود. اگر سرعت ذره در هر یک از دو جهت راستای خط‌چین باشد، نیروی مغناطیسی صفر است.

می‌کنیم. فرض می‌کنیم ابزاری را در اختیار داریم که می‌توانیم به‌وسیلهٔ آن ذرات باردار را از نقطهٔ P شلیک کنیم؛ این ابزار این امکان را فراهم می‌آورد که ما اندازهٔ سرعت ذرات و جهت حرکت آنها را انتخاب کنیم. با بهره‌گیری از این ابزار، می‌توانیم آزمایشهایی انجام دهیم که مشاهده‌های گوناگونی دربارهٔ نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ وارد بر ذرات به‌دست دهد.

۱. با شلیک ذرات باردار از نقطهٔ P در جهتهای گوناگون، درمی‌یابیم که نیروی مغناطیسی، اگر وجود داشته باشد، عمود بر سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ است، که این موضوع را در شکل ۳۲ـ۴ نشان داده‌ایم. صرف‌نظر از اینکه جهت سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ چه باشد، نیروی مغناطیسی همواره بر سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ عمود است.

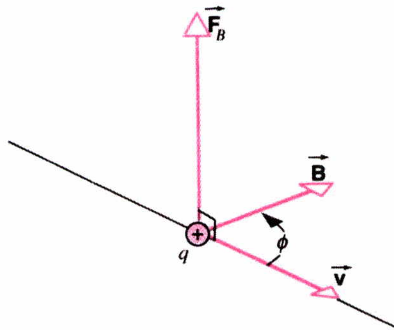
۲. با تغییردادن جهت سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ از نقطهٔ P (با حفظ اندازهٔ $\vec{\mathbf{v}}$ به‌صورت یک ثابت)، در می‌یابیم که برای راستای مشخص $\vec{\mathbf{v}}$، که در شکل ۳۲ـ۴ به‌صورت خط‌چین نشان داده شده است، نیروی مغناطیسی صفر است. وقتی سرعت در جهت عمود بر این راستا باشد، نیروی مغناطیسی دارای بیشینهٔ مقدارش است. در حد فاصل بین این دو راستا، نیروی مغناطیسی به‌صورت تابعی از $\sin\phi$ تغییر می‌کند، که در اینجا ϕ زاویهٔ بین بردار سرعت و راستای نمایش‌یافته با خط‌چین است. (توجه کنید که راستای نشان داده‌شده به‌وسیلهٔ خط‌چین در واقع دارای دو جهت مخالف هم است که برای آنها نیرو صفر است، یکی از این دو جهت متناظر با $\phi = ۰$ و دیگری متناظر با $\phi = ۱۸۰^\circ$ است.)

۳. وقتی اندازهٔ سرعت را تغییر می‌دهیم، در می‌یابیم که اندازهٔ نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ به نسبت مستقیم با آن تغییر می‌کند.

۴. همچنین در می‌یابیم که اندازهٔ نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ با اندازهٔ بار آزمون q متناسب است، و وقتی که بار q تغییر علامت می‌دهد، جهت نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ برعکس می‌شود.

اکنون، براساس مشاهده‌های بالا، میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در نقطهٔ P یکی از جهتهای بردار $\vec{\mathbf{v}}$ است (که به‌زودی آن را مشخص خواهیم کرد) که برای آن نیروی وارد بر بار صفر است و اندازهٔ بردار $\vec{\mathbf{B}}$ از اندازهٔ $F_{B,\max}$ مربوط به بیشینهٔ نیروی وارد بر بار آزمون که در راستای عمود بر جهت بردار $\vec{\mathbf{B}}$ پرتاب شده باشد مشخص می‌شود؛ یعنی

$$B = \frac{F_{B,\max}}{|q|v} \qquad (۳۲\text{ـ}۱)$$



شکل ۳۲ـ۵ ذره‌ای با بار مثبت q که با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ در میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ حرکت می‌کند، تحت تأثیر نیروی منحرف‌کنندهٔ مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ قرار می‌گیرد.

در زاویه‌های دلخواه، مشاهده‌هایمان را در فرمول زیر خلاصه می‌کنیم

$$F_B = |q|vB \ \sin\phi \qquad (۳۲\text{ـ}۲)$$

که در اینجا ϕ زاویه کوچکتر بین $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ است، چون F_B، v و B بردارند، معادلهٔ (۳۲ـ۲) را می‌توان به‌صورت حاصلضرب برداری نوشت:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۲\text{ـ}۳)$$

با نوشتن $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ به‌جای $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{v}}$ در معادلهٔ (۳۲ـ۳)، مشخص کرده‌ایم که می‌خواهیم از کدام‌یک از دو جهت ممکن برای $\vec{\mathbf{B}}$ استفاده کنیم. در بررسی مبحث مغناطیس به‌طور مکرر از حاصلضرب برداری استفاده می‌کنیم. امکان دارد که مرور خواص حاصلضرب برداری در پیوست ح برای درک سریع‌تر موضوع مفید باشد.

در شکل ۳۲ـ۵ بستگی هندسی بین بردارهای $\vec{\mathbf{F}}_B$، $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ را نشان داده‌ایم. توجه کنید، همان‌گونه که در مورد حاصلضرب برداری همواره برقرار است، $\vec{\mathbf{F}}_B$ بر صفحهٔ تشکیل‌شده از $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ عمود است. به این ترتیب نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ همواره بر $\vec{\mathbf{v}}$ عمود است و نیروی مغناطیسی همواره نیروی منحرف‌کنندهٔ جانبی است. همچنین توجه کنید که وقتی $\vec{\mathbf{v}}$ موازی یا پادموازی جهت بردار $\vec{\mathbf{B}}$ است، نیرو صفر می‌شود (که در این مورد $\phi = ۰^\circ$ یا ۱۸۰° است و $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = ۰$) و نیز اینکه بیشینهٔ مقدار $\vec{\mathbf{v}}_B$ برابر qvB است، و وقتی حاصل می‌شود که $\vec{\mathbf{v}}$ عمود بر $\vec{\mathbf{B}}$ باشد.

چون نیروی مغناطیسی همواره بر سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ عمود است، نمی‌تواند اندازهٔ سرعت را تغییر دهد، تنها جهت آن را تغییر می‌دهد. همین‌طور، نیرو همواره بر جابه‌جایی ذره عمود است و نمی‌تواند روی آن کار انجام دهد. به این ترتیب میدان مغناطیسی ثابت نمی‌تواند انرژی جنبشی

ذرهٔ باردار متحرک را تغییر دهد. (در فصل ۳۴ میدانهای مغناطیسی را بررسی می‌کنیم که برحسب زمان تغییر می‌کنند و می‌توانند انرژی جنبشی ذره را تغییر دهند. در این فصل، فقط با میدانهای مغناطیسی سروکار داریم که برحسب زمان تغییر نمی‌کنند.)

معادلهٔ (۳۲-۳)، که تعریف میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$، محسوب می‌شود، هم‌جهت و هم‌اندازهٔ آن را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی را، به‌صورتی مشابه، با معادله تعریف کردیم، $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$، به‌طوری که با اندازه‌گیری نیروی الکتریکی می‌توان اندازه و جهت میدان الکتریکی را تعیین کرد. میدانهای مغناطیسی را نمی‌توان به این سادگی با یک اندازه‌گیری معین کرد. همان‌طور که شکل ۳۲-۵ نشان می‌دهد، اندازه‌گیری $\vec{\mathbf{F}}_B$ برای تک‌سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ برای تعیین $\vec{\mathbf{B}}$ کافی نیست، زیرا جهت نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را مشخص نمی‌کند. نخست باید جهت $\vec{\mathbf{B}}$ را مشخص کنیم (مثلاً، با یافتن جهتهایی از $\vec{\mathbf{v}}$ که برای آنها هیچ نیرویی وجود ندارد) و سپس با اندازه‌گیری دیگر می‌توان اندازهٔ آن را تعیین کرد.

یکای SI اندازه‌گیری $\vec{\mathbf{B}}$ تسلا (با علامت اختصاری T) است. این تعریف از معادلهٔ (۳۲-۱) به‌دست می‌آید، که در آن

$$۱\,\frac{\text{نیوتون}}{\text{آمپر}\cdot\text{متر}} = ۱\,\frac{\text{نیوتون}}{\text{متر}\cdot\text{ثانیه/کولن}} = ۱\,\text{تسلا}$$

یکای قبلی (غیر SI) $\vec{\mathbf{B}}$ که هنوز به‌کار می‌رود، گاؤس است، که با رابطهٔ زیر به تسلا مربوط می‌شود

$$۱\,\text{تسلا} = ۱۰^{۴}\,\text{گاؤس}$$

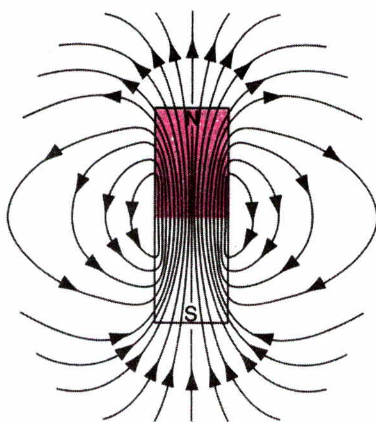
جدول ۳۲-۱ مقادیر نوعی بعضی از میدانهای مغناطیسی را نشان می‌دهد.

در شکل ۳۲-۶ خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به یک آهنربای میله‌ای را نشان داده‌ایم. توجه کنید که خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ از داخل آهنربا می‌گذرند و حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند. از انبوه شدن خطهای میدان در خارج از آهنربا و در نزدیکی دو سر آن، نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ میدان مغناطیسی در آنجا بیشینه است. این دو سر را قطبهای آهنربا می‌نامیم. توجه کنید که خطهای میدان از قطب شمال خارج و به قطب جنوب وارد می‌شوند.

جدول ۳۲-۱ مقادیر نوعی بعضی از میدانهای مغناطیسی*

محل	میدان مغناطیسی (T)
روی سطح ستارهٔ نوترونی (محاسبه‌شده)	$۱۰^{۸}$
در نزدیکی مغناطیس ابررسانا	۵
در نزدیکی آهنربای الکتریکی بزرگ	۱
در نزدیکی آهنربای میله‌ای کوچک	$۱۰^{-۲}$
در سطح زمین	$۱۰^{-۴}$
در فضای میان‌ستاره‌ای	$۱۰^{-۱۰}$
در اتاق دارای حفاظ مغناطیسی	$۱۰^{-۱۴}$

* مقادیر تقریبی



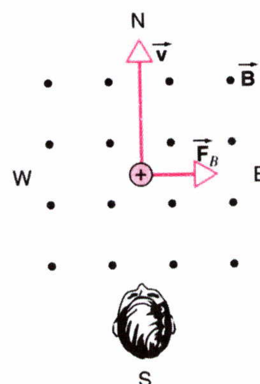
(الف)



(ب)

شکل ۳۲-۶ (الف) خطهای میدان مغناطیسی یک آهنربای میله‌ای. خطهای میدان با خروج از قطب شمال آهنربا و ورود به قطب جنوب حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند. (ب) با پاشیدن برادهٔ آهن روی یک برگ کاغذ که روی یک آهنربای میله‌ای قرار گرفته است می‌توان خطهای میدان را قابل مشاهده کرد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲-۱ میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$، به اندازهٔ ۱٫۲ mT را در همه جای اتاقی که در آن نشسته‌اید، در راستای قائم و به سمت بالا وجود دارد (شکل ۳۲-۷). پروتونی با انرژی جنبشی



شکل ۳۲ـ۷ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۱. نما از بالای سر دانشجویی که در اتاقی نشسته است که در آن میدان مغناطیسی قائم به طرف بالا پروتون متحرکی را به‌سمت شرق منحرف می‌کند. (نقطه‌ها، که نمایانگر نوک پیکانها هستند، بردارهای میدان مغناطیسی را نشان می‌دهند که از صفحه بیرون می‌آیند.)

$۵٫۳\,\text{MeV}$ به‌طور افقی، از نقطهٔ معینی از اتاق، به سمت شمال می‌رود. وقتی پروتون از این نقطه می‌گذرد، چه نیروی مغناطیسی منحرف‌کننده‌ای بر آن وارد می‌شود؟ جرم پروتون $۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$ است.

حل. نیروی مغناطیسی منحرف‌کننده به سرعت پروتون بستگی دارد، که می‌توان آن را از معادلهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ به‌دست آورد. از حل این معادله برای v نتیجه می‌گیریم

$$v = \sqrt{\frac{۲K}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{(۲)(۵٫۳\,\text{MeV})(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۳}\text{J/MeV})}{۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}}}$$
$$= ۳٫۲ \times ۱۰^{۷}\text{m/s}$$

سپس معادلهٔ (۳۲ـ۲) نتیجه می‌دهد

$$F_B = |q|vB\sin\phi$$
$$= (۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۳٫۲ \times ۱۰^{۷}\text{m/s})$$
$$(۱٫۲ \times ۱۰^{-۳}\text{T})(\sin ۹۰^\circ)$$
$$= ۶٫۱ \times ۱۰^{-۱۵}\text{N}$$

ممکن است که این نیرو کوچک به‌نظر برسد، ولی بر جسمی به جرم اندک اثر می‌کند و به آن شتابی بسیار بزرگ می‌دهد؛ یعنی داریم

$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{۶٫۱ \times ۱۰^{-۱۵}\text{N}}{۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}} = ۳٫۷ \times ۱۰^{۱۲}\text{m/s}^۲$$

تنها، باقی می‌ماند که جهت نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ را معین کنیم، وقتی که مانند شکل ۳۲ـ۷، $\vec{\mathbf{v}}$ به سمت شمال است و $\vec{\mathbf{B}}$ قائم به سمت بالا. با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳۲ـ۳) و قاعدهٔ دست راست برای جهت حاصلضربهای برداری (پیوست ح را ببینید)، نتیجه می‌گیریم که نیروی منحرف‌کنندهٔ $\vec{\mathbf{F}}_B$، باید مطابق شکل ۳۲ـ۷، افقی و به سمت شرق باشد.

اگر بار الکتریکی، ذره‌ای با بار منفی بود، نیروی منحرف‌کنندهٔ مغناطیسی در جهت مخالف، یعنی افقی و به‌سمت غرب بود. این موضوع را معادلهٔ (۳۲ـ۳)، با جایگزینی $-q$ به‌جای q خودبه‌خود پیش‌بینی می‌کند.

در این محاسبه‌ها، از رابطهٔ (تقریبی) کلاسیک $(K = \frac{۱}{۲}mv^۲)$ انرژی جنبشی پروتون به‌جای رابطهٔ (دقیق) نسبیتی (معادلهٔ ۲۰ـ۲۷) استفاده کردیم. معیار درستی استفاده از رابطهٔ کلاسیک آن است که $K \ll mc^۲$، که در آن $mc^۲$ انرژی سکون ذره است. در این مسئله $K = ۵٫۳\,\text{MeV}$ و انرژی سکون پروتون (نگاه کنید به پیوست و) برابر $۹۳۸\,\text{MeV}$ است. این پروتون شرط لازم را دارد و استفاده از معادلهٔ کلاسیک $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ برای انرژی جنبشی در این مسئله موجه است. وقتی با ذرات پر انرژی سروکار داریم، همواره باید مواظب این نکته باشیم.

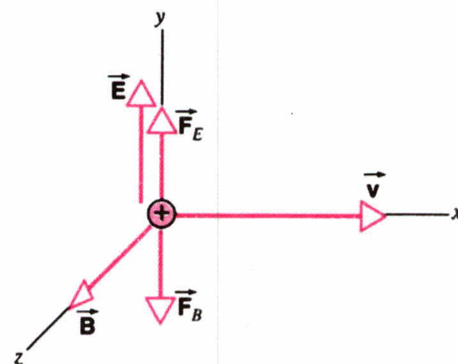
میدانهای ترکیبی الکتریکی و مغناطیسی

اگر میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ و میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ هر دو بر ذرهٔ باردار اثر کنند، نیروی کل وارد بر آن را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۲\text{ـ}۴)$$

این نیرو را نیروی لورنتس می‌خوانیم. نیروی لورنتس نیروی جدیدی نیست؛ بلکه صرفاً مجموع نیروهای الکتریکی و مغناطیسی است که می‌توانند به‌طور همزمان بر ذرهٔ باردار اثر کنند. بخش الکتریکی این نیرو بر هر ذرهٔ باردار اعم از ساکن یا متحرک اثر می‌کند؛ بخش مغناطیسی این نیرو فقط بر ذرات باردار متحرک اثر می‌کند.

یک کاربرد متداول نیروی لورنتس وقتی است که باریکه‌ای از ذرات باردار از ناحیه‌ای بگذرد که در آن میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ بر یکدیگر و بر سرعت ذرات باریکه عمود باشند. اگر بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$، $\vec{\mathbf{B}}$، و $\vec{\mathbf{v}}$ در جهتهایی باشند که در شکل ۳۲ـ۸ نشان داده‌ایم، در آن صورت نیروی الکتریکی $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$ در خلاف جهت نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ است. می‌توان میدانهای مغناطیسی و الکتریکی را چنان تنظیم کرد که اندازهٔ نیروها با هم برابر شوند، که در این مورد



شکل ۳۲_۸ ذره‌ای با بار مثبت، در ناحیه‌ای از فضا حرکت می‌کند که در آن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عمود بر یکدیگر وجود دارند. بر این ذره نیروهای الکتریکی و مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_E$ و $\vec{\mathbf{F}}_B$ در جهتهای مخالف وارد می‌شود.

نیروی لورنتس صفر می‌شود. برحسب کمیتهای نرده‌ای، داریم

$$qE = qvB \qquad (۵_۳۲)$$

یا

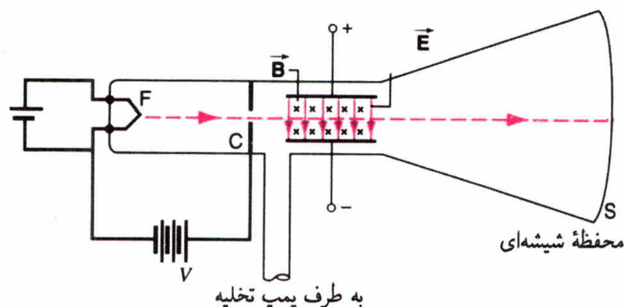
$$v = \frac{E}{B} \qquad (۶_۳۲)$$

بنابراین میدانهای عمود بر هم $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ به‌صورت سرعت‌گزین عمل می‌کنند: فقط ذراتی که سرعت آنها $v = E/B$ باشد، بدون تأثیرپذیری از دو میدان ناحیه را ترک می‌کنند، در حالی که همهٔ ذرات با سرعتهای دیگر منحرف می‌شوند. این مقدار سرعت، یعنی v، مستقل از بار یا جرم ذرهٔ باردار است.

باریکهٔ ذرات باردار اغلب با استفاده از روشهایی آماده می‌شوند که توزیعی از سرعتها را به‌دست می‌دهند (مثلاً، یک توزیع دمایی مانند آنچه در شکل ۲۲_۶ ارائه شد). با استفاده از سرعت‌گزین می‌توان ذرات با سرعت معین را از باریکه جدا کرد. جی. جی. تامسون در سال ۱۸۹۷ در کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم آن از این اصل استفاده کرد. در شکل ۳۲_۹ نوع جدیدی از این دستگاه را نشان داده‌ایم. تامسون ابتدا انحراف قائم y باریکه را وقتی که فقط میدان الکتریکی وجود داشت اندازه‌گیری کرد. از مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶_۶، انحراف در این مورد برابر است با

$$y = -\frac{qEL^2}{2mv^2} \qquad (۷_۳۲)$$

در این رابطه، مانند شکل ۳۲_۹، جهت مثبت y را به‌سمت بالا اختیار کرده‌ایم و E اندازهٔ میدان الکتریکی است. انحراف y ذرهٔ باردار منفی، در معادلهٔ (۳۲_۷) و در شکل ۳۲_۹ مثبت است.



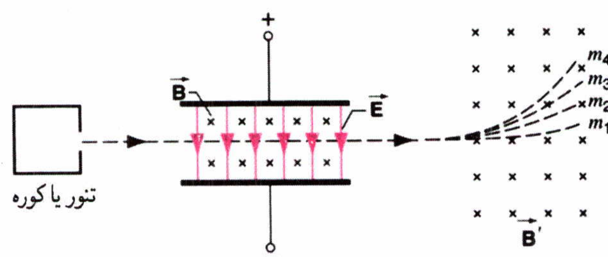
شکل ۳۲_۹ نوع جدید دستگاهی که جی. جی. تامسون برای اندازه‌گیری نسبت بار به جرم الکترون به‌کار برد. رشتهٔ F باریکه‌ای از الکترونها را با سرعتهای متفاوت تولید می‌کند. با اتصال باتری به پایانه‌های صفحه‌ها، میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ بین صفحه‌ها به‌وجود می‌آید. میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را پیچه‌های حامل جریان (که در شکل نشان داده نشده‌اند) برقرار می‌کنند. این باریکه در محل برخورد با پردهٔ S یک لکهٔ روشن قابل رؤیت به‌وجود می‌آورد. (علامتهای ضربدر در داخل شکل نمایانگر دُم پیکانها بوده و معرف بردارهای $\vec{\mathbf{B}}$ هستند که جهت آنها به طرف داخل صفحه است.)

سپس میدان مغناطیسی برقرار و چنان تنظیم می‌شود که انحراف باریکه برابر صفر شود (هم‌ارز با آنچه که در نبود میدان اندازه‌گیری می‌شود). در این حالت می‌دانیم $v = E/B$ است، و از حل معادلهٔ نسبت بار به جرم و قرار دادن $q = -e$ می‌رسیم به

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2L^2} \qquad (۸_۳۲)$$

مقداری را که تامسون برای e/m به‌دست آورد (برحسب یکاهای جدید) $1.7 \times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ بود که با مقدار امروزی این کمیت یعنی $1.758820174 \times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ به‌خوبی سازگار است.

کاربرد دیگر سرعت‌گزین در طیف‌سنج جرم است، که وسیله‌ای برای جداسازی یونها برحسب جرم آنهاست. در این مورد باریکه‌ای از یونها، شاید شامل نمونه‌هایی با جرمهای متفاوت، را می‌توان از بخار ماده‌ای که در کوره‌ای داغ شده است به‌دست آورد (نگاه کنید به شکل ۳۲_۱۰). سرعت‌گزین فقط یونهایی که سرعت خاصی دارند عبور می‌دهد. وقتی این باریکه از میدان مغناطیسی دیگری بگذرد، مسیر ذرات قوسهای دایره‌هایی است که شعاع آنها را تکانهٔ ذرات تعیین می‌کند (این موضوع را در بخش بعدی نشان خواهیم داد). چون تمام ذرات سرعت یکسانی دارند، شعاع مسیر را جرم ذره تعیین می‌کند و هر مؤلفهٔ جرمی متفاوت موجود در باریکه، مسیر با شعاعی متفاوت را طی می‌کند. این اتمها را می‌توان گردآوری و اندازه‌گیری کرد یا به‌صورت باریکه‌ای برای انجام آزمایشهای بعدی درآورد. برای سایر جزییات مربوط به جداسازی یونها برحسب جرمشان مسئله‌های ۵ تا ۸ را ببینید.

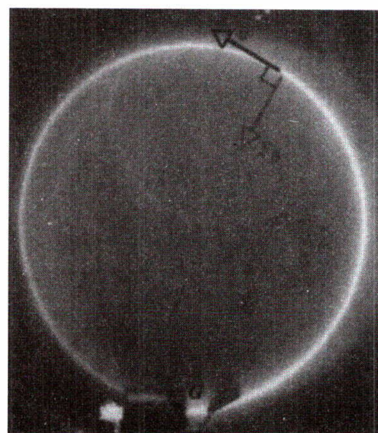


شکل ۳۲ـ۱۰ نمودار طرح‌وار طیف‌سنج جرم. باریکه‌ای از اتمهای یونیده حاوی مخلوطی از جرمهای متفاوت از کورهٔ O خارج و وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آن میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ برهم عمودند. تنها اتمهایی که سرعت آنها $v=E/B$ است بدون انحراف از این ناحیه عبور می‌کنند. میدان مغناطیسی دیگری، $\vec{\mathbf{B}}'$، اتمها را در مسیرهای دایره‌ای منحرف می‌کند که شعاع این مسیرها را جرم اتمها مشخص می‌کند.

۳۲ـ۳ بارهای چرخنده

در شکل ۳۲ـ۱۱ باریکه‌ای از الکترونها را نشان داده‌ایم که در اتاقک خلأ حرکت می‌کنند، و در آن میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ به طرف خارج از صفحهٔ شکل وجود دارد. نیروی منحرف‌کنندهٔ مغناطیسی تنها نیروی مهمی است که بر الکترونها اثر می‌کند. باریکه به‌وضوح مسیر دایره‌ای را در صفحهٔ شکل می‌پیماید. ببینیم، چگونه می‌توانیم این رفتار را درک کنیم.

نیروی منحرف‌کنندهٔ مغناطیسی، با دو ویژگی بر مسیر ذرات باردار تأثیر می‌گذارد: (۱) سرعت ذرات باردار را تغییر نمی‌دهد و (۲) همواره در جهت عمود بر سرعت ذرات وارد می‌شود. اینها درست ویژگیهایی



شکل ۳۲ـ۱۱ الکترونها در اتاقکی حاوی گازی با فشارکم می‌چرخند. باریکه در برخورد با اتمهای گاز قابل رؤیت می‌شود. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ که جهت آن عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف خارج است، اتاقک را پر کرده است. نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ در امتداد شعاع به طرف داخل است.

هستند که برای حرکت یک ذره در مسیری دایره‌ای با سرعت ثابت، مانند مورد الکترونهای شکل ۳۲ـ۱۱، نیاز داریم.

چون $\vec{\mathbf{B}}$ عمود بر $\vec{\mathbf{v}}$ است، اندازهٔ نیروی مغناطیسی را می‌توان به‌صورت $|q|vB$ نوشت و قانون دوم نیوتن با یک شتاب مرکزگرای v^2/r، نتیجه می‌دهد

$$|q|vB = m\frac{v^2}{r} \tag{۳۲ـ۹}$$

یا

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{p}{|q|B} \tag{۳۲ـ۱۰}$$

به این ترتیب شعاع مسیر را، تکانهٔ p ذرات، بار آنها و شدت میدان مغناطیسی تعیین می‌کند. اگر چشمهٔ الکترونهای شکل ۳۲ـ۱۱، آنها را با سرعت کمتری به داخل میدان پرتاب کرده بود، الکترونها در دایره‌های کوچکتری حرکت می‌کردند.

سرعت زاویه‌ای حرکت دایره‌ای چنین است

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m} \tag{۳۲ـ۱۱}$$

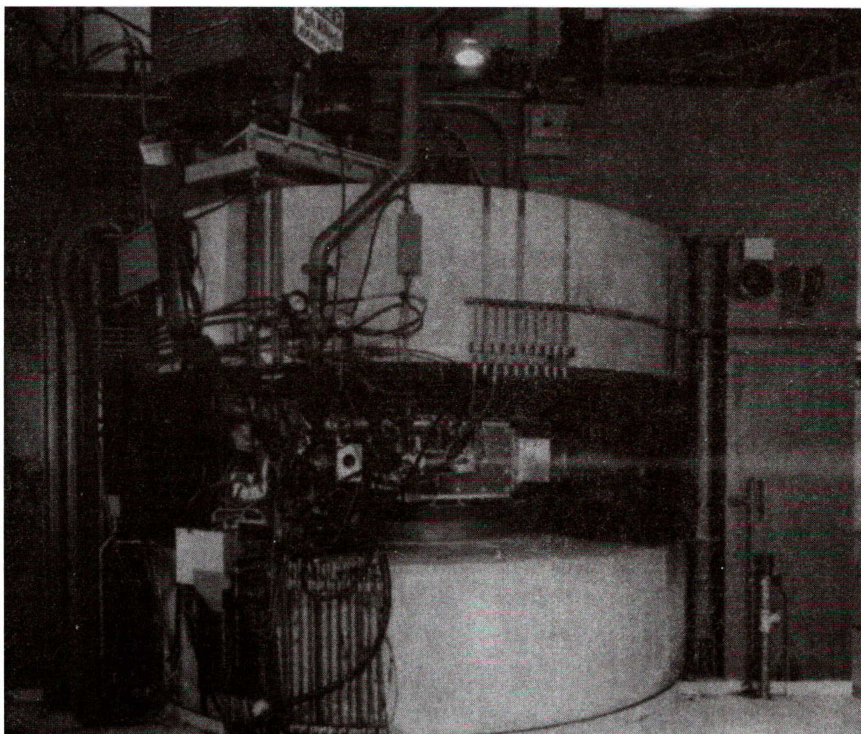
و بسامد متناظر با آن عبارت است از

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} \tag{۳۲ـ۱۲}$$

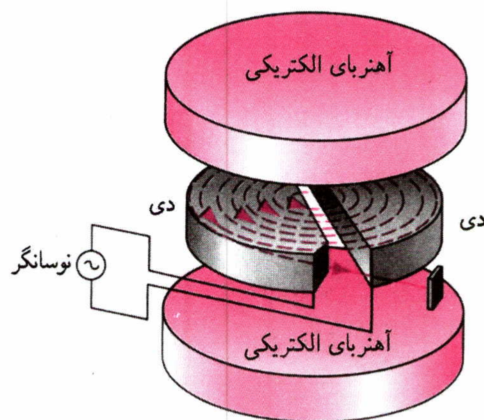
توجه کنید که بسامد مربوط به حرکت دایره‌ای به سرعت ذره بستگی ندارد (البته تا زمانی که $v \ll c$ است، که این موضوع را در زیر بررسی می‌کنیم). به این ترتیب، اگر الکترونهای شکل ۳۲ـ۱۱ با سرعت کمتری پرتاب شده بودند، همان زمانی را برای تکمیل دایرهٔ کوچکتر لازم داشتند که الکترونهای سریع‌تر برای پیمودن دایرهٔ بزرگتر صرف می‌کردند. بسامد معرفی‌شده در معادلهٔ (۳۲ـ۱۲) را بسامد سیکلوترون می‌نامیم، زیرا ذرات در یک نوع شتابدهندهٔ ذرات به نام سیکلوترون با این بسامد می‌چرخند. این بسامد، مشخصهٔ ذرهٔ خاص است که در میدان مغناطیسی معین حرکت می‌کند، درست همان‌طوری که آونگ یا سیستم جرم‌ـفنر در حال نوسان، بسامد ویژهٔ خود را دارد.

سیکلوترون

سیکلوترون (شکل ۳۲ـ۱۲) وسیله‌ای است که باریکه‌هایی از ذرات باردار را شتاب می‌دهد، که می‌توان از آنها در آزمایشهای واکنش هسته‌ای استفاده کرد. شکل ۳۲ـ۱۳ نمودار طرح‌وار یک سیکلوترون را نشان می‌دهد. این دستگاه از دو قوطی فلزی توخالی D‌ـشکل به‌نام



شکل ۳۲ـ۱۲ یک شتابدهندهٔ سیکلوترون. آهنرباها در اتاقکهای بزرگ در بالا و پایین قرار دارند. باریکه به هنگام خروج از شتابدهنده قابل رؤیت است زیرا، مانند باریکهٔ الکترونها در شکل ۳۲ـ۱۱، بر اثر برخورد، مولکولهای هوا را یونیده می‌کند.



شکل ۳۲ـ۱۳ اجزای یک سیکلوترون، که چشمهٔ یون S و دی‌ها را نشان می‌دهد. آهنرباهای الکتریکی، میدان مغناطیسی عمودی یکنواخت را فراهم می‌آورند. ذره‌ها در داخل دی‌های توخالی، مارپیچی را به طرف خارج می‌پیمایند، و هر بار که از گاف بین دو دی می‌گذرند انرژی به‌دست می‌آورند.

دی تشکیل شده است. دی‌ها از مادهٔ رسانایی چون ورقه‌های مس ساخته می‌شوند که لبه‌های مستقیم آنها باز است. دی‌ها به نوسانگر الکتریکی متصل شده‌اند، که بین آنها اختلاف پتانسیل نوسانی برقرار می‌کند. یک میدان مغناطیسی بر صفحهٔ دی‌ها عمود است. در مرکز این دستگاه چشمه‌ای قرار دارد که یونهایی را که می‌خواهیم شتاب دهیم گسیل می‌دارد.

وقتی یونها در گاف بین دو دی قرار می‌گیرند، اختلاف پتانسیل بین دی‌ها به آنها شتاب می‌دهد. سپس وارد یکی از دی‌ها می‌شوند، که در آنجا تحت تأثیر هیچ میدان الکتریکی قرار ندارند (میدان الکتریکی در داخل یک رسانا صفر است) ولی میدان مغناطیسی (که دی‌های مسی مانع از عبور آن نمی‌شود و سپری برای آن نیست) مسیر ذره‌ها را خم می‌کند و به‌صورت نیمدایره در می‌آورد. پس از آن وقتی ذرات وارد گاف بین دی‌ها شوند، نوسانگر جهت میدان الکتریکی را عوض کرده است و ذره‌ها در عبور از گاف دوباره شتاب می‌گیرند. چون یونها با سرعت بیشتری حرکت می‌کنند، همان‌طور که معادلهٔ (۳۲ـ۱۰) ایجاب می‌کند، مسیری با شعاع بزرگتری را می‌پیمایند. اما، بنابر معادلهٔ (۳۲ـ۱۲) برای پیمودن این نیمدایرهٔ بزرگتر درست همان مدت زمان لازم است؛ این رفتار ویژگی بسیار مهم عملکرد سیکلوترون است. بسامد نوسانگر الکتریکی باید طوری تنظیم شود که برابر بسامد سیکلوترون باشد (که توسط میدان مغناطیسی و بار و جرم ذره‌ای که باید شتاب داده شود و بنابر معادلهٔ (۳۲ـ۱۲) مشخص می‌شود)؛ این تساوی بسامدها را شرط تشدید می‌نامیم. اگر شرط تشدید وجود داشته باشد، ذره‌ها مرتباً در گاف بین دی‌ها شتاب می‌گیرند و روی مسیرهای نیمدایره‌ای با "سرعت ثابت" (خلاص) حرکت می‌کنند و در هر بارگذر کمی انرژی به‌دست می‌آورند، تا زمانی که از شتابدهنده خارج شوند.

سرعت نهایی ذره‌ها را شعاع R مشخص می‌کند که در آن، ذره‌ها

شتابدهنده را ترک می‌کنند. از معادلهٔ (۳۲ـ۱۰) داریم

$$v = \frac{|q|BR}{m} \qquad (۳۲ـ۱۳)$$

و از اینجا انرژی جنبشی (نانسبیتی) متناظر با این سرعت برای ذره‌ها برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{q^{۲}B^{۲}R^{۲}}{۲m} \qquad (۳۲ـ۱۴)$$

سیکلوترونهای معمولی، باریکه‌های پروتونی با بیشینه انرژیی در محدودهٔ ۱۰ MeV تولید می‌کنند. برای یک جرم مشخص، یونهای با بارهای الکتریکی بیشتر، با انرژیهایی از شتابدهنده خارج می‌شوند که با مربع بار الکتریکی افزایش می‌یابد.

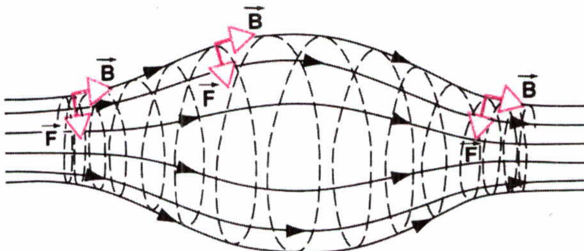
به هر حال شگفت‌آور است که انرژی در معادلهٔ (۳۲ـ۱۴) به میدان مغناطیسی وابسته است، که به ذره‌ها شتاب نمی‌دهد، ولی به اختلاف پتانسیل الکتریکی که عامل شتابدهی است بستگی ندارد. هرچه اختلاف پتانسیل بیشتر باشد، در هر چرخه "لگد" محکم‌تری به ذرات می‌زند، شعاع سریع‌تر افزایش پیدا می‌کند و ذره‌ها قبل از ترک شتابدهنده تعداد دور کمتری در آن می‌چرخند. اگر اختلاف پتانسیل کوچکتر باشد، ذره‌ها تعداد دور بیشتری در داخل شتابدهنده می‌چرخند و در هر دور "لگد" آرام‌تری را متحمل می‌شوند. به این ترتیب انرژی ذره‌ها مستقل از اختلاف پتانسیل است.

حد انرژیی که ذره‌ها می‌توانند در سیکلوترون شتاب گیرند محدود است، زیرا وقتی ذره‌ها به سرعتهای بالا می‌رسند دیگر عبارتهای مربوط به تکانه ($p = mv$ در معادلهٔ ۳۲ـ۱۰) و انرژی ($K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$ در معادلهٔ ۳۲ـ۱۴) معتبر نیستند، و باید از عبارتهای متناظر نسبیتی، داده‌شده در فصل ۲۰، استفاده کنیم. همین که ذره‌ها با سرعتهایی که نزدیک به سرعت نور است شروع به حرکت می‌کنند، زمان بیشتری را برای طی مسیر دایره‌ای سپری می‌کنند و در نتیجه شرط تشدید از بین می‌رود. برحسب واژگان عملی و تجربی، انرژی ۴۰ MeV بیشترین انرژی جنبشی است که می‌توان به‌وسیلهٔ یک سیکلوترون متعارف به پروتون داد، و این چنین سیکلوترونی شعاعی در حدود ۱ m خواهد داشت.

برای دستیابی به انرژیهای بالاتری که این روزها در پژوهشهای فیزیک ذره‌ها مورد نیاز است، از شتابدهنده‌ای با طراحی متفاوت، به‌نام سینکروترون، استفاده می‌شود. با آنکه سینکروترون بر شرط تشدید سیکلوترون متکی نیست، از میدانهای مغناطیسی برای حفظ ذره‌ها در حرکت روی مسیر دایره‌ای که در آن می‌توان مرتباً به‌وسیلهٔ یک میدان الکتریکی ذره‌ها را شتاب داد استفاده می‌کند. در سینکروترون، وقتی که دسته‌ای از ذره‌ها به‌صورت رگبار، در مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت شتاب داده می‌شوند، هم بسامد پتانسیل الکتریکی و هم شدت میدان مغناطیسی تغییر می‌کند. برای دستیابی به انرژی ۱ TeV (= ۱۰۰۰ GeV = ۱۰^۶ MeV)، مثلاً در مورد آزمایشگاه شتابدهندهٔ ملی فرمی در نزدیکی شیکاگو، مسیری به شعاع ۱ km مورد نیاز است. در این آزمایشگاه پروتونها در مدت زمانی در حدود ۱۰ ثانیه در حدود ۴۰۰۰۰۰ بارگرد دایره‌ای می‌گردند که پیرامون آن ۶٫۳ km است.

آینهٔ مغناطیسی

از میدان مغناطیسی غیریکنواخت می‌توان برای به‌دام انداختن یک ذرهٔ باردار در ناحیه‌ای از فضا استفاده کرد. در شکل ۳۲ـ۱۴ نمودار طرح‌وار از طرزکار یک چنین آینهٔ مغناطیسی را نشان داده‌ایم. ذره‌های باردار تمایل دارند در دایره‌هایی حول امتداد میدان حرکت کنند. فرض کنید، همان‌گونه که در شکل ۳۲ـ۱۴ نشان داده شده است، این ذره یک حرکت جانبی به سمت راست نیز داشته باشد. در نتیجه، مسیر حرکت ذره به‌صورت یک مارپیچ، مانند فنر پیچه‌ای، در می‌آید. میدان در حوالی دو سر این "بطری مغناطیسی" افزایش می‌یابد و نیروی وارد بر ذره دارای مؤلفهٔ کوچکی در جهت مرکز این ناحیه است، که باعث می‌شود جهت حرکت ذره‌ها وارون شود و این ذره‌ها یک حرکت مارپیچی در جهت عکس داشته باشند، تا سرانجام از سر دیگر آینه بازتابیده شوند. ذرات به حرکت رفت‌وبرگشت در این ناحیه ادامه می‌دهند و در فضای بین دو ناحیه با میدان قوی محصور می‌شوند. این آرایش را برای محصورکردن گازهای یونیدهٔ داغ (که پلاسما نامیده می‌شوند) به‌کار می‌برند. پژوهشگران از این گازهای داغ در پژوهش دربارهٔ همجوشی گرماهسته‌ای کنترل‌شده استفاده می‌کنند.



شکل ۳۲ـ۱۴ یک ذرهٔ باردار در یک میدان مغناطیسی نایکنواخت دارای حرکتی مارپیچی است. میدان در دو انتهای راست و چپ ناحیه قوی‌تر از قسمت مرکزی است. ذره‌ها را می‌توان طوری به‌دام انداخت که بین دو ناحیه با میدان شدید در دو انتها دارای حرکت رفت‌وبرگشت مارپیچی شوند. توجه کنید که بردارهای نیروی مغناطیسی در هر دو سر این "بطری مغناطیسی" دارای مؤلفه‌هایی به طرف مرکزند؛ این مؤلفه‌های نیرو هستند که ذرات را محصور می‌کنند.

R شتابدهنده را ترک می‌کنند. بنابر معادلهٔ (۳۲ـ۱۴) داریم

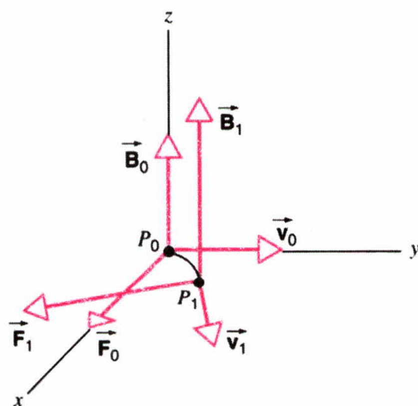
$$K = \frac{q^۲B^۲R^۲}{۲m} = \frac{(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})^۲(۱٫۵\,\mathrm{T})^۲(۰٫۷۵\,\mathrm{m})^۲}{۲(۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg})}$$

$$= ۴٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{J} = ۳۰\ \mathrm{MeV}$$

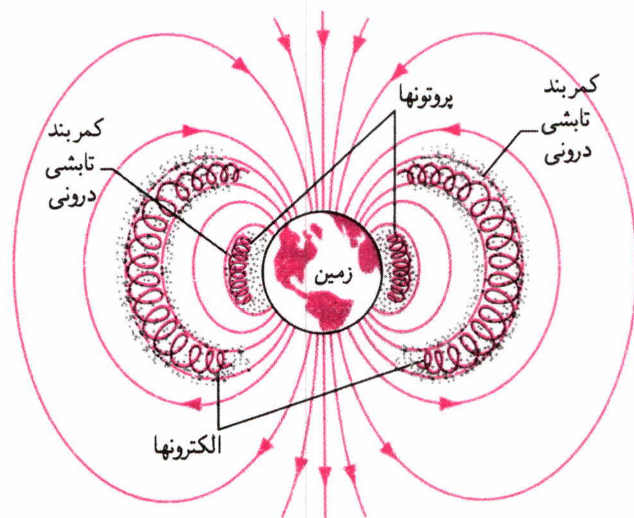
برد دوترونهایی با این انرژی در هوا، آن‌طورکه در شکل ۳۲ـ۱۲ نشان داده شده است، در حدود چند متر است.

حرکت در میدانهای نایکنواخت (اختیاری)

مسیر ذرهٔ باردار در میدان مغناطیسی نایکنواخت دایره‌ای نیست و محاسبهٔ مسیر (مانند مسیر نشان داده‌شده در شکل ۳۲ـ۱۴) ممکن است مسئلهٔ بسیار دشواری باشد. معمولاً هیچ جواب تحلیلی برای این مسئله وجود ندارد، و مسیر باید به‌صورت عددی محاسبه شود، مشابه محاسبهٔ مسیر پرتابه‌ای که برای آن مقاومت هوا در نظر گرفته شده است (فصل ۴). در شکل ۳۲ـ۱۶ نشان داده‌ایم که چرا مسیر حرکت در میدان نایکنواخت دایره نیست. ذره، در آغاز، در نقطهٔ $P_۰$ قرار دارد، که در آنجا سرعتش $\vec{\mathbf{v}}_۰$ در امتداد محور y است. فرض می‌کنیم که میدان در امتداد محور z باشد و شدت آن با افزایش x و y افزوده شود. در آغاز شدت میدان برابر با $\vec{\mathbf{B}}_۰$ است و سبب می‌شود که نیروی $\vec{\mathbf{F}}_۰$ در امتداد محور x بر ذره وارد شود. این نیرو سبب می‌شود که سرعت ذره در امتداد محور x نموی داشته باشد، و در لحظهٔ بعد ذره در نقطهٔ $P_۱$ است که در اینجا با سرعت $\vec{\mathbf{v}}_۱$ حرکت می‌کند. در این نقطه شدت میدان برابر با $\vec{\mathbf{B}}_۱$ است که از نظر مقداری بزرگتر و



شکل ۳۲ـ۱۶ در میدان مغناطیسی نایکنواخت، مقدار نیرو تغییر می‌کند (در اینجا وقتی ذره از $P_۰$ به $P_۱$ می‌رود نیرو تغییر می‌کند) و در نتیجه مسیری که ذرهٔ باردار می‌پیماید دیگر دایره نیست.



شکل ۳۲ـ۱۵ میدان مغناطیسی زمین، که الکترونها و پروتونهای به‌دام‌افتاده در کمربندهای تابشی وان آلن را نشان می‌دهند.

پدیدهٔ مشابهی، همان‌گونه که در شکل ۳۲ـ۱۵ نشان داده شده است، در میدان مغناطیسی زمین رخ می‌دهد. الکترونها و پروتونها در ناحیه‌های متفاوتی از میدان مغناطیسی زمین به‌دام افتاده‌اند و بین ناحیه‌های با میدان شدید مغناطیسی در حوالی دو قطب زمین در زمانی در حدود چند ثانیه به‌صورت مارپیچی پس‌وپیش می‌شوند. این ذره‌های سریع مسئول ایجاد کمربندهای تابشی موسوم به وان آلن هستند که زمین را احاطه می‌کنند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۲ یک سیکلوترون طوری طراحی شده است که در آن شعاع دی‌ها $R = ۷۵\,\mathrm{cm}$ است و آهنرباهای آن می‌توانند میدانی به شدت $۱٫۵\,\mathrm{T}$ تولید کنند. (الف) اگر بخواهیم با این سیکلوترون دوترون را شتاب بدهیم بسامد نوسانگر الکتریکی را باید چقدر اختیار کنیم؟ (ب) بیشینهٔ انرژی دوترونها چقدر می‌شود؟

حل. (الف) دوترون هستهٔ هیدروژن سنگین است، که بار آن $q = +e$ و جرم آن $۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg}$، در حدود دو برابر جرم هیدروژن معمولی است. با استفاده از معادلهٔ (۳۲ـ۱۲) می‌توانیم بسامد را معین کنیم:

$$f = \frac{|q|B}{۲\pi m} = \frac{(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})(۱٫۵\,\mathrm{T})}{۲\pi(۳٫۳۴ \times ۱۰^{-۲۷}\mathrm{kg})}$$

$$= ۱٫۱ \times ۱۰^{۷}\mathrm{Hz} = ۱۱\,\mathrm{MHz}$$

(ب) بیشینهٔ انرژی مربوط به دوترونهایی است که در شعاع بیشینهٔ

نیروی وارد بر ذره در این نقطه، یعنی $\vec{\mathbf{F}}_۱$، نیز بزرگتر است. برای حرکت دایره‌ای، لازم است که نیرو در همهٔ مکانها مقدار یکسانی داشته باشد. در نتیجه، واضح است که مسیر حرکت ذره، در اینجا دایره نیست.

اگر بدانیم که بزرگی (و احتمالاً جهت) میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در تمام نقطه‌هایی که ممکن است ذره در آنجا یافت شود، چگونه تغییر می‌کند، می‌توانیم مسئله را به‌صورت عددی حل کنیم. این کار را با نوشتن عبارت کامل نیرو به‌صورت حاصلضرب برداری (یا ضربدری) آغاز می‌کنیم (پیوست ح را ببینید).

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = q(v_y B_z - v_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + q(v_z B_x - v_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + q(v_x B_y - v_y B_x)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱۵\text{-}۳۲)$$

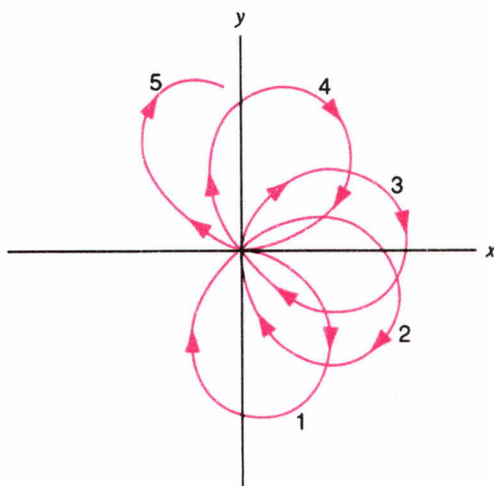
با استفاده از قانون دوم نیوتون، $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m(a_x\hat{\mathbf{i}}+a_y\hat{\mathbf{j}}+a_z\hat{\mathbf{k}})$، می‌توانیم مؤلفه‌های برداری متناظر را با هم برابر قرار دهیم تا معادله‌های حرکت را به‌دست آوریم، که می‌توان آنها را برای یافتن مسیر حل کرد. مثلاً، برای مورد نشان داده‌شده در شکل ۳۲ـ۱۶، $\vec{\mathbf{B}}$ فقط دارای مؤلفهٔ z است ($B_x = B_y = ۰$). در این حالت معادله‌های حرکت به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned} F_{Bx} &= q(v_y B_z - v_z B_y) = qv_y B_z = ma_x \\ &= m\, dv_x/dt \\ F_{By} &= q(v_z B_x - v_x B_z) = -qv_x B_z = ma_y \\ &= m\, dv_y/dt \\ F_{Bz} &= q(v_x B_y - v_y B_x) = ۰ = ma_z \\ &= m\, dv_z/dt \end{aligned} \qquad (۱۶\text{-}۳۲)$$

(اگر در آغاز داشته باشیم $v_z = ۰$، در آن صورت برای تمام زمانهای دیگر نیز $v_z = ۰$، چون $a_z = ۰$.) این عبارتها را باید در هر نقطه‌ای از مسیر محاسبه کنیم، زیرا مقدارهای v_x، v_y و B_z از یک نقطه تا نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند. معمولاً برای به‌دست‌آوردن پاسخ عددی برای مسیر از کامپیوتر استفاده می‌شود. مثلاً، فرض کنید که میدان مغناطیسی به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$B_z = B_۰\left(۱ + \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{R}\right) \qquad (۱۷\text{-}۳۲)$$

که در اینجا $R = mv/qB_۰$، شعاع مسیر در میدان یکنواخت با شدت میدان $B_۰$ است. این میدان با افزایش فاصلهٔ ذره از مبدأ مختصات افزایش می‌یابد. حرکت حاصل، که می‌توان آن را به‌صورت عددی به‌دست آورد (مسئلهٔ کامپیوتری شمارهٔ ۱ را ببینید) طرح گلوار ترسیم‌شده در شکل ۳۲ـ۱۷ را ارائه می‌دهد.

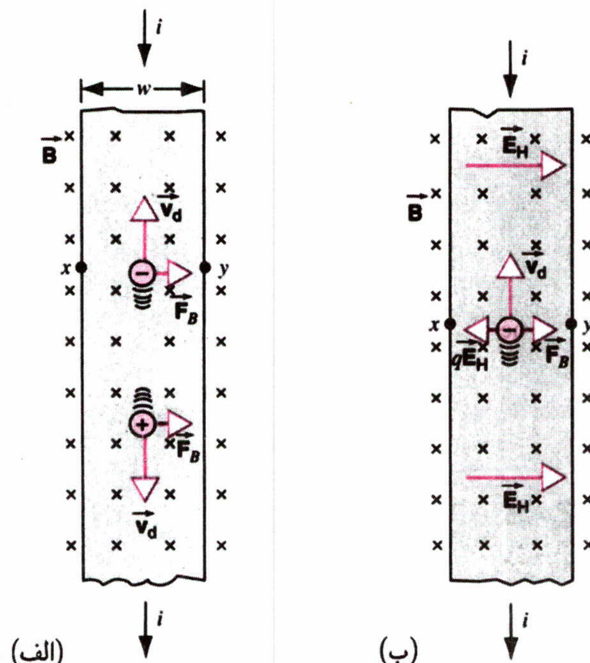


شکل ۳۲ـ۱۷ مسیر ذره‌ای در صفحهٔ xy که در آغاز در مبدأ مختصات قرار دارد و در امتداد محور x حرکت می‌کند و تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار دارد که با معادلهٔ (۳۲ـ۱۷) مشخص شده است. حلقه‌ها به‌ترتیبی که توسط ذره پیموده می‌شوند شماره‌گذاری شده‌اند.

۳۲ـ۴ اثر هال

تا به اینجا چندین مثال در ارتباط با نیروی منحرف‌کنندهٔ جانبی را که توسط میدان مغناطیسی به ذرات باردار وارد می‌شود مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این مثالها فقط ذرات منفرد یا باریکه‌هایی از ذرات را در نظر گرفتیم که در صورت نبود میدان مغناطیسی آزادانه حرکت می‌کردند. در سال ۱۸۷۹، ادوین هال نشان داد که الکترونهای رسانش متحرک در رسانا نیز می‌توانند توسط میدان مغناطیسی منحرف شوند. اثر هال روشی را فراهم می‌آورد که به‌وسیلهٔ آن می‌توان هم علامت و هم چگالی حاملهای بار را معین کرد.

نواری تخت از ماده‌ای به عرض w را، مطابق شکل ۳۲ـ۱۸، در نظر بگیرید که حامل جریان i است. جهت جریان i همان جهت قراردادی، یعنی برخلاف جهت حرکت الکترونهاست. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$، مثلاً با قرار دادن نوار بین قطبهای آهنربایی الکتریکی، عمود بر صفحهٔ نوار برقرار شده است. حاملهای بار الکتریکی (مثلاً، الکترونها) تحت تأثیر نیروی مغناطیسی منحرف‌کنندهٔ $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ قرار می‌گیرند و همان‌طور که در شکل نشان داده‌ایم به طرف راست نوار حرکت می‌کنند. توجه کنید که بارهای مثبت که در جهت جریان i حرکت می‌کنند تحت تأثیر نیروی منحرف‌کننده‌ای در همان جهت قرار می‌گیرند.



شکل ۳۲ـ۱۸ نوار مسی حامل جریان i در یک میدان مغناطیسی قرار دارد. (الف) وضعیت نوار رسانا درست پس از آنکه میدان مغناطیسی برقرار شده است، و (ب) وضعیت نوار رسانا پس از رسیدن به حالت تعادل، که به سرعت حاصل می‌شود. توجه کنید که بارهای منفی در طرف راست نوار انباشته می‌شوند، و بار مثبت جبران‌نشده‌ای در سمت چپ نوار برجای می‌گذارند. نقطهٔ x در پتانسیل بالاتری از نقطهٔ y است.

تراکم بار الکتریکی در طرف راست نوار (و کمبود متناظر بار، با همان علامت در طرف دیگر نوار)، که اثر هال است، مطابق شکل ۳۲ـ۱۸(ب)، میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}}$ در نوار به‌وجود می‌آورد. هم‌ارز با این میدان الکتریکی، بین دو طرف نوار اختلاف پتانسیلی ایجاد می‌شود $\Delta V_{\mathrm{H}} = E_{\mathrm{H}}W$، که به آن اختلاف پتانسیل هال (یا ولتاژ هال) می‌گوییم. اختلاف پتانسیل ΔV_{H} را می‌توان با اتصال سیمهای ولت‌سنج به نقطه‌های x و y در شکل ۳۲ـ۱۸ اندازه گرفت. همان‌طور که در زیر نشان خواهیم داد، علامت ΔV_{H} علامت حاملهای بار الکتریکی و اندازهٔ ΔV_{H} چگالی آنها (تعداد حاملها به‌ازای واحد حجم) را مشخص می‌کند. اگر حاملهای بار، مثلاً الکترونها باشند مقداری بار منفی اضافی در طرف راست نوار انباشته می‌شود و پتانسیل نقطهٔ Y کمتر از پتانسیل نقطهٔ x خواهد شد. ممکن است این نتیجه‌گیری در مورد فلزات واضح به‌نظر برسد؛ گرچه، باید توجه داشت که کار هال تقریباً ۲۰ سال قبل از کشف الکترون توسط تامسون انجام شده است و در آن زمان سرشت رسانش الکتریکی در فلزات به‌هیچ‌وجه روشن نبود.

فرض کنید رسانندگی ماده، به‌واسطهٔ وجود حاملهای بار با علامت مشخص (مثبت یا منفی) باشد که با سرعت سوق $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$ حرکت می‌کنند. با حرکت حاملهای بار نیروی مغناطیسی در شکل ۳۲ـ۱۸ آنها را به طرف راست منحرف می‌کند. همین که بارها در طرف راست انباشته شدند، یک میدان الکتریکی تولید می‌کنند که در داخل رسانا وارد عمل می‌شود و با حرکت جانبی حاملهای بار بیشتر مخالفت می‌کند. در زمان اندکی، حالت تعادلی به‌وجود می‌آید. و ولتاژ هال به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد؛ در این حالت نیروی مغناطیسی جانبی $(\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} \times \vec{\mathbf{B}})$ با نیروی الکتریکی جانبی $(q\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}})$ متوازن می‌شود. به بیان برداری، در این شرایط نیروی لورنتس وارد بر حاملهای بار صفر می‌شود:

$$q\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}} + q\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad (۱۸\text{ـ}۳۲)$$

یا

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}} = -\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۱۹\text{ـ}۳۲)$$

چون بردارهای $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ برهم عمودند، معادلهٔ (۳۲ـ۱۹) را می‌توان برحسب اندازهٔ بردارها بازنویسی کرد، یعنی

$$E_{\mathrm{H}} = v_{\mathrm{d}}B \qquad (۲۰\text{ـ}۳۲)$$

از معادلهٔ (۲۹ـ۶) سرعت سوق را می‌توان به‌صورت $v_{\mathrm{d}} = j/ne$ نوشت، که در این رابطه j چگالی جریان در نوار و n چگالی حاملهای بار الکتریکی است. چگالی جریان j عبارت است از جریان i به‌ازای واحد سطح مقطع A نوار. اگر ضخامت نوار برابر با t باشد، سطح مقطع A را می‌توان به‌صورت wt نوشت. با جایگزین کردن میدان الکتریکی E_{H} با $\Delta V_{\mathrm{H}}/w$ می‌رسیم به

$$\frac{\Delta V_{\mathrm{H}}}{w} = v_{\mathrm{d}}B = \frac{j}{ne}B = \frac{i}{wtne}B$$

یا، از حل این معادله برای چگالی حاملهای بار داریم

$$n = \frac{iB}{et\Delta V_{\mathrm{H}}} \qquad (۲۱\text{ـ}۳۲)$$

از اندازه‌گیری اندازهٔ اختلاف پتانسیل هال، ΔV_{H}، می‌توانیم چگالی عددی حاملهای بار را مشخص کنیم. خلاصه‌ای از داده‌های مربوط به اثر هال را برای تعدادی از فلزها و نیمرساناها در جدول ۳۲ـ۲ نشان داده‌ایم. اثر هال، برای برخی از فلزهای تک‌والانسی (Na، K، Cu، Ag)، نشان می‌دهد که هر اتم تقریباً یک الکترون آزاد در اختیار فرایند رسانش می‌گذارد. برای سایر فلزها، تعداد الکترونهای آزاد به‌ازای هر اتم ممکن است بیشتر از یک (مانند Al) یا کمتر از یک (مانند Sb)

جدول ۳۲ـ۲ نتایج مربوط به اثر هال برای مواد انتخابی

ماده	$n(۱۰^{۲۸}/\mathrm{m}^۳)$	علامت ΔV_{H}	تعداد حاملهای بار به‌ازای هر اتم [الف]
Na	۲٫۵	−	۰٫۹۹
K	۱٫۵	−	۱٫۱
Cu	۱۱	−	۱٫۳
Ag	۷٫۴	−	۱٫۳
Al	۲۱	−	۳٫۵
Sb	۰٫۳۱	−	۰٫۰۹
Be	۲٫۶	+	۲٫۲
Zn	۱۹	+	۲٫۹
Si(خالص)	$۱٫۵ \times ۱۰^{-۱۲}$	−	۳×۱۰^{-۱۳}
Si (نمونهٔ نوع n)	$۱۰^{-۷}$	−	۲×۱۰^{-۸}

الف) تعداد حاملهای بار به‌ازای هر اتم براساس تعداد در واحد حجم و چگالی و جرم مولی ماده.

باشد، برای بعضی از فلزها (مثلاً Be، Zn) اختلاف پتانسیل هال نشان می‌دهد که حاملهای بار دارای علامت مثبت‌اند. در این صورت رسانش زیر نفوذ حفره‌ها، یعنی ترازهای انرژی اشغال‌نشده در نوار رسانش، است (فصل ۴۹ را ببینید). حفره‌ها متناظر با جای خالی الکترونها هستند و بنابراین رفتار آنها مانند حاملهای بار مثبت متحرک در ماده است. برای برخی از مواد، به‌ویژه نیمرساناها، ممکن است هم الکترونها و هم حفره‌ها سهم قابل ملاحظه‌ای در رسانندگی الکتریکی داشته باشند و تفسیر سادهٔ اثر هال برحسب رسانش آزاد توسط یک نوع حامل بار کافی نیست. در این مورد باید از محاسبه‌های مفصل‌تر مبتنی بر مکانیک کوانتومی استفاده کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۳ یک نوار مسی به ضخامت $۱۵۰\,\mu\mathrm{m}$ در یک میدان مغناطیسی به شدت $B = ۰٫۶۵\,\mathrm{T}$ عمود بر صفحهٔ نوار قرار دارد و جریان $i = ۲۳\mathrm{A}$ از نوار می‌گذرد. در عرض نوار چه مقدار اختلاف پتانسیل هال، ΔV_{H}، به‌وجود می‌آید؟ فرض کنید که به‌ازای هر اتم فقط یک حامل بار داشته باشیم.

حل. در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹ـ۳، تعداد حاملهای بار الکتریکی موجود در واحد حجم مس را با این فرض که هر اتم یک الکترون در اختیار رسانش می‌گذارد، محاسبه کردیم و دریافتیم که

$$n = ۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸} \quad \text{الکترون بر متر مکعب}$$

و در نتیجه از معادلهٔ (۳۲ـ۲۱) داریم

$$\Delta V_{\mathrm{H}} = \frac{iB}{net}$$

$$= \frac{(۲۳\,\mathrm{A})(۰٫۶۵\,\mathrm{T})}{(۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸}\mathrm{m}^{-۳})(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})(۱۵۰ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{m})}$$

$$= ۷٫۳ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{V} = ۷٫۳\mu\mathrm{V}$$

این اختلاف پتانسیل، با وجود کوچکی، قابل اندازه‌گیری است.

اثر هال کوانتیده* (اختیاری)

معادلهٔ (۳۲ـ۲۱) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{\Delta V_{\mathrm{H}}}{i} = \frac{۱}{etn}B \qquad (۳۲\text{ـ}۲۲)$$

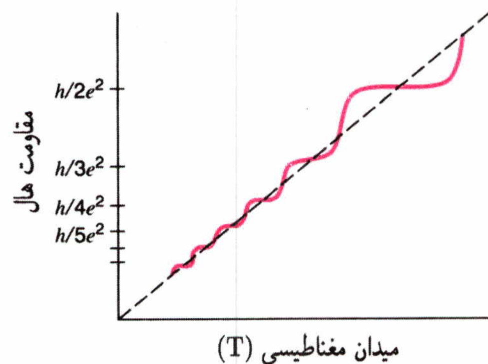
کمیت طرف چپ معادله دارای بُعد مقاومت است (ولتاژ تقسیم بر جریان)، گرچه این کمیت به مفهوم متعارف مقاومت نیست. این کمیت را معمولاً مقاومت هال می‌نامند. با اندازه‌گیری ولتاژ هال، ΔV_{H}، در ماده‌ای که حامل جریان i است می‌توان مقاومت هال را تعیین کرد.

طبق معادلهٔ (۳۲ـ۲۲)، انتظار می‌رود مقاومت هال برای یک مادهٔ معین (که در آن n و t ثابت‌اند)، با افزایش میدان مغناطیسی B به‌صورت خطی افزایش یابد. در این صورت نمودار تغییرات مقاومت هال برحسب میدان B باید خط راست باشد.

در آزمایشهایی که در سال ۱۹۸۰ انجام شد، فیزیکدان آلمانی کلاؤس فون کلیتسینگ کشف کرد که، در میدانهای مغناطیسی شدید و دماهای کم (در حدود ۱ K) مقاومت هال با میدان به‌صورت خطی افزایش نمی‌یابد؛ بلکه مطابق شکل ۳۲ـ۱۹ نمودار تغییرات دارای یک سری "گامهای پله‌ای" است. این اثر به اثر هال کوانتیده شهرت یافت و فون کلیتسینگ به‌خاطر این کشف در سال ۱۹۸۵ مفتخر به دریافت جایزهٔ نوبل در رشتهٔ فیزیک شد.

در توضیح این اثر مسیرهای دایره‌ای دخیل‌اند که میدان مغناطیسی، الکترونها را وادار به چرخش در آنها می‌کند. مکانیک کوانتومی مانع همپوشانی مدارهای الکترونهای اتمهای همجوار می‌شود. با افزایش

* نگاه کنید به مقالهٔ "اثر هال کوانتیده" نوشتهٔ برتراند هالپرین. مجله *Scientific American* آوریل ۱۹۸۶ صفحهٔ ۵۲.



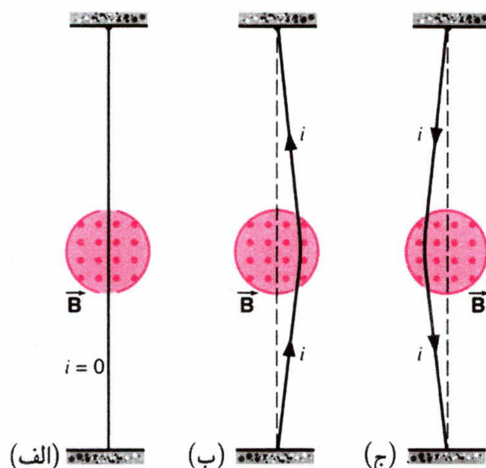
شکل ۳۲ـ۱۹ اثر هال کوانتیده. خط‌چین در این نمودار رفتار کلاسیک مورد انتظار را نشان می‌دهد. پلکانها نمایشگر رفتار کوانتومی هستند.

میدان، شعاع مداری کاهش می‌یابد، که باعث می‌شود مدارهای بیشتری در کنار یکدیگر در یک طرف ماده متراکم شوند. چون حرکت مداری الکترونها کوانتیده است (یعنی فقط مدارهای معینی مجازند)، تغییر حرکت مداری به‌طور ناگهانی صورت می‌گیرد، که متناظر با پله‌های شکل ۳۲ـ۱۹ است. یکای طبیعی مقاومت متناظر با حرکت مداری $h/e^۲$ است، که در این رابطه h ثابت پلانک است و پله‌های شکل ۳۲ـ۱۹ در مقاومتهای هال $h/۲e^۲$، $h/۳e^۲$، $h/۴e^۲$ و مانند آن پدید می‌آیند.

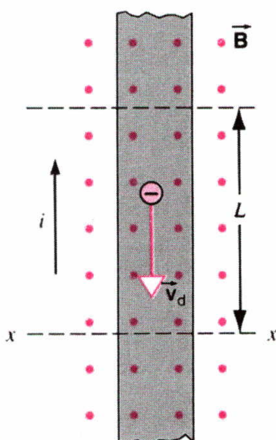
مقاومت هال کوانتیده $h/e^۲$، که اکنون به نام ثابت فون کلیتسینگ نامیده می‌شود، برابر $۲۵۸۱۲٫۸۰۷۵۷۲\Omega$ است و با دقتی بیشتر از ۱ جزء در $۱۰^۸$ شناخته شده است، در نتیجه اثر هال کوانتیده استاندارد جدیدی را برای مقاومت فراهم آورده است. این استاندارد، که می‌توان آن را دقیقاً در آزمایشگاههای سراسر جهان تکرار کرد، در سال ۱۹۹۰ به‌عنوان نمایش جدید اهم پذیرفته شد.

۳۲ـ۵ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

جریان مجموعه‌ای از بارهای متحرک است. چون میدان مغناطیسی به بار متحرک نیروی جانبی وارد می‌کند، پس باید به سیم حامل جریان هم نیروی جانبی وارد کند. یعنی، نیروی جانبی به الکترونهای رسانش موجود در سیم وارد می‌کند، ولی چون الکترونها مجال گریز جانبی ندارند، در نتیجه نیرو باید به خود سیم انتقال پیدا کند. در شکل ۳۲ـ۲۰ سیمی را نشان داده‌ایم که از ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برقرار است عبور می‌کند. وقتی که سیم حامل جریانی نباشد (شکل ۳۲ـ۲۰(الف))، هیچ انحرافی در آن مشاهده نمی‌شود.



شکل ۳۲ـ۲۰ سیم انعطاف‌پذیری از بین قطبهای یک آهنربا عبور می‌کند. (الف) در سیم جریانی برقرار نیست. (ب) جریانی در سیم برقرار شده است. (ج) جهت جریان وارون شده است.



شکل ۳۲ـ۲۱ نمای درشت‌نمایی‌شده از قطعه‌ای به‌طول L از سیم شکل ۳۲ـ۲۰(ب). جهت جریان به طرف بالاست، که به معنای سوق الکترونها به طرف پایین است. یک میدان مغناطیسی از صفحهٔ شکل به سمت بالا برقرار است و در نتیجه سیم به طرف راست منحرف شده است.

وقتی سیم حامل جریان باشد، منحرف می‌شود (شکل ۳۲ـ۲۰(ب))؛ وقتی جهت جریان وارونه شود (شکل ۳۲ـ۲۰(ج)) جهت انحراف هم وارونه می‌شود. هرگاه جهت میدان $\vec{B}$ هم وارونه شود جهت انحراف وارونه می‌شود.

برای درک این اثر، تک‌تک بارهایی را که در سیم جریان دارند در نظر می‌گیریم (شکل ۳۲ـ۲۱). برای جریان در سیم، از مُدل الکترون آزاد (بخش ۲۹ـ۳) استفاده و فرض می‌کنیم که الکترونها با سرعت ثابتی که همان سرعت سوق $\vec{v}_d$ باشد، در سیم حرکت می‌کنند. جهت واقعی حرکت الکترونها برخلاف جهتی است که به‌عنوان جهت جریان i در سیم اختیار کرده‌ایم.

سیم از ناحیه‌ای می‌گذرد که در آن میدان یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ برقرار است. نیروی جانبی وارد بر هر الکترون (با بار $q = -e$)، به علت وجود میدان مغناطیسی عبارت است از $-e\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{d} \times \vec{\mathbf{B}}$. می‌خواهیم نیروی جانبی وارد بر قطعه سیمی به طول L را بررسی کنیم. بر هریک از الکترونهای موجود در این قطعه سیم نیروی یکسانی (چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت) وارد می‌آید، و بنابراین نیروی کل $\vec{\mathbf{F}}_B$ وارد بر قطعه سیم، N برابر نیرویی است که به هر کدام از الکترونها وارد می‌شود:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = -Ne\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{d} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۲۳\text{–}۳۲)$$

در این قطعه سیم چند الکترون وجود دارد؟ اگر n چگالی عددی (تعداد بر واحد حجم) الکترونها باشد، در این صورت تعداد کل الکترونهای موجود در این قطعه سیم، یعنی N، برابر است با nAL، که در اینجا A مساحت سطح مقطع سیم است. از جانشانی این عبارت در معادلهٔ (۳۲ـ۲۳) می‌رسیم به

$$\vec{\mathbf{F}}_B = -nALe\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{d} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۲۴\text{–}۳۲)$$

معادلهٔ (۶ـ۲۹) این امکان را فراهم می‌آورد که معادلهٔ (۳۲ـ۲۴) را برحسب جریان i بنویسیم. برای حفظ رابطهٔ برداری معادلهٔ (۳۲ـ۲۴)، بردار $\vec{\mathbf{L}}$ را چنان تعریف می‌کنیم که مقدارش برابر با طول قطعه‌سیم و جهت آن در جهت جریان (برخلاف جهت حرکت الکترونها) باشد. بردارهای $\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{d}$ و $\vec{\mathbf{L}}$ در خلاف جهت یکدیگرند و می‌توانیم رابطهٔ نرده‌ای $nALev_\mathrm{d} = iL$ را به‌صورت برداری

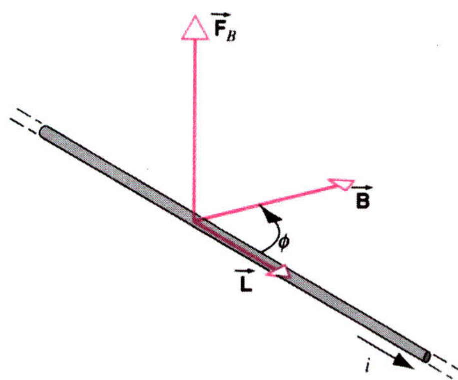
$$-nALe\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{d} = i\vec{\mathbf{L}} \qquad (۲۵\text{–}۳۲)$$

به‌کار ببریم. با جایگزین کردن معادلهٔ (۳۲ـ۲۵) در معادلهٔ (۳۲ـ۲۴)، عبارتی را برای نیروی وارد بر قطعه‌سیم به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۲۶\text{–}۳۲)$$

معادلهٔ (۳۲ـ۲۶) شبیه معادلهٔ (۳۲ـ۳) $(\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})$ است، به‌طوری که هر کدام از آنها را می‌توان معادلهٔ معرف میدان مغناطیسی در نظر گرفت. شکل ۳۲ـ۲۲ رابطهٔ برداری بین $\vec{\mathbf{F}}$، $\vec{\mathbf{L}}$، و $\vec{\mathbf{B}}$ را نشان می‌دهد، با مقایسه این شکل با شکل ۳۲ـ۵، متوجهٔ شباهتهای بین معادله‌های (۳۲ـ۲۶) و (۳۲ـ۳) می‌شویم.

اگر میدان در تمامی طول قطعه‌سیم یکنواخت باشد و جهت جریان با میدان زاویهٔ ϕ را بسازد، در آن صورت اندازهٔ نیروی مغناطیسی به



شکل ۳۲ـ۲۲ نیروی مغناطیسی وارد بر قطعه‌سیم مستقیمی به طول $\vec{\mathbf{L}}$ که با میدان مغناطیسی زاویهٔ ϕ می‌سازد. این شکل را به‌دقت با شکل ۳۲ـ۵ مقایسه کنید.

شرح زیر است (نتیجه را با معادلهٔ (۳۲ـ۲) مقایسه کنید).

$$F_B = iLB\sin\phi \qquad (۲۷\text{–}۳۲)$$

اگر $\vec{\mathbf{L}}$ به موازات میدان $\vec{\mathbf{B}}$ باشد، آنگاه نیرو برابر صفر است. اگر این قطعه‌سیم عمود بر جهت میدان باشد، اندازهٔ این نیرو را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$F_B = iLB \qquad (۲۸\text{–}۳۲)$$

اگر سیم مستقیم نبوده یا میدان یکنواخت نباشد، می‌توانیم سیم را به قطعات کوچکی به طول dL تقسیم کنیم؛ و قطعه‌ها را به‌قدر کافی کوتاه در نظر بگیریم که تقریباً مستقیم باشند و میدان در آن محدوده یکنواخت باشد. در این صورت نیروی وارد بر هر قطعه‌ای از سیم را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

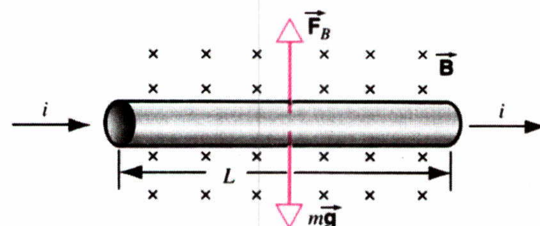
$$d\vec{\mathbf{F}}_B = i\, d\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۲۹\text{–}۳۲)$$

در این حالت می‌توانیم نیروی وارد به قطعه‌سیم به‌طول L را با انجام انتگرال‌گیری مناسب در کل طول به‌دست آوریم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۴ یک قطعه‌سیم مستقیم افقی مسی حامل جریانی به شدت $i = ۲۸\,\mathrm{A}$ است. اندازه و جهت میدان مغناطیسی لازم برای "معلق ساختن" سیم، یعنی نیروی مغناطیسی که نیروی وزن آن را خنثی کند، کدام است؟ چگالی طولی این سیم $۴۶٫۶\,\mathrm{g/m}$ است.

حل. در شکل ۳۲ـ۲۳ آرایش لازم برای این کار را نشان داده‌ایم. برای طول L این سیم داریم (معادلهٔ (۳۲ـ۲۸) را ببینید)

$$mg = iLB$$



شکل ۳۲ـ۲۳ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۴. قطعه‌سیمی را می‌توان در میدان مغناطیسی به حالت "تعلیق" در آورد. نیروی مغناطیسی بالاسوی $\vec{F}_B$ نیروی گرانشی پایین‌سو را خنثی می‌کند. در اینجا جهت میدان مغناطیسی به طرف داخل صفحهٔ شکل است.

یا

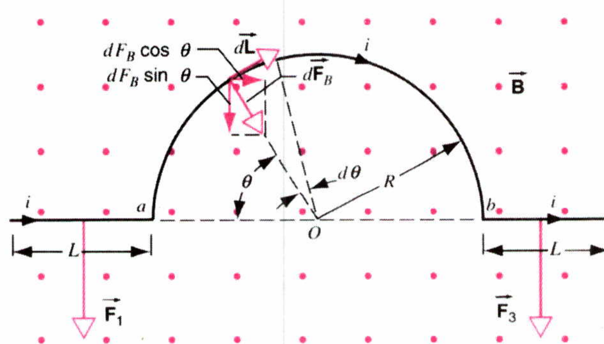
$$B = \frac{(m/L)g}{i} = \frac{(۴۶٫۶ \times ۱۰^{-۳}\text{kg/m})(۹٫۸\text{m/s}^۲)}{۲۸\,\text{A}}$$
$$= ۱٫۶ \times ۱۰^{-۲}\text{T} = ۱۶\,\text{mT}$$

که در حدود ۴۰۰ برابر شدت میدان مغناطیسی زمین است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۵ در شکل ۳۲ـ۲۴ قطعه‌سیمی را نشان داده‌ایم که در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار گرفته است. جهت میدان مغناطیسی به طرف خارج صفحهٔ شکل است. اگر از این قطعه‌سیم جریان i عبور کند، برایند نیروی مغناطیسی وارد بر آن چقدر است؟

حل. در اینجا سیم را متشکل از سه بخش در نظر می‌گیریم ــ دو بخش خط مستقیم (بخشهای ۱ و ۳) و یک بخش خط خمیده (بخش ۲). بنابر معادلهٔ (۳۲ـ۲۸) اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر هر یک از قسمتهای مستقیم سیم برابر است با

$$F_۱ = F_۳ = iLB$$



شکل ۳۲ـ۲۴ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۵. قطعه سیم حامل جریان i در میدان مغناطیسی قرار گرفته است. برایند نیروهای وارد بر این سیم پایین‌سو است.

که جهت این نیروها، که در شکل با پیکانها مشخص شده است، به طرف پایین است. اندازهٔ نیروی dF_B که بر کمانی به طول $dL = Rd\theta$ وارد می‌شود چنین است:

$$dF_B = iB\,ds = iB(R\,d\theta)$$

و جهت آن شعاعی و به طرف O، یعنی مرکز کمان است. توجه کنید که فقط مؤلفهٔ پایین‌سوی این نیروی جزئی یعنی $(dF_B\ \sin\theta)$ مؤثر است. مؤلفهٔ افقی یعنی $(dF_B \cos\theta)$ را، یک مؤلفهٔ نیروی افقی در جهت مخالف، که ناشی از قطعه‌سیم متقارنی در طرف دیگر کمان است، خنثی می‌کند.

نیروی کل وارد بر قسمت خمیدهٔ میانی به سمت پایین است و اندازهٔ آن از عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_۲ = \int_۰^{\pi} dF_B \sin\theta = \int_۰^{\pi} (iBR\,d\theta)\sin\ \theta$$
$$= iBR\int_۰^{\pi} \sin\theta\ d\theta = ۲iBR$$

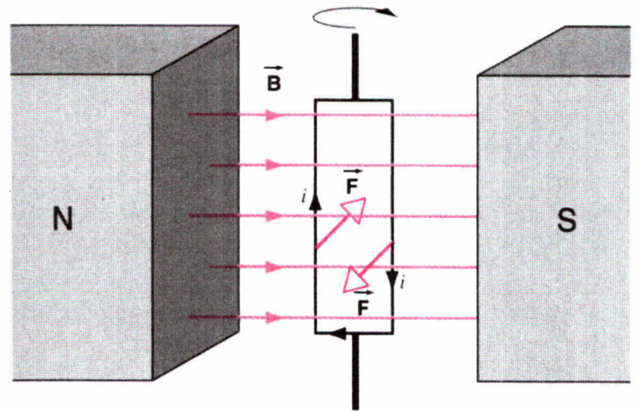
در نتیجه برایند نیروهای وارد بر کل قطعه‌سیم چنین است

$$F = F_۱ + F_۲ + F_۳ = iLB + ۲iBR + iLB$$
$$= iB(۲L + ۲R)$$

همین نیرو بر هر قطعه‌سیم دیگری که بخش میانی آن، یعنی نیمدایرهٔ شکل ۳۲ـ۲۴، را با هر شکل دیگری (از جمله خط مستقیم) جایگزین کنیم که دو نقطهٔ a و b را به‌هم متصل کند، نیز وارد می‌آید. آیا می‌توانید خود را متقاعد کنید که این نتیجه‌گیری درست است؟

۳۲ـ۶ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

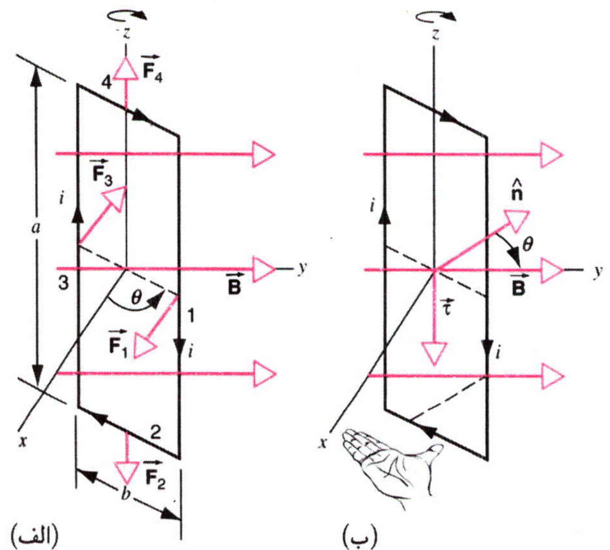
در موتور الکتریکی، حلقهٔ سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی قرار داده شده است. نمونهٔ ساده‌شده‌ای از این وسیله را در شکل ۳۲ـ۲۵ نشان داده‌ایم، که در آن یک حلقهٔ مستطیل‌شکل در میدان یکنواخت قرار گرفته است. حلقه می‌تواند آزادانه حول محور قائم بچرخد. وقتی حلقه چنان قرار گرفته است که میدان در صفحهٔ آن است، نیروهای مغناطیسی وارد بر اضلاع کوتاه مستطیل، بنابر معادلهٔ (۳۲ـ۲۶) صفر است، زیرا در این دو ضلع، $\vec{B}$ و $\vec{L}$ با هم موازی‌اند. در دو ضلع بلندتر مستطیل، نیروها برابرند ولی جهت آنها مخالف یکدیگر است، در نتیجه



شکل ۳۲ـ۲۵ نمودار ساده‌شده‌ای از موتور الکتریکی. حلقه حامل جریان الکتریکی است. نیروهای مغناطیسی وارد بر دو ضلع بلندتر حلقه گشتاوری ایجاد می‌کنند که حلقه را در جهت ساعتگرد می‌چرخاند؛ البته اگر از بالا به شکل نگاه کنیم.

برایند نیروی وارد بر حلقه صفر است. ولی، گشتاور نیروی خالصی وجود دارد که می‌خواهد حلقه را، وقتی از بالا نگاه می‌کنیم، حول محورش در جهت ساعتگرد بچرخاند. این مدل ساده نشان می‌دهد که چگونه ترکیب جریان الکتریکی و میدان مغناطیسی می‌تواند حرکت چرخشی موتور الکتریکی را به‌وجود آورد. ولت‌سنجها و آمپرسنجهای قیاسی براساس همین اصل کار می‌کنند.

در شکل ۳۲ـ۲۶، یک حلقهٔ حامل جریان i، به طول a و عرض b را نشان داده‌ایم. صفحهٔ حلقه با محور x زاویهٔ θ تشکیل می‌دهد.



شکل ۳۲ـ۲۶ یک حلقهٔ سیم مستطیل‌شکل در میدان مغناطیسی یکنواخت. (الف) نیروهای وارد بر چهار ضلع نشان داده شده‌اند. (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه تمایل دارد حلقه را بچرخاند به‌طوری که بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{n}}$، که از قاعدهٔ دست راست حاصل‌شده و عمود بر صفحهٔ حلقه است، بچرخد تا هم‌سوی با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ قرار گیرد.

برای سادگی، تنها خود حلقه را نشان داده‌ایم؛ سیمهایی که جریان را به حلقه وارد یا از آن خارج می‌کنند، در این شکل نشان نداده‌ایم. فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی یکنواخت و در امتداد محور y بوده و محور z در صفحهٔ حلقه قرار داشته باشد. هدف ما یافتن نیروی خالص و گشتاور نیروی خالص وارد بر حلقه است. برای این منظور نیروی وارد بر هر یک از ضلعهای مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

در این آرایش، اضلاع ۱ و ۳ عمود بر میدان مغناطیسی‌اند. یعنی، اگر بردار $\vec{\mathbf{L}}$ را به‌صورت برداری که در امتداد جریان قرار دارد تعریف کنیم، آنگاه بردار $\vec{\mathbf{L}}$ بر بردار $\vec{\mathbf{B}}$ عمود است. در مورد این دو ضلع، می‌توانیم از معادلهٔ (۳۲ـ۲۸) برای تعیین اندازهٔ نیروها استفاده کنیم:

$$F_1 = F_3 = iaB \qquad (۳۲\text{ـ}۳۰)$$

چون طول هر کدام از ضلعهای ۱ یا ۳ برابر با a است. این نیروها به موازات محور x شکل ۳۲ـ۲۶ قرار دارند؛ به این ترتیب که $\vec{\mathbf{F}}_1$ در جهت مثبت x و $\vec{\mathbf{F}}_3$ در جهت منفی x است.

زاویهٔ بین ضلع شمارهٔ ۲ سیم و میدان $\vec{\mathbf{B}}$ برابر $\theta + 90^\circ$ است. با استفاده از معادلهٔ (۳۲ـ۲۷)، نیروی وارد بر این ضلع چنین به‌دست می‌آید:

$$F_2 = ibB\ \sin(\theta + 90^\circ) = ibB\cos\theta \qquad (۳۲\text{ـ}۳۱)$$

که در راستای منفی z است. به صورتی مشابه، نیروی وارد بر ضلع ۴ چنین است

$$F_4 = ibB\ \sin(90^\circ - \theta) = ibB\cos\theta \qquad (۳۲\text{ـ}۳۲)$$

این نیرو در راستای z مثبت است.

برای اینکه نیروی کل وارد بر حلقه را معین کنیم، نیروهای وارد بر چهار ضلع را با هم جمع می‌کنیم، و در انجام این جمع اندازه و جهت را برای همهٔ نیروها در نظر می‌گیریم. چون نیروهای F_2 و F_4 از نظر اندازه با هم برابر و از لحاظ جهت مخالف یکدیگرند، حاصل‌جمع آنها صفر است؛ همین نتیجه در مورد نیروهای F_1 و F_3 نیز صادق است. نیروی خالص وارد بر حلقه صفر است، در نتیجه مرکز جرم آن تحت تأثیر نیروی مغناطیسی شتاب نمی‌گیرد. این نتیجه از آن‌رو حاصل می‌شود که میدان یکنواخت است؛ اگر میدان نایکنواخت بود، امکان داشت که مقدارهایش در موقعیت جفت ضلعهای ۱ و ۳ یا ۲ و ۴ متفاوت باشد، و نیز امکان داشت که نیروهای وارد بر آن ضلعها از نظر بزرگی برابر نباشند.

گرچه نیروی خالص وارد بر این حلقه صفر است، گشتاور نیروی خالص وارد بر آن غیرصفر است. نیروهای F_2 و F_4 هر دو در امتداد محور z قرار دارند و بنابراین خط اثرشان یکی است؛ و از آن‌رو در ایجاد گشتاور نیروی خالص مشارکت ندارند. ولی، نیروهای F_1 و F_3 دارای خط اثر مشترک نیستند؛ و همان‌طور که در شکل ۳۲ـ۲۶ مشاهده می‌شود، چنانچه از بالا نگاه کنیم این نیروها تمایل به چرخاندن حلقه در جهت ساعتگرد حول محور z دارند. نیروهای F_1 و F_3 نسبت به محور z، دارای بازوی گشتاور $(b/2)\sin\theta$ هستند و در نتیجه اندازهٔ گشتاور نیروی کل برابر است با

$$\tau = 2(iaB)(b/2)\sin\theta \qquad (۳۲\text{ـ}۳۳)$$

که در اینجا ضریب ۲ به این دلیل وارد می‌شود که هر دو نیرو سهم یکسانی در گشتاور نیرو دارند.

گشتاور نیرو وقتی بیشینهٔ مقدارش را دارد که حلقه چنان قرارگرفته باشد که میدان مغناطیسی در داخل صفحهٔ حلقه واقع باشد (یعنی به‌ازای $\theta = 90°$). وقتی میدان عمود بر صفحهٔ حلقه باشد (یعنی به‌ازای $\theta = 0°$) گشتاور نیروی کل وارد بر حلقه برابر صفر است.

اگر حلقه، پیچه‌ای متشکل از N دور باشد (شبیه آنچه ممکن است در موتور یا گالوانومتر یافت شود)، معادلهٔ (۳۲ـ۳۳) گشتاور نیروی وارد بر هر دور از سیم‌پیچ را به‌دست می‌دهد و گشتاور نیروی کل وارد بر پیچه برابر است با

$$\tau = NiAB\,\sin\,\theta \qquad (۳۲\text{ـ}۳۴)$$

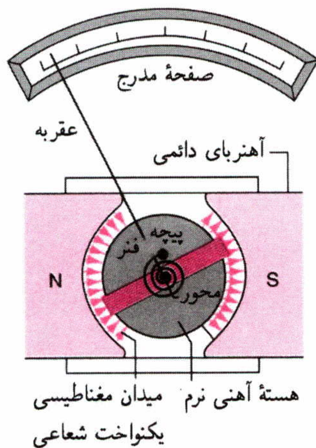
که در معادلهٔ اخیر مساحت حلقهٔ مستطیل‌شکل، یعنی A، را جایگزین حاصلضرب ab کرده‌ایم. می‌توان نشان داد که معادلهٔ (۳۲ـ۳۴) در حالت کلی، برای تمام حلقه‌های تخت با مساحت A برقرار است، اعم از اینکه مستطیل‌شکل باشند یا نباشند.

شکل ۳۲ـ۲۶(ب) روش دیگری برای تشریح گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان ارائه می‌دهد. با استفاده از قاعدهٔ دست راست، بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{n}}$ را عمود بر صفحهٔ حلقه تعریف می‌کنیم. جهت بردار یکهٔ $\hat{\mathbf{n}}$ را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که اگر انگشتان دست راستمان را در جهت جریان قرار دهیم، شست دست راستمان جهت بردار $\hat{\mathbf{n}}$ را مشخص می‌کند. گشتاور نیرو حلقه را چنان می‌چرخاند که $\hat{\mathbf{n}}$ هم‌راستای با $\vec{\mathbf{B}}$ قرار بگیرد. گشتاور نیرویی، که در شکل ۳۲ـ۲۶(ب) در جهت منفی z قرار دارد، در راستایی است که با حاصلضرب برداری $\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}}$ تعیین شده است. با جایگزین کردن

$$|\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}}| = B\sin\theta$$

می‌توانیم، معادلهٔ (۳۲ـ۳۴) را به‌صورت برداری زیر بنویسیم

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = NiA\,\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۲\text{ـ}۳۵)$$



شکل ۳۲ـ۲۷ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۶. قسمتهای اصلی تشکیل‌دهندهٔ گالوانومتر. بسته به مدار خارجی، این وسیله می‌تواند به‌صورت ولت‌سنج یا آمپرسنج عمل کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۶ ولت‌سنجها و آمپرسنجهای قیاسی، که در آنها کمیتهای مورد اندازه‌گیری با انحراف عقربهٔ روی یک صفحهٔ مدرج مشخص می‌شوند، برمبنای اندازه‌گیری گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی کار می‌کنند. شکل ۳۲ـ۲۷ قسمتهای اصلی گالوانومتر را نشان می‌دهد که هم آمپرسنجهای قیاسی و هم ولت‌سنجهای قیاسی بر آن اساس کار می‌کنند. طول پیچه ۲٫۱ cm و عرض آن ۱٫۲ cm است؛ پیچه شامل ۲۵۰ دور است و طوری نصب شده که می‌تواند حول محورش در میدان مغناطیسی یکنواخت شعاعی، با شدت $B = 0{,}23\,\text{T}$ بچرخد. فنری گشتاور نیروی متقابل را فراهم می‌آورد تا گشتاور نیروی مغناطیسی را خنثی کند، و باعث انحراف زاویه‌ای پایا به میزان ϕ می‌شود که با برقراری جریان پایای i در پیچه متناظر است. اگر جریان $100\,\mu\text{A}$ سبب ایجاد انحراف زاویه‌ای ۲۸° (مساوی ۰٫۴۹ rad) شود، ثابت پیچشی فنر، κ، چقدر است؟

حل. از برابر قرار دادن گشتاور نیروی مغناطیسی (معادلهٔ ۳۲ـ۳۴) با گشتاور نیروی بازگردانندهٔ فنر، یعنی $\kappa\phi$، نتیجه می‌گیریم

$$\tau = NiAB\sin\theta = \kappa\phi$$

که در آن، ϕ انحراف زاویه‌ای عقربه است و A (مساوی $۲٫۵۲ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲$) مساحت پیچه. توجه کنید که در اینجا عمود بر صفحهٔ پیچه (یعنی، عقربه) همواره بر میدان مغناطیسی (شعاعی) عمود است به‌طوری که برای همهٔ وضعیتهای عقربه $\theta = ۹۰^\circ$ است. معادلهٔ بالا را برای κ حل می‌کنیم و می‌رسیم به

$$\kappa = \frac{NiAB\sin\theta}{\phi}$$
$$= \frac{(۲۵۰)(۱۰۰\times۱۰^{-۶}\mathrm{A})(۲٫۵۲\times۱۰^{-۴}\mathrm{m}^۲)(۰٫۲۳\,\mathrm{T})(\sin ۹۰^\circ)}{۰٫۴۹\,\mathrm{rad}}$$
$$= ۳٫۰ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{N\cdot m/rad}$$

آمپرسنجها و ولت‌سنجهای جدید دیجیتال و از نوع قرائت مستقیم هستند و طوری کار می‌کنند که پیچهٔ متحرک در آنها نقشی ندارد.

چندگزینه‌ای

۳۲ـ۱ برهم‌کنشهای مغناطیسی و قطبهای مغناطیسی

۳۲ـ۲ نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک

۱. از سه بردار موجود در معادلهٔ $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$، کدام جفت بردار(ها) همواره بر همدیگر عمودند؟ (ممکن است که بیش از یک پاسخ صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) $\vec{\mathbf{F}}_B$ و $\vec{\mathbf{v}}$ (ب) $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ (ج) $\vec{\mathbf{B}}$ و $\vec{\mathbf{F}}_B$

(د) هیچ‌کدام (ه) هر سه جفت باید بر هم عمود باشند.

۲. بار منفی $q_۱$ با سرعت ثابت $\vec{\mathbf{v}}$ در ناحیه‌ای حرکت می‌کند که هم میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ و هم میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ وجود دارد.

(۱) از سه بردار $\vec{\mathbf{v}}$، $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$، کدام جفت(ها) باید بر هم عمود باشند؟ (ممکن است که بیش از یک پاسخ صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{v}}$ (ب) $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ (ج) $\vec{\mathbf{B}}$ و $\vec{\mathbf{E}}$ (د) هیچ‌کدام

(ه) هر سه جفت باید بر هم عمود باشند.

(۲) بار منفی با بار دیگر $q_۲$ جایگزین شده است که در آغاز با همان سرعت حرکت می‌کند. تحت چه شرایطی بار دوم نیز با سرعت ثابت حرکت خواهد کرد؟

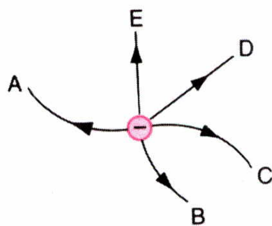
(الف) $q_۲$ باید یکسان با $q_۱$ باشد.

(ب) $q_۲$ باید منفی باشد، ولی می‌تواند هر مقداری را داشته باشد.

(ج) $q_۲$ می‌تواند مثبت باشد، ولی باید مقدارش برابر با $q_۱$ باشد.

(د) $q_۲$ می‌تواند هر باری باشد.

۳. الکترونی از حالت سکون در ناحیه‌ای از فضا رها شده است که در آنجا میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ به سمت بالای صفحه و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ در راستای عمود بر صفحه و به سمت خارج از صفحه وجود دارند. کدام‌یک از مسیرهای نشان داده‌شده در شکل ۳۲ـ۲۸ به بهترین وجه مسیر حرکت الکترون را پس از رهاشدن نمایش می‌دهد؟



شکل ۳۲ـ۲۸ پرسش چندگزینه‌ای ۳.

۴. کدام‌یک از خاصیتهای پروتون به هنگام حرکت آزادانه در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ ممکن است تغییر کند؟ (ممکن است که بیش از یک پاسخ صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) جرم (ب) اندازهٔ سرعت (ج) بردار سرعت

(د) تکانه (ه) انرژی جنبشی

۵. کدام‌یک از خاصیتهای پروتون به هنگام حرکت آزادانه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ ممکن است تغییر کند؟ (ممکن است بیش از یک پاسخ صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) جرم (ب) اندازهٔ سرعت (ج) بردار سرعت

(د) تکانه (ه) انرژی جنبشی

۶. کدام‌یک از خاصیتهای پروتون به‌هنگام حرکت آزادانه در میدان مغناطیسی نایکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ ممکن است تغییر کند؟ (ممکن است بیش از یک پاسخ صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) جرم (ب) اندازهٔ سرعت (ج) بردار سرعت

(د) تکانه (ه) انرژی جنبشی

۷. آیا میدان مغناطیسی ایستا می‌تواند روی یک ذرهٔ باردار کار مثبت انجام دهد؟

(الف) آری (ب) آری، ولی فقط اگر بار ذره مثبت باشد.

(ج) آری، ولی فقط اگر ذره دارای سرعت اولیه باشد. (د) خیر

۸. ناحیه‌ای از فضا دارای میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ به سمت پایین و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ به سمت شرق است. در اینجا

گرانش قابل چشم‌پوشی است. الکترونی با سرعت ثابت $\vec{v}_1$ در این دو میدان حرکت می‌کند.

(۱) الکترون در چه جهتی حرکت خواهد کرد؟ (ممکن است بیش از یک جواب صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) شمال (ب) جنوب (ج) بالا (د) پایین

(۲) الکترون دومی که در آغاز در همان جهت الکترون اول در حرکت است، ولی سرعتش اندکی کمتر است یعنی $v_2 < v_1$ به این ناحیه وارد می‌شود. جهت نیروی خالص وارد بر الکترون دوم کدام است؟

(الف) شمال (ب) جنوب (ج) بالا (د) پایین

۳۲ـ۳ بارهای چرخنده

۹. الکترونی با سرعت $v_0 \ll c$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در دایره‌ای به شعاع r_0 حرکت می‌کند. زمان لازم برای پیمایش یک دورکامل دایره برابر T_0 است. اکنون سرعت الکترون را دو برابر می‌کنیم و به $2v_0$ می‌رسانیم.

(۱) شعاع دایرهٔ چرخش الکترون به مقدار زیر تغییر می‌کند:

(الف) $4r_0$ (ب) $2r_0$ (ج) r_0 (د) $r_0/2$

(۲) زمان لازم برای اینکه الکترون یک دور کامل دایره را بپیماید به مقدار زیر تغییر می‌کند:

(الف) $4T_0$ (ب) $2T_0$ (ج) T_0 (د) $T_0/2$

۱۰. حرکت بار را در شکل ۳۲ـ۱۷ مورد توجه و دقت قرار دهید. میدان مغناطیسی را توصیف کنید.

(الف) میدان در نزدیکی مرکز قوی‌ترین موقعیت را دارد.

(ب) میدان در نزدیکی مرکز ضعیف‌ترین موقعیت را دارد.

(ج) برای حل این مسئله اطلاعات کافی در اختیار نداریم.

۳۲ـ۴ اثر هال

۱۱. میدان مغناطیسی شکل ۳۲ـ۲۹ به طرف داخل صفحهٔ کاغذ است. یک هواپیمای کوچک فلزی به طرف پایین صفحهٔ کاغذ حرکت می‌کند.

(۱) از نظر خلبان، کدام بال به هنگام حرکت دارای بار منفی می‌شود؟

(الف) بال سمت چپ (ب) بال سمت راست

(ج) هیچ‌کدام از بالها باردار نمی‌شود.

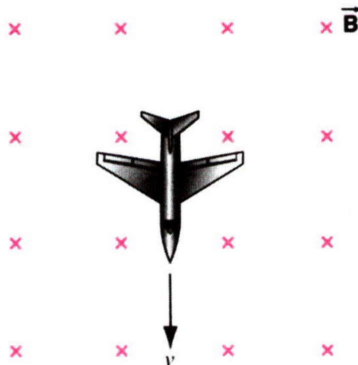
(د) پاسخ این مسئله بستگی دارد به اینکه علامت حاملهای بار در داخل هواپیما چه باشد.

(۲) اکنون هواپیما برمی‌گردد و به سمت بالای صفحهٔ کاغذ "پرواز" می‌کند. می‌توانید بگویید کدام بال دارای بار منفی می‌شود؟

(الف) بال سمت چپ (ب) بال سمت راست

(ج) هیچ‌کدام از بالها باردار نمی‌شود.

(د) پاسخ این مسئله بستگی دارد به اینکه علامت حاملهای بار در داخل هواپیما چه باشد.



شکل ۳۲ـ۲۹ پرسش چندگزینه‌ای ۱۱.

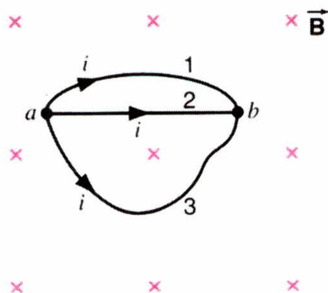
۳۲ـ۵ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

۱۲. در شکل ۳۲ـ۳۰ چند قطعه‌سیم را نشان داده‌ایم که حامل جریانهای مساوی از a به b هستند. این سیمها در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار گرفته‌اند که جهت آن به سمت داخل صفحهٔ شکل است. به کدام قطعه‌سیم بیشترین نیرو وارد می‌شود؟

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳

(د) تمام قطعه‌سیمها، نیروی خالص یکسانی را تحمل می‌کنند.

(هـ) پاسخ به جهت میدان مغناطیسی وابسته است.



شکل ۳۲ـ۳۰ پرسشهای چندگزینه‌ای ۱۲ و ۱۳.

۱۳. پرسش چندگزینه‌ای ۱۲ را تکرار کنید، فقط فرض کنید که میدان مغناطیسی یکنواخت می‌تواند در هر راستایی اثر کند.

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳

(د) تمام قطعه‌سیمها، نیروی خالص یکسانی را تحمل می‌کنند.

(هـ) پاسخ به جهت میدان مغناطیسی وابسته است.

۳۲ـ۶ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

۱۴. آیا معادلهٔ (۳۲ـ۳۵) برای سیم تک‌حلقه‌ای به هر شکل دیگری غیر از مربع مستطیل معتبر است؟

(الف) برای هر شکلی که نزدیک به مستطیل باشد، این معادله یک تقریب منطقی است.

(ب) برای هر شکلی که در یک صفحهٔ تخت قرار گیرد، این معادله یک تقریب منطقی است.

(ج) این معادله برای هر شکلی که دارای تقارن کافی باشد، مانند مثلثهای متساوی‌الاضلاع یا دایره‌ها، معتبر است.

(د) این معادله برای تمام شکلهایی که در یک صفحهٔ تخت قرار گیرند معتبر است.

۱۵. حلقهٔ سیم نشان داده‌شده در شکل ۳۲ـ۳۱ حامل جریان ساعتگرد i است. جهت میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ به طرف راست است.

(۱) جهت نیروی خالص وارد بر این حلقه جریان کدام است؟

(الف) به طرف داخل صفحهٔ شکل

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ شکل

(ج) به طرف بالای صفحهٔ شکل

(د) به طرف پایین صفحهٔ شکل

(هـ) نیروی خالص وارد بر حلقه برابر صفر است.

(۲) جهت گشتاور نیروی وارد بر حلقه کدام است؟

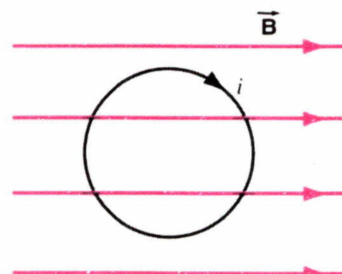
(الف) به طرف داخل صفحهٔ شکل

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ شکل

(ج) به طرف بالای صفحهٔ شکل

(د) به طرف پایین صفحهٔ شکل

(هـ) گشتاور نیروی خالص وارد بر حلقه برابر صفر است.



شکل ۳۲ـ۳۱ پرسش چندگزینه‌ای ۱۵.

۱۶. پرسش چندگزینه‌ای ۱۵ را تکرار کنید، اما اکنون فرض کنید که میدان یکنواخت نیست؛ میدان در قسمت بالای شکل قوی‌تر از قسمت پایین شکل است.

(۱) جهت نیروی خالص وارد بر این حلقهٔ جریان کدام است؟

(الف) به طرف داخل صفحهٔ شکل

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ شکل

(ج) به طرف بالای صفحهٔ شکل

(د) به طرف پایین صفحهٔ شکل

(هـ) نیروی خالص وارد بر حلقه برابر صفر است.

(۲) جهت گشتاور نیروی وارد بر حلقه کدام است؟

(الف) به طرف داخل صفحهٔ شکل

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ شکل

(ج) به طرف بالای صفحهٔ شکل

(د) به طرف پایین صفحهٔ شکل

(هـ) گشتاور نیروی خالص وارد بر حلقهٔ جریان برابر صفر است.

پرسشها

۱. چرا جهت میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را همان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک درنظر نمی‌گیریم؟

۲. فرض کنید در اتاقی نشسته و به دیواری تکیه داده‌اید و باریکه‌ای الکترونی که به‌طور افقی از دیوار عقبی به دیوار جلویی در حرکت است به طرف راست شما منحرف می‌شود. جهت میدان مغناطیسی یکنواخت موجود در این اتاق کدام است؟

۳. چگونه می‌توان این ادعا را که نیروهای بین دو مغناطیس به‌طور ماهوی الکتروستاتیکی هستند رد کرد؟

۴. اگر الکترونی در گذر از ناحیهٔ معینی از فضا منحرف نشود، آیا می‌توان اطمینان یافت که در آن ناحیه میدان مغناطیسی وجود ندارد؟

۵. اگر الکترون متحرکی در عبور از ناحیهٔ معینی از فضا منحرف شود، آیا می‌توان مطمئن بود که در آن ناحیه میدان مغناطیسی وجود دارد؟

۶. باریکه‌ای از الکترونها را می‌توان با میدان الکتریکی یا مغناطیسی منحرف کرد. آیا یکی از این دو روش بر دیگری برتری دارد؟ آیا یکی از این دو روش از دیگری آسان‌تر است؟

۷. میدانهای الکتریکی را می‌توان با نقشهٔ سطوح هم‌پتانسیل نمایش داد. آیا می‌توان همین کار را برای میدانهای مغناطیسی هم انجام داد؟ دربارهٔ پاسخ خود توضیح دهید.

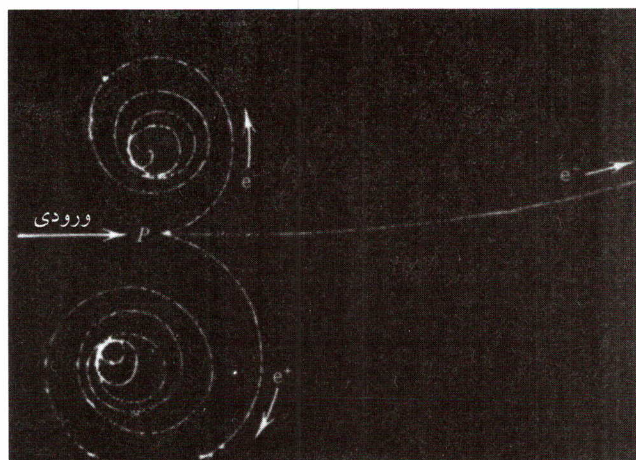
۸. آیا نیروی مغناطیسی پایستار است یا ناپایستار؟ پاسخ خود را توجیه کنید. آیا می‌توان یک انرژی پتانسیل مغناطیسی همانند انرژی پتانسیل الکتریکی و گرانشی تعریف کرد؟

۹. یک ذرهٔ باردار از یک میدان مغناطیسی می‌گذرد و منحرف می‌شود. این انحراف به معنای آن است که نیرویی بر این ذره وارد شده و تکانهٔ آن را تغییر داده است. هر جا نیروی کنشی هست باید نیروی واکنشی هم وجود داشته باشد. این نیروی واکنش بر چه جسمی وارد می‌شود؟

۱۰. در آزمایش تامسون، انحرافهای ناشی از میدانهای گرانشی و مغناطیسی زمین را نادیده گرفتیم. با این کار چه خطاهایی مرتکب شده‌ایم؟

۱۱. فرض کنید در اتاقی نشسته‌اید که در آن یک میدان مغناطیسی یکنواخت قائم پایین‌سو وجود دارد. ناگهان در مرکز اتاق دو الکترون با سرعتهای اولیهٔ مساوی ولی در جهتهای مخالف به‌صورت افقی پرتاب می‌شوند. (الف) حرکت این الکترونها را توصیف کنید. (ب) در صورتی که یکی از این ذرات الکترون و دیگری پوزیترون، یعنی الکترونی با بار الکتریکی مثبت، باشد حرکت آنها را توصیف کنید. (سرعت الکترونها بر اثر برخورد با مولکولهای هوای اتاق به‌تدریج کم می‌شود.)

۱۲. در شکل ۳۲ـ۳۲ مسیر حرکت دو الکترون (e^-) و یک پوزیترون (e^+) را در یک اتاقک حباب نشان داده‌ایم. یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ شکل در اتاقک وجود دارد. چرا مسیرها مارپیچی هستند نه دایره‌ای؟ با توجه به مسیر ذرات، دربارهٔ آنها چه اظهارنظری می‌توان کرد؟ جهت میدان مغناطیسی کدام است؟



شکل ۳۲ـ۳۲ پرسش ۱۲.

۱۳. نقش اصلی (الف) میدان الکتریکی و (ب) میدان مغناطیسی در سیکلوترون چیست؟

۱۴. فرض کنید در یک میدان مغناطیسی معین، یک پروتون و یک الکترون با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. بسامد چرخش کدام‌یک از این دو ذره بیشتر است؟ آثار نسبیتی را در نظر بگیرید.

۱۵. کدام واقعیت اساسی کار سیکلوترون معمولی را میسر می‌سازد؟ از ملاحظه‌های نسبیتی چشم بپوشید.

۱۶. یک سیم مسی بدون روکش از یک دیوار اتاق وارد و پس از پیمودن عرض اتاق از دیوار مقابل خارج می‌شود. گفته‌اند که در سیم جریان پایایی برقرار است. چگونه می‌توانید جهت آن را معین کنید؟ هر چند راهی که به نظرتان می‌رسد بیان کنید. از هر ابزار مناسبی که بخواهید می‌توانید استفاده کنید ولی مجاز به قطع کردن سیم نیستید.

۱۷. امکان استفاده از اثر هال برای اندازه‌گیری شدت B میدان مغناطیسی را بررسی کنید.

۱۸. (الف) در اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل هال، چرا باید دقت کرد که نقطه‌های x و y در شکل ۳۲ـ۱۸ درست مقابل یکدیگر باشند؟ (ب) اگر یکی از این دو نقطهٔ اتصال متحرک باشد، چه روالی را باید دنبال کرد تا اطمینان یافت نقطه‌ها در محل مناسب قرار گرفته‌اند؟

۱۹. در بخش ۳۲ـ۵، گفتیم که میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ بر الکترونهای رسانش موجود در، مثلاً، یک سیم مسی حامل جریان i نیروی جانبی وارد می‌کند. همچنین تلویحاً فرض کردیم که همین نیرو بر خود رسانا هم وارد می‌شود. آیا در این استدلال مرحله‌های گمشده‌ای وجود دارد؟ اگر چنین است، آنها را مطرح کنید.

۲۰. یک سیم مسی مستقیم حامل جریان i، در میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$، عمود بر راستای سیم قرار دارد. می‌دانیم که $\vec{\mathbf{B}}$ یک نیروی جانبی بر الکترونهای آزاد (یا رسانش) موجود در سیم وارد می‌کند. آیا میدان $\vec{\mathbf{B}}$ بر الکترونهای مقید هم نیرو وارد می‌کند؟ به هر حال، الکترونهای مقید هم ساکن نیستند. در این مورد توضیح دهید.

۲۱. آیا معادلهٔ (۳۲ـ۲۶)، ($\vec{\mathbf{F}}_B = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$) برای سیم مستقیمی که سطح مقطع آن به‌طور نامنظم در امتداد طولش تغییر می‌کند معتبر است؟

۲۲. به هر جریانی در میدان مغناطیسی نیرویی وارد می‌شود. بنابراین باید بتوان مایعات رسانا را با فرستادن جریانی (در راستای مناسب) در آنها و عبور از میدان مغناطیسی تلمبه کرد. چنین تلمبه‌ای را طراحی کنید. از این اصل در تلمبه کردن سدیم مایع (رسانای به شدت خورنده) در برخی از رآکتورهای هسته‌ای استفاده می‌کنند. در این رآکتورها از این مایع به‌عنوان خنک‌کننده استفاده می‌شود. مزیتهای این تلمبه کدام است؟

۲۳. یک میدان مغناطیسی یکنواخت ناحیهٔ مکعب‌شکل معینی از فضا را اشغال کرده است. آیا می‌توان الکترونی را از خارج طوری به داخل این مکعب شلیک کرد که در داخل مکعب در یک مسیر دایره‌ای بسته حرکت کند؟

۲۴. یک رسانا، گرچه حامل جریانی است، ولی بار خالص آن صفر است. پس چرا میدان مغناطیسی بر آن نیرو وارد می‌کند؟

۲۵. یک حلقهٔ جریان مستطیل‌شکل، سمتگیری دلخواهی در میدان مغناطیسی خارجی دارد. برای چرخاندن این حلقهٔ جریان، حول محوری عمود بر صفحهٔ خودش، چقدر کار باید انجام داد؟

۲۶. معادلهٔ (۳۲ـ۳۵) نشان می‌دهد که بر حلقهٔ جریانی که در میدان مغناطیسی خارجی قرار گرفته در صورتی که زاویهٔ بین محور حلقه و جهت میدان (الف) صفر درجه یا (ب) ۱۸۰° باشد، هیچ گشتاور نیرویی وارد نمی‌شود. دربارهٔ سرشت ترازمندی حلقه (یعنی اینکه پایدار، خنثی، یا ناپایدار است) در این دو موقعیت بحث کنید.

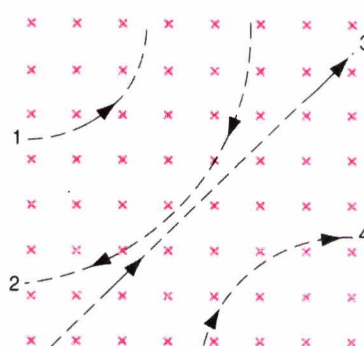
۲۷. فرض کنید در سرتاسر اتاقی که در آن نشسته‌اید میدان مغناطیسی یکنواخت قائم بالاسویی وجود دارد. یک حلقه سیم دایره‌ای که صفحهٔ آن افقی است در این میدان قرار دارد. اگر از بالا به این حلقه نگاه کنیم، برای کدام جهت جریان در این حلقه، حلقه نسبت به نیروها و گشتاور نیروهای با منشأ مغناطیسی در حالت تعادل پایدار است؟

تمرینها

۳۲ـ۱ برهم‌کنشهای مغناطیسی و قطبهای مغناطیسی

۳۲ـ۲ نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک

۱. چهار ذره در عبور از یک میدان مغناطیسی مسیرهای نشان داده‌شده در شکل ۳۲ـ۳۳ را می‌پیمایند. از این مسیرها چه نتیجه‌ای در مورد بار ذره‌ها می‌توان گرفت؟



شکل ۳۲ـ۳۳ تمرین ۱.

۲. الکترونی در لامپ تصویر تلویزیونی با سرعت $۷٫۲ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m/s}$ در میدان مغناطیسی با شدت $۸۳\,\mathrm{mT}$ حرکت می‌کند. (الف) بدون دانستن جهت میدان، اندازهٔ بیشترین و کمترین نیرویی که به علت وجود میدان مغناطیسی به الکترون وارد می‌شود چقدر است؟ (ب) در نقطه‌ای شتاب الکترون $۴٫۹ \times ۱۰^{۱۶}\,\mathrm{m/s^{2}}$ است. در این نقطه زاویهٔ بین سرعت الکترون و میدان مغناطیسی چقدر است؟

۳. یک میدان الکتریکی به شدت $۱٫۵\,\mathrm{kV/m}$ و یک میدان مغناطیسی به شدت $۰٫۴۴\,\mathrm{T}$ بر الکترون متحرکی اعمال می‌شوند ولی نیرویی بر آن وارد نمی‌کنند. (الف) کمینهٔ سرعت الکترون، v، را محاسبه کنید. (ب) بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$، $\vec{\mathbf{B}}$، و $\vec{\mathbf{v}}$ را ترسیم کنید.

۴. پروتونی با زاویهٔ $۲۳٫۰^{\circ}$ نسبت به میدان مغناطیسی به شدت $۲٫۶۳\,\mathrm{mT}$ حرکت می‌کند و نیروی مغناطیسی $۶٫۴۸ \times ۱۰^{-۱۷}\,\mathrm{N}$ به آن وارد می‌شود. (الف) سرعت و (ب) انرژی جنبشی پروتون را برحسب eV محاسبه کنید.

۵. یک پروتون پرتو کیهانی با سرعت قائم $۲٫۸ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ در نزدیکی استوا به زمین برخورد می‌کند. فرض کنید که مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در استوا برابر $۳۰\,\mu\mathrm{T}$ باشد. نسبت نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون را به نیروی گرانشی وارد بر آن محاسبه کنید.

۶. الکترونی را با اختلاف پتانسیل $۱٫۰\,\mathrm{kV}$ شتاب می‌دهیم و آن را به ناحیهٔ بین دو صفحهٔ موازی که در فاصلهٔ $۲۰\,\mathrm{mm}$ از هم قرار گرفته‌اند و اختلاف پتانسیل $۱۰۰\,\mathrm{V}$ بین آنها برقرار است پرتاب می‌کنیم. اگر الکترون عمود بر میدان الکتریکی بین دو صفحه به آن ناحیه وارد شود، چه میدان مغناطیسیی عمود بر مسیر الکترون و عمود بر میدان الکتریکی باید در آنجا برقرار شود تا الکترون در خط راست به حرکتش ادامه دهد؟

۷. میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ عمود است. به پروتونی که با سرعت $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{p}}$، که به هر دو میدان عمود است، حرکت می‌کند، هیچ نیروی خالصی وارد نمی‌شود. به الکترونی هم که با سرعت $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{e}}$ حرکت می‌کند هیچ نیرویی وارد نمی‌شود. نشان دهید که نسبت انرژی جنبشی پروتون به انرژی جنبشی الکترون برابر $m_{\mathrm{p}}/m_{\mathrm{e}}$ است.

۸. یک چشمهٔ یونی یونهای ${}^{6}\mathrm{Li}$ (به جرم $۶٫۰۱\,\mathrm{u}$) تولید می‌کند که هر یک حامل بار $+e$ هستند. یونها در اختلاف پتانسیل $۱۰٫۸\,\mathrm{kV}$ شتاب می‌گیرند و به‌صورت افقی از ناحیه‌ای می‌گذرند که در آنجا میدان مغناطیسی قائم $B = ۱٫۲۲\,\mathrm{T}$ برقرار است. چه میدان الکتریکی افقیی باید در آن ناحیه برقرار شود تا یونهای ${}^{6}\mathrm{Li}$ بدون انحراف از آنجا بگذرند؟

۳۲ـ۳ بارهای چرخنده

۹. (الف) در یک میدان مغناطیسی به شدت $B = ۰٫۵۰\ \mathrm{T}$، شعاع مسیری که الکترون با سرعت ۰٫۱۰ سرعت سیر نور می‌پیماید چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی این الکترون برحسب eV چقدر است؟ آثار کوچک نسبیتی را نادیده بگیرید.

۱۰. الکترونی با انرژی جنبشی ۱٫۲۲ keV در صفحه‌ای عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت می‌چرخد. شعاع مدار این الکترون ۲۴٫۷ cm است. (الف) سرعت الکترون، (ب) شدت میدان مغناطیسی، (ج) بسامد چرخش، و (د) دورهٔ تناوب حرکت را محاسبه کنید.

۱۱. الکترونی در اختلاف پتانسیل ۳۵۰ V از حالت سکون شتاب می‌گیرد. این الکترون پس از شتاب‌گیری با سرعتِ عمود بر میدان وارد یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۲۰۰ mT می‌شود. (الف) سرعت الکترون و (ب) شعاع مسیر حرکت الکترون را در میدان مغناطیسی محاسبه کنید.

۱۲. س. ا. گوداسمیت روشی برای اندازه‌گیری دقیق جرم یونهای سنگین ابداع کرد. او این کار را با اندازه‌گیری دورهٔ چرخش این یونها در یک میدان مغناطیسی مشخص انجام داد. یک یون تک‌بار ید در مدت ۱٫۲۹ ms در میدانی به شدت ۴۵٫۰ mT تعداد ۷٫۰۰ دور کامل را می‌پیماید. جرم این یون را برحسب یکای جرم اتمی محاسبه کنید. در واقع، اندازه‌گیریهای جرم با دقتی بسیار بالاتر از آنچه این داده‌های تقریبی ارائه می‌دهند انجام شده است.

۱۳. ذرهٔ آلفایی ($q = +۲e$ و $m = ۴٫۰\ \mathrm{u}$) در یک میدان مغناطیسی به شدت $B = ۱٫۲\ \mathrm{T}$ مسیری دایره‌ای به شعاع ۴٫۵ cm را می‌پیماید. (الف) سرعت، (ب) دورهٔ چرخش، (ج) انرژی جنبشی برحسب eV، و (د) اختلاف پتانسیلی را که ذره باید در آن شتاب بگیرد تا به این انرژی برسد محاسبه کنید.

۱۴. فیزیکدانی برای شتاب‌دادن پروتونها تا سرعت $۰٫۱۰۰c$، سیکلوترونی را طراحی می‌کند. آهنربای مورد استفاده میدانی به شدت ۱٫۴۰ T تولید می‌کند. (الف) شعاع سیکلوترون و (ب) بسامد نوسانگر متناظر با آن را محاسبه کنید. ملاحظه‌های نسبیتی در اینجا اهمیت ندارند.

۱۵. در یک آزمایش هسته‌ای، پروتونی با انرژی جنبشی K_{p} در میدان مغناطیسی یکنواخت در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند. انرژی جنبشی (الف) یک ذرهٔ آلفا و (ب) یک پروتون برای اینکه در همان مدار بچرخند باید چقدر باشد؟ (برای دوترون $q = +e$ و $m = ۲٫۰\ \mathrm{u}$؛ برای ذرهٔ آلفا $q = +۲e$ و $m = ۴٫۰\ \mathrm{u}$ است.)

۱۶. یک پروتون، یک دوترون، و یک ذرهٔ آلفا که در اختلاف پتانسیل یکسان ΔV شتاب گرفته‌اند، وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ وجود دارد و ذره‌ها عمود بر میدان حرکت می‌کنند. (الف) انرژی جنبشی این ذره‌ها را محاسبه کنید. اگر شعاع مدار دایره‌ای مربوط به پروتون برابر r_{p} باشد، شعاع مدارهای مربوط به (ب) دوترون و (ج) ذرهٔ آلفا برحسب r_{p} چقدر است؟

۱۷. یک پروتون، یک دوترون، و یک ذرهٔ آلفا با انرژی جنبشی یکسان وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ برقرار است و ذره‌ها عمود بر میدان حرکت می‌کنند. پروتون دایره‌ای به شعاع r_{p} را می‌پیماید. شعاع مدارهای مربوط به (الف) دوترون و (ب) ذرهٔ آلفا برحسب r_{p} چقدر است؟

۱۸. دوترونی در میدان مغناطیسی یک سیکلوترون در مداری به شعاع ۵۰ cm می‌چرخد. به‌علت برخورد خراشان با یک هدف، دوترون با از دست دادن مقدار ناچیزی از انرژی جنبشی به یک پروتون و یک نوترون وامی‌پاشد. حرکت هر یک از این اجزا را پس از به‌وجود آمدن بررسی کنید. فرض کنید که به هنگام واپاشی، انرژی دوترون به تساوی بین پروتون و نوترون تقسیم شود.

۱۹. (الف) برای اینکه یک پروتون در استوا زمین را دور بزند به چه سرعتی نیاز دارد؟ فرض کنید که در استوا میدان مغناطیسی زمین در همه‌جا افقی و در امتداد نصف‌النهارها باشد. آثار نسبیتی را هم باید در نظر بگیرید. فرض کنید که شدت میدان مغناطیسی زمین در استوا برابر $۴۱\mu\mathrm{T}$ است. (ب) بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی متناظر با این وضعیت را رسم کنید.

۲۰. شعاع مسیر الکترونی را که با انرژی ۱۰٫۰ MeV عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۲٫۲۰ T حرکت می‌کند محاسبه کنید. در این محاسبه از فرمولهای (الف) کلاسیک و (ب) نسبیتی استفاده کنید. دورهٔ تناوب واقعی این حرکت دورانی را محاسبه کنید. آیا این نتیجه مستقل از سرعت الکترون است؟

۲۱. اندازه‌گیریهای مربوط به یونیدگی نشان می‌دهد که یک ذرهٔ هسته‌ای خاص حامل دو بار ($= ۲e$) الکتریکی است و با سرعت $۰٫۷۱۰c$ حرکت می‌کند. این ذره مسیری دایره‌ای به شعاع ۴٫۷۲ m را در یک میدان مغناطیسی به شدت ۱٫۳۳ T می‌پیماید. با یافتن جرم این ذره هویت را مشخص کنید.

۲۲. سینکروترون پروتونی آزمایشگاه فرمی، پروتونها را تا انرژی جنبشی ۹۵۰ GeV شتاب می‌دهد. در این انرژی (الف) سرعت پروتون را، که به‌صورت کسری از سرعت سیر نور بیان می‌شود، و (ب) میدان

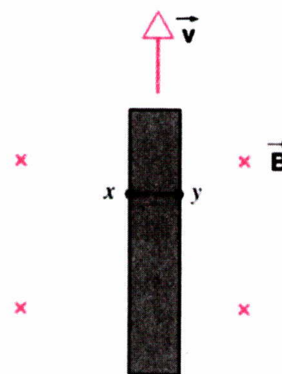
مغناطیسی را در مدار پروتون که شعاع انحنای آن ‎۷۵۰ m‎ است، محاسبه کنید. (انرژی سکون پروتون ‎۹۳۸ MeV‎ است ضرورت دارد که در اینجا از معادلات نسبیتی استفاده کنیم.)

۲۳. طول کل مسیری که یک دوترون در فرایند شتاب‌گیری در یک سیکلوترون می‌پیماید برآورد کنید. فرض کنید بین "دی‌ها"ی سیکلوترون اختلاف پتانسیل شتابدهی ‎۸۰ kV‎ برقرار است. شعاع هر "دی" ‎۵۳ cm‎ و بسامد نوسانگر ‎۱۲ MHz‎ است.

۲۴. ذره‌ای به جرم m و بار q را در نظر بگیرید که تحت تأثیر میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ ممتد در جهت $+z$، در صفحهٔ xy حرکت می‌کند. مختصات xy حرکت می‌کند. مختصات $x(t)$ و $y(t)$ این ذره را برحسب زمان t بنویسید. برای انجام کار فرض کنید که ذره در دایره‌ای به شعاع R که مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد حرکت می‌کند.

۳۲ـ۴ اثر هال

۲۵. یک نوار فلزی به طول ‎۶٫۵ cm‎، عرض ‎۰٫۸۸ mm‎ و ضخامت ‎۰٫۷۶ mm‎ با سرعت ثابت v در یک میدان مغناطیسی $B = ۱٫۲\ \text{mT}$ عمود بر نوار، مطابق شکل ۳۲ـ۳۴، حرکت می‌کند. بین نقطه‌های x و y که در عرض نوار مقابل هم قرار گرفته‌اند، اختلاف پتانسیل ‎۳٫۹μV‎ را اندازه‌گیری می‌کنیم. سرعت v را محاسبه کنید.



شکل ۳۲ـ۳۴ تمرین ۲۵.

۲۶. در آزمایشی در مورد اثر هال، جریان ‎۳٫۲ A‎ به‌طور طولی از رسانایی به عرض ‎۱٫۲ cm‎، طول ‎۴٫۰ cm‎ و ضخامت ‎۹٫۵μm‎ می‌گذرد و ولتاژ عرضی هال (در عرض نوار) به میزان ‎۴۰μV‎ را وقتی که یک میدان مغناطیسی به شدت ‎۱٫۴ T‎ عمود بر سطح این رسانای نازک اثر می‌کند به‌وجود می‌آورد. از این داده‌ها (الف) سرعت سوق حاملهای بار و (ب) چگالی عددی حاملهای بار را تعیین کنید. با استفاده از جدول ۳۲ـ۲ این رسانا را شناسایی کنید. (ج) قطبش ولتاژ هال را برای یک جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی معلوم روی نمودار نشان دهید. فرض کنید که حاملهای بار الکترونهای (منفی) هستند.

۲۷. نشان دهید که، تعداد حاملهای بار به‌ازای واحد حجم برحسب میدان الکتریکی هال E_{H} و چگالی جریان j، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$n = \frac{jB}{eE_{\text{H}}}$$

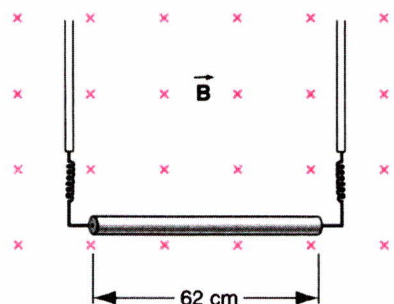
۲۸. (الف) نشان دهید که نسبت میدان الکتریکی هال، E_{H}، به میدان الکتریکی به‌وجود آورندهٔ جریان، E_c، به‌صورت زیر است:

$$\frac{E_{\text{H}}}{E_c} = \frac{B}{ne\rho}$$

که در این رابطه ρ مقاومت ویژهٔ ماده است. (ب) این نسبت را به‌صورت عددی برای مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲ـ۳ حل کنید. جدول ۲۹ـ۱ را ببینید.

۳۲ـ۵ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

۲۹. سیمی به طول ‎۶۲٫۰ cm‎ و جرم ‎۱۳٫۰ g‎ به‌وسیلهٔ یک جفت سیم رابط انعطاف‌پذیر در یک میدان مغناطیسی به شدت ‎۴۴۰ mT‎ آویخته شده است. اندازه و جهت جریانی را معین کنید که باید در سیم برقرار شود تا کشش در سیمهای نگهدارنده را خنثی کند. شکل ۳۲ـ۳۵ را ببینید.



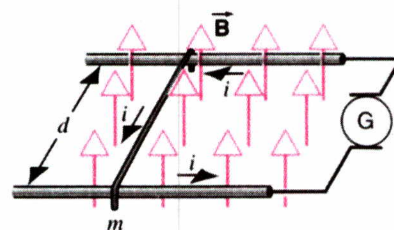
شکل ۳۲ـ۳۵ تمرین ۲۹.

۳۰. یک رسانای افقی در یک خط انتقال نیرو حامل جریان ‎۵٫۱۲ kA‎ از جنوب به شمال است. میدان مغناطیسی زمین در حوالی این خط ‎۵۸٫۰ μT‎ و جهت آن به طرف شمال و متمایل به پایین با زاویهٔ ‎۷۰٫۰°‎ نسبت به افق است. اندازه و جهت نیروی مغناطیسی را که میدان زمین بر ‎۱۰۰ m‎ از این رسانا وارد می‌کند، معین کنید.

۳۱. امکان طراحی قطار برقی جدیدی را در نظر بگیرید. موتور این قطار به‌وسیلهٔ نیروی ناشی از مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین روی یک محور رسانا به حرکت در می‌آید. جریان از یک ریل به چرخ رسانا،

از طریق محور رسانا، به چرخ رسانای دیگر و از طریق ریل دیگر به چشمهٔ نیروی محرک باز می‌گردد. (الف) چه جریانی لازم است تا نیروی نه چندان زیاد ۱۰ kN را تأمین کند؟ فرض کنید که مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین برابر $۱۰ \mu T$ و طول محور ۳٫۰ m باشد. (ب) به‌ازای هر اهم مقاومت ریلها چقدر انرژی مصرف می‌شود؟ (ج) آیا این قطار کاملاً غیرواقع‌بینانه و توهمی است یا فقط اندکی غیرواقعی است؟

۳۲. یک سیم فلزی به جرم m بدون اصطکاک روی دو ریل افقی که در فاصلهٔ d از هم قرار گرفته‌اند، مطابق شکل ۳۲ـ۳۶، می‌لغزد. این مسیر در میدان مغناطیسی یکنواخت قائم $\vec{B}$ قرار دارد. جریان ثابت i از مولد G از طریق یک ریل وارد سیم شده و از ریل دیگر خارج می‌شود. بردار سرعت (اندازه و جهت) سیم را برحسب زمان بنویسید، فرض کنید که در لحظهٔ $t = ۰$ سیم ساکن باشد.



شکل ۳۲ـ۳۶ تمرین ۳۲.

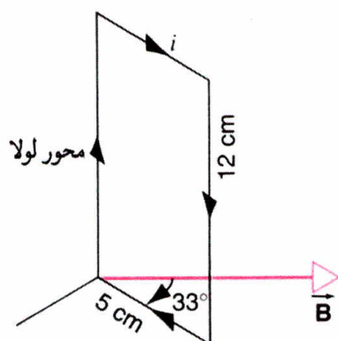
۳۳. یک رسانای صلب درازکه در امتداد محور x قرارگرفته، حامل جریان ۵٫۰ A در جهت منفی x است. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که با رابطهٔ $\vec{B} = (۳\,mT)\hat{i} + (۸\,mT/m^۲)x^۲\hat{j}$ مشخص شده در آنجا برقرار است. نیروی وارد بر قطعه‌ای به طول ۲٫۰ m از این رسانا را که در فاصلهٔ بین $x = ۱٫۲\,m$ و $x = ۳٫۲\,m$ قرارگرفته است محاسبه کنید.

۳۴. یک میلهٔ مسی به جرم ۱٫۱۵ kg را روی دو ریل افقی می‌گذاریم، که به فاصلهٔ ۹۵٫۰ cm از هم قرار گرفته‌اند. این میله حامل جریان ۵۳٫۲ A از یک ریل به ریل دیگر است. ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۵۸ است. کمترین میدان مغناطیسی (نه الزاماً قائمی) را مشخص کنید که سبب لغزش این میله می‌شود.

۳۲ـ۶ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

۳۵. یک قاب تک‌حلقه‌ای، حامل جریان ۴٫۰۰ A، به شکل یک مثلث قائم‌الزاویه به ابعاد ۵۰ cm، ۱۲۰ cm، و ۱۳۰ cm است. این قاب در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۷۵٫۰ mT قرار گرفته که جهت آن موازی جهت جریان در ضلع ۱۳۰ cm قاب است. (الف) نیروی مغناطیسی وارد بر هر یک از سه ضلع این قاب را تعیین کنید. (ب) نشان دهید که نیروی مغناطیسی کل وارد بر این قاب برابر صفر است.

۳۶. در شکل ۳۲ـ۳۷ یک قاب مستطیلی متشکل از ۲۰ دور سیم و به ابعاد ۱۲ cm در ۵٫۰ cm را نشان داده‌ایم. این قاب حامل جریان ۰٫۱۰ A است و از یک ضلع لولا شده است. این قاب طوری نصب شده است که صفحهٔ آن با جهت یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۰٫۵۰ T زاویهٔ °۳۳ می‌سازد. گشتاور نیروی وارد بر قاب را حول لولا محاسبه کنید.



شکل ۳۲ـ۳۷ تمرین ۳۶.

۳۷. یک ساعت دیواری ثابت، دارای صفحه‌ای به شکل دایره به شعاع ۱۵ cm است. دور آن ۶ دور سیم پیچیده‌ایم، این سیم حامل جریان ۲٫۰ A در جهت ساعتگرد است. این ساعت در جایی قرار گرفته است که در آنجا میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت و ثابت ۷۰ mT برقرار است (با این وصف این ساعت به‌درستی کار می‌کند). در رأس ساعت ۱:۰۰ بعدازظهر، عقربهٔ ساعت‌شمار این ساعت در جهت میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد. (الف) پس از چند دقیقه عقربهٔ دقیقه‌شمار این ساعت در جهت گشتاور نیروی وارد بر سیم‌پیچ ناشی از میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد؟ (ب) اندازهٔ این گشتاور نیرو چقدر است؟

مسئله‌ها

۱. سرعت الکترونی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به‌صورت $\vec{v} = (۴۰\,km/s)\hat{i} + (۳۵\,km/s)\hat{j}$ است. به این الکترون نیرویی به‌صورت $\vec{F} = (-۴٫۲\,fN)\hat{i} + (۴٫۸\,fN)\hat{j}$ وارد می‌شود. اگر $B_x = ۰$، میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

۲. در ناحیه‌ای که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت وجود دارد، الکترونی دارای سرعت اولیهٔ

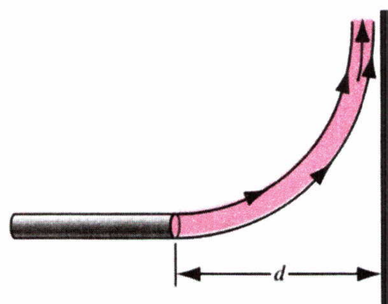
$(۱۲٫۰\ km/s)\hat{j} + (۱۵٫۰\ km/s)\hat{k}$ و شتاب ثابت $(۲٫۰۰ \times ۱۰^{۱۲} m/s^۲)\hat{i}$ است. اگر میدان مغناطیسی $\vec{B} = (۴۰۰\mu T)\hat{i}$ باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را مشخص کنید.

۳. انرژی جنبشی الکترونهای موجود در باریکهٔ لامپ تصویر تلویزیون برابر $۱۲٫۰\ keV$ است. این لامپ طوری قرار گرفته است که الکترونها به‌طور افقی از جنوب مغناطیسی به شمال مغناطیسی در حرکت‌اند. مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین پایین‌سو و مقدار آن $۵۵٫۰\mu T$ است. (الف) این باریکه به چه جهتی منحرف می‌شود؟ (ب) شتاب یک الکترون معین ناشی از این میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ج) این باریکه در گذر از $۲۰٫۰\ cm$ در طول لامپ چقدر منحرف می‌شود؟

۴. باریکه‌ای از الکترونها با انرژی جنبشی K از یک برگهٔ نازک "پنجره" در انتهای یک لولهٔ شتابدهنده به خارج نفوذ می‌کند. یک صفحهٔ فلزی در فاصلهٔ d از این پنجره و عمود بر راستای باریکهٔ نفوذی قرار دارد (شکل ۳۲ـ۳۸ را ببینید). (الف) نشان دهید که اگر از یک میدان مغناطیسی B به‌صورت زیر استفاده کنیم می‌توانیم مانع برخورد باریکه به صفحهٔ فلزی بشویم:

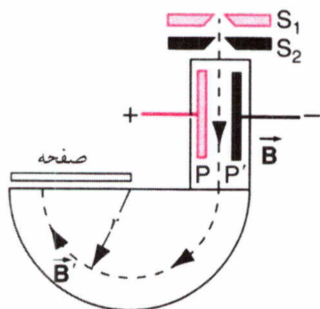
$$B \geq \sqrt{\frac{۲mK}{e^۲ d^۲}}$$

که در این رابطه m و e به‌ترتیب عبارت‌اند از جرم و بار الکترون. (ب) جهت میدان B باید چگونه باشد؟



شکل ۳۲ـ۳۸ مسئلهٔ ۴.

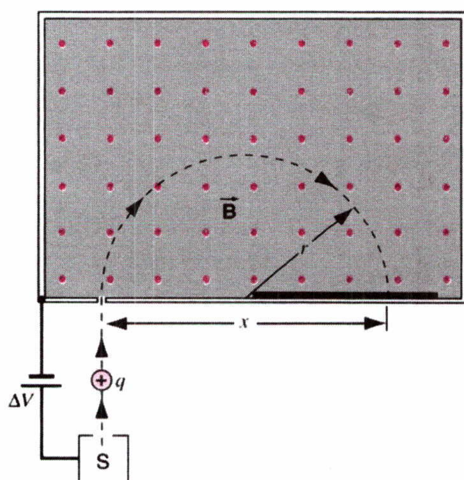
۵. طیف‌سنج جرم بین‌بریج، که آن را در شکل ۳۲ـ۳۹ نشان داده‌ایم، یونهایی را که دارای سرعت یکسان هستند، از هم جدا می‌کند. یونها پس از عبور از شکافهای $S_۱$ و $S_۲$ از یک سرعت‌گزین می‌گذرند. سرعت‌گزین تشکیل شده است از یک میدان الکتریکی که صفحه‌های باردار P و P′ آن را تولید کرده‌اند و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که بر میدان الکتریکی و جهت حرکت یونها عمود است. یونهایی که بدون انحراف از میدانهای متعامد $\vec{E}$ و $\vec{B}$ می‌گذرند وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی دیگر $\vec{B}'$ وجود دارد. مسیر این ذرات تحت تأثیر این میدان مغناطیسی خم می‌شود و به‌صورت دایره در می‌آید. یک صفحهٔ عکاسی فرود آنها را ثبت می‌کند. نشان دهید که $q/m = E/rBB'$ است. در این رابطه r شعاع مدار دایره‌ای است.



شکل ۳۲ـ۳۹ مسئلهٔ ۵.

۶. در شکل ۳۲ـ۴۰ ترتیبی از تجهیزات را نشان داده‌ایم که برای اندازه‌گیری جرم یونها به‌کار می‌رود. یونی به جرم m و بار الکتریکی $+q$ در حالت سکون در چشمهٔ S تولید می‌شود. چشمهٔ S اتاقکی است که در آن تخلیهٔ گاز صورت می‌گیرد. یونها به‌وسیلهٔ اختلاف پتانسیل ΔV شتاب می‌گیرند و وارد میدان مغناطیسی $\vec{B}$ می‌شوند. در این ناحیه و در حضور میدان مغناطیسی، یونها مسیرهای نیمدایره‌ای را می‌پیمایند و در فاصلهٔ x از شکاف ورودی به صفحهٔ حساس عکاسی برخورد می‌کنند. نشان دهید که جرم یونها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{B^۲ q}{۸\Delta V}x^۲$$



شکل ۳۲ـ۴۰ مسئلهٔ ۶.

۷. دو نوع اتم یک بار یونیده که دارای بار یکسان q هستند و جرم آنها به اندازهٔ مقدار کوچک Δm با هم اختلاف دارد وارد طیف‌سنج جرمی توصیف‌شده در مسئلهٔ ۶ می‌شوند. (الف) اختلاف جرم را برحسب ΔV، q، m (جرم هرکدام)، B، و فاصلهٔ Δx بین لکه‌های روی صفحهٔ حساس عکاسی محاسبه کنید. (ب) فاصلهٔ Δx را برای باریکه‌ای از اتمهای یک بار یونیده کلر با جرمهای u ۳۵٫۰ و u ۳۷٫۰ محاسبه کنید. فرض کنید که $\Delta V = ۷٫۳۳\,\mathrm{kV}$ و $B = ۵۲۰\ \mathrm{mT}$ است.

۸. در یک طیف‌سنج جرمی (مسئلهٔ ۶ را ببینید) که برای اهداف تجاری به‌کار می‌رود، اتمهای اورانیوم با جرم u ۲۳۸ و با بار $+۲e$ از سایر گونه‌ها جداسازی می‌شوند. ابتدا یونها در اختلاف پتانسیل kV ۱۰۵ شتاب می‌گیرند، سپس وارد یک میدان مغناطیسی می‌شوند و در آنجا یک کمان ۱۸۰° از دایره‌ای به شعاع cm ۹۷٫۳ را می‌پیمایند. سپس پس از عبور از یک شکاف به عرض mm ۱٫۲۰ و ارتفاع cm ۱٫۱۴ در ظرفی انباشته می‌شوند. (الف) اندازهٔ میدان مغناطیسی (قائم) در جداکننده چقدر است؟ اگر این ماشین برای جداسازی mg ۹۰٫۰ از این ماده در هر ساعت طراحی شده باشد، (ب) جریان یونهای مورد نظر در ماشین و (ج) انرژی داخلی تلف‌شده در ظرف را در مدت یک ساعت محاسبه کنید.

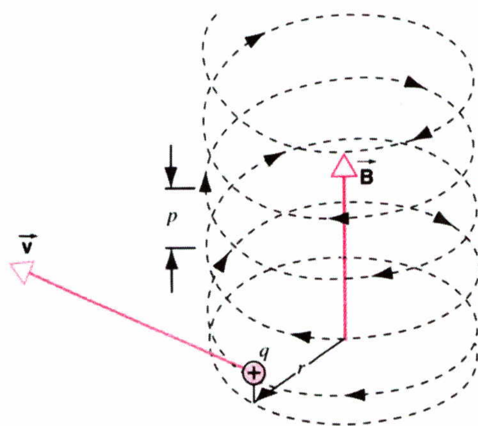
۹. یک ذرهٔ خنثی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت B در حالت سکون قرار دارد. در لحظهٔ $t = ۰$ این ذره به دو ذرهٔ باردار، هر یک به جرم m وامی‌پاشد. (الف) اگر بار یکی از این ذره‌ها $+q$ باشد، بار ذرهٔ دیگر چقدر است؟ (ب) دو ذره در مسیرهای جداگانه در صفحه‌ای عمود بر میدان $\vec{\mathbf{B}}$ به حرکت در می‌آیند. پس از مدتی دو ذره با هم برخورد می‌کنند. زمان سپری‌شده از واپاشی تا برخورد را برحسب m، B، و q بیان کنید.

۱۰. در نظریهٔ بور برای اتم هیدروژن، می‌توان فرض کرد که الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع r حول پروتون می‌چرخد. فرض کنید که این اتم در میدان مغناطیسی قرار بگیرد به طوری که صفحهٔ مدار الکترون بر میدان مغناطیسی عمود باشد. (الف) اگر از نظر ناظری که در امتداد $\vec{\mathbf{B}}$ شاهد این حرکت است، الکترون ساعتگرد بچرخد، بسامد زاویه‌ای حرکت افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ب) اگر الکترون پادساعتگرد بچرخد چه اتفاقی خواهد افتاد؟ فرض کنید که شعاع مدار تغییر نمی‌کند. [راهنمایی: در این حالت قسمتی از نیروی مرکزگرا منشأ الکتریکی دارد ($\vec{\mathbf{F}}_E$) و قسمتی منشأ مغناطیسی ($\vec{\mathbf{F}}_B$)]. (ج) نشان دهید که تغییر بسامد چرخش بر اثر عملکرد میدان مغناطیسی تقریباً برابر است با

$$\Delta f = \pm\, \frac{Be}{۴\pi m}$$

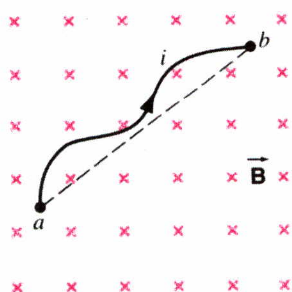
این تغییرات بسامد را زیمان در سال ۱۸۹۶ مشاهده کرده بود. (راهنمایی: بسامد دوران را بدون حضور میدان مغناطیسی و با حضور آن محاسبه کنید. این دو نتیجه را از هم کم کنید، به‌خاطر داشته باشید که چون اثر میدان مغناطیسی بسیار کوچک است، بعضی از جملات مشتمل بر B را می‌توان با خطای کوچکی برابر صفر منظور کرد ولی این کار را در مورد همهٔ جملات نمی‌توان انجام داد.)

۱۱. پوزیترونی (الکترونی با بار الکتریکی مثبت) با انرژی $۲۲٫۵\,\mathrm{eV}$ به داخل میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۴۵۵\,\mu\mathrm{T}$ پرتاب می‌شود. بردار سرعت این ذره با میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ زاویهٔ $۶۵٫۵^\circ$ می‌سازد. (الف) دورهٔ تناوب، (ب) گام p، و (ج) شعاع مسیر مارپیچی را محاسبه کنید. شکل ۳۲ـ۴۱ را ببینید.



شکل ۳۲ـ۴۱ مسئلهٔ ۱۱.

۱۲. در شکل ۳۲ـ۴۲ سیمی با شکل دلخواه را نشان داده‌ایم که بین نقطه‌های a و b حامل جریان i است. این سیم در صفحه‌ای قرار گرفته که بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ عمود است. ثابت کنید که



شکل ۳۲ـ۴۲ مسئلهٔ ۱۲.

نیروی وارد بر این سیم برابر است با نیروی وارد بر سیم مستقیمی که بین a و b کشیده شده و حامل جریان i باشد. (راهنمایی: به‌جای سیم، یک مجموعهٔ "پلکانی" موازی و عمود بر خط مستقیم واصل بین a و b قرار دهید).

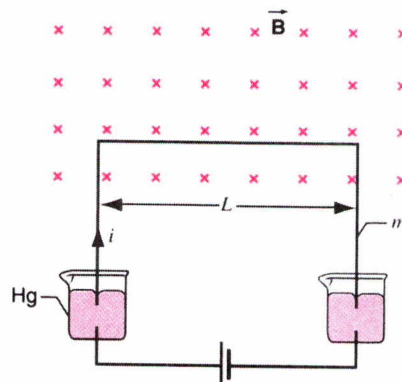
۱۳. ذرهٔ معرفی‌شده در تمرین ۲۴ را در نظر بگیرید، ولی این دفعه ثابت کنید (نه اینکه فرض کنید) که ذره در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. این کار را با حل تحلیلی قانون دوم نیوتون انجام دهید. [راهنمایی: عبارت مربوط به F_y را برای تعیین v_x حل کنید، و آن را در عبارت مربوط به F_x قرار دهید تا معادله‌ای به‌دست آورید که بتوان آن را برای v_y حل کرد. همین کار را برای v_x انجام دهید و آن را در معادلهٔ F_y جایگزین کنید. سرانجام، $x(t)$ و $y(t)$ را از v_x و v_y به‌دست آورید.]

۱۴. با انتگرال‌گیری مستقیم از عبارت زیر، یعنی

$$\vec{\mathbf{F}}_B = \oint i\, d\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

نشان دهید که در میدان مغناطیسی یکنواخت، نیروی خالص وارد بر حلقهٔ جریان با شکل دلخواه برابر صفر است. (توجه کنید: یک حلقهٔ جریان با شکل دلخواه الزاماً در یک صفحهٔ تخت قرار نمی‌گیرد.)

۱۵. دو سر یک سیم U شکل به جرم m و طول L در داخل جیوه فرو برده شده است (شکل ۳۲ـ۴۳). این سیم در میدان مغناطیسی همگن $\vec{\mathbf{B}}$ قرار گرفته است. اگر یک بار الکتریکی ــ یعنی، یک تپ جریان $q = \int i dt$ ــ در داخل سیم فرستاده شود، سیم به بالا خواهد پرید. از ارتفاعی که سیم به آن خواهد رسید، یعنی h، اندازهٔ بار الکتریکی یا تپ جریان را محاسبه کنید. برای این کار فرض کنید که مدت زمان تپ جریان در مقایسه با زمان پرواز سیم بسیار کوتاه است. از این واقعیت بهره بگیرید که ضربه یا تکان یک نیرو برابر است با $\int F dt$، که این خود برابر mv است. (راهنمایی: بین $\int i dt$ و $\int F dt$ رابطه‌ای برقرار کنید.) برای $B = ۰٫۱۲\ \mathrm{T}$، $m = ۱۳\ \mathrm{g}$، $L = ۲۰\ \mathrm{cm}$، و $h = ۳٫۱\ \mathrm{cm}$ مقدار q را محاسبه کنید.



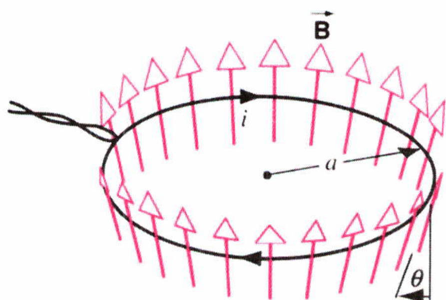
شکل ۳۲ـ۴۳ مسئلهٔ ۱۵.

۱۶. ثابت کنید که معادلهٔ (۳۲ـ۳۴)، نه تنها برای قابهای مستطیل‌شکل ۳۲ـ۲۶، بلکه برای تمام حلقه‌های بسته با هر شکل دلخواهی برقرار است. (راهنمایی: به‌جای قاب یا حلقهٔ با شکل دلخواه، مجموعه‌ای از حلقه‌های دراز و باریک تقریباً مستطیلی‌شکل را مجاور هم قرار دهید که حدوداً تا جایی که به توزیع جریان مربوط می‌شود معادل آن باشد.)

۱۷. سیمی به طول L حامل جریان i است. نشان دهید که اگر این سیم را به‌صورت پیچهٔ دایره‌ای درآوریم، بیشترین گشتاور نیرو در میدان مغناطیسی مشخص وقتی حاصل می‌شود که پیچه تنها شامل یک حلقه باشد و بیشترین مقدار گشتاور نیرو عبارت است از

$$\tau = \frac{۱}{۴\pi} L^۲ i B$$

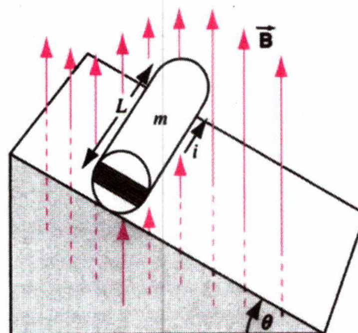
۱۸. در شکل ۳۲ـ۴۴ حلقه سیمی به شعاع a را نشان داده‌ایم که بر جهت کلی یک میدان مغناطیسی متقارن واگرای شعاعی عمود است. میدان مغناطیسی در حلقه در همه‌جا دارای اندازهٔ یکسان B است و جهت میدان در حلقه در همه‌جا با خط عمود بر صفحهٔ حلقه زاویهٔ θ می‌سازد. سیمهای رابط که جریان را به حلقه می‌رسانند چنان در هم تابیده شده‌اند که تأثیری در مسئله ندارند. وقتی حلقهٔ حامل جریان i، در جهت نشان داده‌شده در شکل باشد، جهت و اندازهٔ نیرویی را که میدان بر حلقه وارد می‌کند معین کنید.



شکل ۳۲ـ۴۴ مسئلهٔ ۱۸.

۱۹. در شکل ۳۲ـ۴۵ یک استوانهٔ چوبی به جرم $m = ۲۶۲\ \mathrm{g}$ و طول $L = ۱۲٫۷\ \mathrm{cm}$ را نشان داده‌ایم که $N = ۱۳$ دور سیم را به‌صورت طولی دور آن پیچیده‌ایم، به‌طوری که صفحهٔ این قاب شامل محور استوانه است. حداقل چه جریانی باید از این قاب بگذرد تا یک میدان مغناطیسی یکنواخت قائم به شدت $۴۴۷\ \mathrm{mT}$، مانع غلتش

استوانه روی سطح شیبداری بشود که با افق زاویهٔ θ می‌سازد. فرض کنید که سیم‌پیچها موازی سطح شیبدارند.



شکل ۳۲ـ۴۵ مسئلهٔ ۱۹.

مسئله‌های کامپیوتری

۱. با استفاده از میدان مغناطیسی مشخص‌شده در معادلهٔ (۳۲ـ۱۷) وقتی $B_\circ = ۰٫۱۵\,\mathrm{T}$ است، مسیر حرکت ذرهٔ آلفایی را معین کنید که در آغاز از مبدأ مختصات در امتداد محور x با سرعت $v_\circ = ۳٫۰ \times 10^{6}\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند (شکل ۳۲ـ۱۷ را ببینید). مدت زمانی که طول می‌کشد تا ذره به مکان آغازین خود بازگردد و بیشترین فاصله‌ای را که از مبدأ مختصات دور می‌شود معین کنید. این مقدارها را با مقدارهای متناظری که از میدان یکنواخت $B_\circ$ به‌دست می‌آید مقایسه کنید.

۲. یک میدان مغناطیسی متقارن استوانه‌ای در ناحیهٔ معینی از فضا با عبارت $\vec{\mathbf{B}} = (B_\circ r/a)\hat{\mathbf{k}}$ مشخص شده است، که در آن r فاصلهٔ عمودی از محور z است. مسیر حرکت الکترونی را به‌دست آورید که از نقطه‌ای روی محور z و عمود بر آن با سرعت اولیهٔ $۰٫۰۵۰c$ گسیل شده است. بیشترین مسافتی که این الکترون می‌تواند قبل از بازگشت از محور دور شود چقدر است؟

۳۳

میدان مغناطیسی جریان

در فصل قبل اثر میدان مغناطیسی را بر بار الکتریکی متحرک مطالعه کردیم. اکنون به خود چشمهٔ میدان بازمی‌گردیم، و در این فصل میدان مغناطیسی ایجادشده توسط بارهای متحرک، به‌ویژه جریان موجود در سیمها را مطالعه می‌کنیم.

مانند بررسیهای قبلی در مورد میدانهای الکتریکی ناشی از برخی توزیعهای سادهٔ بار، در این فصل میدانهای مغناطیسی حاصل از برخی توزیعهای سادهٔ جریان مانند سیمهای مستقیم و حلقه‌های دایره‌ای را بررسی می‌کنیم. سرانجام، نشان می‌دهیم که ارتباط بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ژرف‌تر از تشابه صرف معادله‌هاست و وقتی توزیعهای بار یا جریان از چارچوب مرجعهای لَخت متفاوت مشاهده شوند، این ارتباط به تبدیل میدانها به یکدیگر می‌انجامد.

۳۳ـ۱ میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک

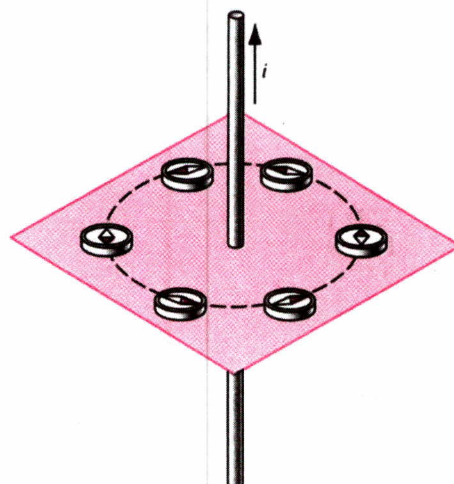
در فصل پیشین نیروی وارد بر بار متحرک را از طرف میدان مغناطیسی مطالعه کردیم. با مقایسه با میدان الکتریکی، که در آن بارهای الکتریکی ساکن هم چشمهٔ میدان و هم کاوهٔ شناسایی آن بود، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که بارهای الکتریکی متحرک، که قبلاً نشان داده‌ایم، کاوهٔ شناسایی میدان مغناطیسی هستند، می‌توانند نقش چشمه‌های میدان را هم داشته باشند.

این چشمداشت اولین بار در سال ۱۸۲۰ توسط هانس کریستیان اُرستد* ثابت شد، همان‌طورکه در شکل ۳۳ـ۱ نشان داده شد، او مشاهده کرد که وقتی قطب‌نمایی در نزدیکی سیم مستقیم حامل جریان قرار داده شود، عقربه همواره در راستای مماس بر دایره‌ای که حول سیم ترسیم می‌شود قرار می‌گیرد (تأثیر میدان مغناطیسی زمین را نادیده می‌گیریم). کشف اُرستد اولین ارتباط بین الکتریسیته و مغناطیس را فراهم آورد.

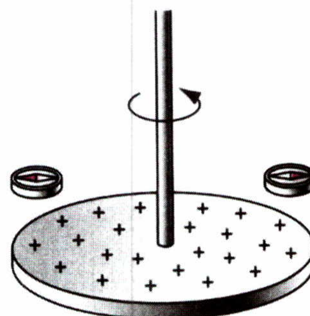
شواهد تجربی مستقیم جهت اثبات وجود میدان مغناطیسی برای بار الکتریکی متحرک تا سال ۱۸۷۶ به‌دست نیامد. در آن سال هنری رولند** در آزمایشی که به‌صورت شماتیک در شکل ۳۳ـ۲ نشان داده شد، وجود این وابستگی را اثبات کرد. او یک قرص باردار فراهم کرد (برای

* هانس کریستیان اُرستد (Hans Christian Oersted، ۱۷۷۷ تا ۱۸۵۱) فیزیک و شیمیدان دانمارکی است. کشف او که سیم حامل جریان می‌تواند عقربهٔ قطب‌نما را منحرف کند، به‌طور غیرمنتظره‌ای به هنگام تدریس در کلاسی در دانشگاه کپنهاگ رخ داد. یکای شدت میدان مغناطیسی (H) به افتخار او به نامش نامگذاری شده است.

** هنری رولند (Henry Rowland، ۱۸۴۸ تا ۱۹۰۱) یک فیزیکدان امریکایی است که امروزه بیشتر به‌خاطر کار پیشگامانه‌اش در زمینهٔ ساخت توریهای پراش به یاد مانده است. او از توریهای پراش برای طیف‌نمایی دقیق اپتیکی از جمله اندازه‌گیریهای مربوط به طول موجهای طیف خورشیدی استفاده می‌کرد. رولند اولین رئیس انجمن فیزیک امریکا بود.



شکل ۳۳ـ۱ آزمایش اُرستد. جهت عقربهٔ قطب‌نما همواره بر جهت جریان در سیم عمود است.



شکل ۳۳ـ۲ نمودار طرح‌وار آزمایش رولند. بارهای متحرک روی سطح طلایی قرص چرخنده، میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورند که عقربهٔ قطب‌نما را منحرف می‌کند. در عمل، این انحراف بسیار بسیار کوچک است و برای آشکارسازی به ابزاری بسیار حساس‌تر از عقربهٔ قطب‌نما نیاز داریم.

این کار، باتری را به لایه‌ای از طلاکه روی سطح قرصی از یک مادهٔ عایق نشانده شده بود وصل کرد). با چرخاندن این قرص حول محورش، او توانست بارهای متحرک ایجاد کند و با آویزان کردن یک عقربهٔ مغناطیده در نزدیکی قرص اثر مغناطیسی بارهای متحرک را نشان دهد.

هدف ما در این فصل مطالعهٔ برهم‌کنش بین دو بار متحرک است، درست به همان ترتیب که کولن برهم‌کنش الکتریکی بین دو بار ساکن را مطالعه کرد. کولن می‌توانست نیروی الکتروستاتیکی را به‌طور مستقیم اندازه‌گیری کند و ما هم در اصول باید بتوانیم همان کار را انجام دهیم ــ یعنی، باید بتوانیم نیروی مغناطیسی بین دو بار متحرک را اندازه بگیریم. متأسفانه، این نیرو بسیار بسیار کوچک است و اندازه‌گیری آن فوق‌العاده دشوار؛ مثلاً، در آزمایش رولند، میدان مغناطیسی ایجادشده توسط قرص باردار چرخندهٔ او فقط در حدود ۰٫۰۰۰۰۱ میدان زمین بود! با وجود بینهایت کوچک بودن اندازهٔ میدان مغناطیسی تک‌بار متحرک، از نظر مفهومی آسانتر است که مطالعهٔ چشمه‌های میدان مغناطیسی را با این بحث آغاز کنیم که چگونه تک‌بار متحرک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. بعداً خواهیم دید که چرا این رهیافت عملی نیست و چرا ساده‌تر است که در آزمایشگاه، میدانهای مغناطیسی را با بهره‌گیری از بارهای متحرک به‌صورت جریان الکتریکی در سیم ایجاد کنیم.

بنابراین یک "آزمایش ذهنی" را مورد توجه قرار می‌دهیم، که در آن تک‌بار الکتریکی q را با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ پرتاب کرده و میدان مغناطیسی را به‌وسیلهٔ یک عقربهٔ مغناطیسی آویخته، که می‌تواند آزادانه در هر راستایی قرار گیرد، آشکارسازی می‌کنیم. برای دوری جستن از مسائل مرتبط با نسبیت، نیاز داریم در چارچوب مرجعی که آزمایش انجام می‌شود سرعت ذره را (در مقایسه با سرعت سیر نور) کوچک نگه داریم. آزمایش را در ناحیه‌ای انجام می‌دهیم که میدان مغناطیسی زمین چشم‌پوشیدنی باشد. (برای یافتن چنین ناحیه‌ای ضرورت ندارد که به فضا سفر کنیم؛ در آزمایشگاه می‌توانیم از یک پیچهٔ حامل جریان استفاده کنیم که میدانی ایجاد می‌کند که میدان زمین را حذف می‌کند.) در شکل ۳۳ـ۳(الف) حاصل اندازه‌گیریهای انجام‌شده از میدان مغناطیسی را در مکانهای متفاوت نشان داده‌ایم. بار متحرک میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ ایجاد می‌کند، و عقربهٔ مغناطیسی جهت میدان را در هر موقعیت نشان می‌دهد. به‌طور اصولی، می‌توانیم شدت میدان را نیز اندازه‌گیری کنیم، این کار را مثلاً با اندازه‌گیری نیروی وارد بر یک ذرهٔ باردار متحرک دیگر انجام دهیم، به همان روشی که در بخش ۳۲ـ۲ توصیف کردیم.

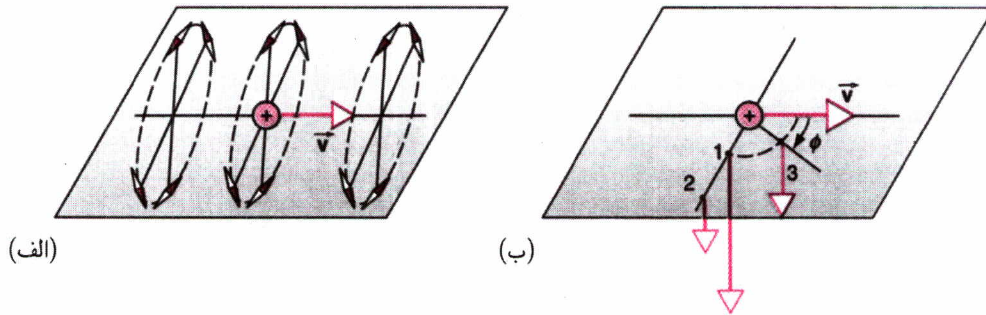
اگر واقعاً می‌توانستیم این آزمایشها را انجام دهیم، برخی از خاصیتهای میدان مغناطیسی ناشی از یک ذرهٔ باردار متحرک را کشف می‌کردیم:

۱. شدت میدان، با اندازهٔ سرعت v و نیز مقدار بار q نسبت مستقیم دارد.

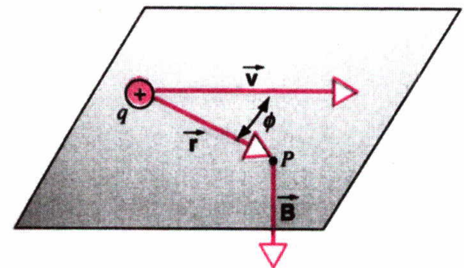
۲. اگر سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ در جهت مخالف باشد یا علامت بار q تغییر کند، جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ وارونه می‌شود.

۳. میدان در همه‌جا در راستای سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ (چه به سمت جلو و چه به سمت عقب) برابر صفر است. در سایر راستاها نسبت به $\vec{\mathbf{v}}$، همان‌طور که در شکل ۳۳ـ۳(ب) نشان داده‌ایم، میدان به‌صورت تابع $\sin\phi$ تغییر می‌کند.

۴. $\vec{\mathbf{B}}$ مماس است بر دایره‌ای که حول $\vec{\mathbf{v}}$ در صفحات عمود بر $\vec{\mathbf{v}}$ ترسیم شود، و جهت $\vec{\mathbf{B}}$ با استفاده از قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود (اگر شست دست راست در جهت $\vec{\mathbf{v}}$ قرار گیرد، آنگاه پیچش



شکل ۳۳ـ۳ (الف) یک عقربهٔ قطب‌نمای آویختهٔ آزاد، جهت میدان مغناطیسی ناشی از یک بار الکتریکی متحرک را در مکانهای متفاوت نشان می‌دهد. (ب) میدان در نقطهٔ ۲ یک‌چهارم میدان در نقطهٔ ۱ است، زیرا فاصلهٔ نقطهٔ ۲ دو برابر فاصلهٔ نقطهٔ ۱ از بار متحرک است. نقطهٔ ۳ در همان فاصله‌ای از بار قرار دارد که نقطهٔ ۱، ولی میدان در نقطهٔ ۳ به نسبت ضریبی معادل $\sin\phi$ از میدان در نقطهٔ ۱ کوچکتر است.



شکل ۳۳ـ۴ میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک در نقطهٔ P، عمود است بر صفحه‌ای که شامل $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$ است.

انگشتان جهت $\vec{\mathbf{B}}$ را نشان می‌دهد). روی هر دایرهٔ مشخصی، اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ در تمام نقطه‌ها یکسان است.

۵. روی نقطه‌های واقع بر خطی که عمود بر راستای حرکت q کشیده می‌شود (مانند شکل ۳۳ـ۳(ب)) و یا به‌طور هم‌ارز روی دایره‌هایی که با شعاعهای فزاینده حول خط حرکت بار ترسیم می‌شوند، درمی‌یابیم که اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ به‌صورت $1/r^2$ کاهش پیدا می‌کند، که در این رابطه r فاصلهٔ بار q از نقطهٔ مشاهده است.

ساده‌ترین راه تعریف $\vec{\mathbf{B}}$ که با این مشاهده‌ها سازگار است در شکل ۳۳ـ۴ ترسیم شده است. در نقطهٔ دلخواه P (نقطه‌ای که می‌خواهیم در آنجا میدان مغناطیسی را معین کنیم)، $\vec{\mathbf{B}}$ عمود است بر صفحه‌ای که به‌وسیلهٔ $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$ (برداری که موقعیت P را نسبت به بار q مشخص می‌کند) تعریف می‌شود. از مشاهده‌هایمان، می‌دانیم که اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ با q، v و $\sin\phi$ نسبت مستقیم دارد و با r^2 نسبت عکس:

$$B \propto \frac{qv\sin\phi}{r^2} \qquad (۳۳ـ۱)$$

جهت $\vec{\mathbf{B}}$ نسبت به $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$، قاعدهٔ پیداکردن حاصلضرب برداری (ضربدری) را به ما یادآوری می‌کند. در عبارت $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$، بردار $\vec{\mathbf{c}}$ عمود است بر صفحه‌ای که حاوی بردارهای $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ است. بنابراین معادلهٔ (۳۳ـ۱) را می‌توانیم به‌صورت برداری زیر بنویسیم:

$$\vec{\mathbf{B}} = K\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۳۳ـ۲)$$

که در این معادله، K ثابت مربوط به تناسب است که باید مشخص شود، و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه (به طول واحد) در جهت بردار $\vec{\mathbf{r}}$ است. (ممکن است تمایل داشته باشید بخش ۲۵ـ۴ را مرور کنید، که در آنجا از نمادگذاری برداریکهٔ مشابهی برای بیان قانون کولن استفاده کردیم.) چون $\hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}/r$ است، می‌توانیم معادلهٔ (۳۳ـ۲) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\vec{\mathbf{B}} = K\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3} \qquad (۳۳ـ۳)$$

با آنکه در مخرج کسر این معادله عامل r^3 وجود دارد، میدان به‌صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند، زیرا در صورت این کسر نیز عامل r موجود است.

تنها کاری که باقی می‌ماند، به‌دست‌آوردن یک عبارت کامل برای میدان مغناطیسی بار متحرک است، تا از آنجا ضریب تناسب معادلهٔ (۳۳ـ۳) را معین کنیم، درست به همان صورت که در قانون کولن ثابت $1/4\pi\epsilon_0$ را قرار دادیم. ثابتهای مربوط به معادله‌های میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی کمیتهای مستقل از یکدیگر نیستند؛ آنها از طریق سرعت سیر نور به‌هم وابسته‌اند، که این مطلب را در فصل ۳۸ بحث خواهیم کرد. از آنجا که سرعت سیر نور یک کمیت تعریف شده است، دو گزینه پیش رو داریم یا (۱) از قانون نیروی الکتریکی (قانون کولن) برای تعریف ثابت الکتریکی استفاده کنیم و سپس با بهره‌گیری از مقدار سرعت سیر نور ثابت مغناطیسی را به‌دست آوریم، یا اینکه (۲) از قانون نیروی مغناطیسی (نیروی بین سیمهای حامل جریان، که بعداً در این فصل آنها را مطالعه خواهیم کرد) برای تعریف ثابت

مغناطیسی استفاده کنیم و سپس از مقدار سرعت سیر نور بهره بگیریم تا ثابت الکتریکی را معین کنیم. چون نیروی مغناطیسی بین سیمهای حامل جریان را می‌توانیم با دقت خیلی بیشتری از نیروی الکتریکی بین بارها اندازه‌گیری کنیم، روش دوم را اختیار می‌کنیم.

ضریب تناسب K در معادلهٔ (۳۳ـ۳) را تعریف می‌کنیم که در یکاهای SI دارای مقدار دقیق $۱۰^{-۷}$ تسلا · متر بر آمپر $(\mathrm{T \cdot m/A})$ باشد. ولی، همان‌طورکه در مورد الکتروستاتیک مشاهده کردیم، مناسب‌تر است که این ضریب تناسب را به‌صورت متفاوتی بنویسیم:

$$K = \frac{\mu_۰}{۴\pi} = ۱۰^{-۷}\mathrm{T \cdot m/A}$$

ثابت $\mu_۰$ از نظر تاریخی به‌عنوان ثابت تراوایی شناخته شده است، ولی در اینجا آن را فقط ثابت مغناطیسی می‌خوانیم. این ثابت دارای مقدار دقیق زیر است

$$\mu_۰ = ۴\pi \times ۱۰^{-۷}\mathrm{T \cdot m/A}$$

ثابت مغناطیسی $\mu_۰$ در محاسبهٔ میدانهای مغناطیسی نقشی شبیه به نقش ثابت الکتریکی $\epsilon_۰$ در محاسبهٔ میدانهای الکتریکی بازی می‌کند. این دو ثابت از طریق سرعت سیر نور به‌هم وابسته‌اند: $c = (\epsilon_۰ \mu_۰)^{-۱/۲}$. با تعریف $\mu_۰$ و c، مقدار $\epsilon_۰$ دقیقاً مشخص می‌شود.

اکنون می‌توانیم عبارت کاملی برای میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک بنویسیم:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\,\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^۲} = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\,\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^۳} \qquad (۳۳\text{ـ}۴)$$

مقدار میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$B = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\,\frac{|q|v\,\sin\phi}{r^۲} \qquad (۳۳\text{ـ}۵)$$

که در این معادله، ϕ زاویهٔ بین $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$ است.

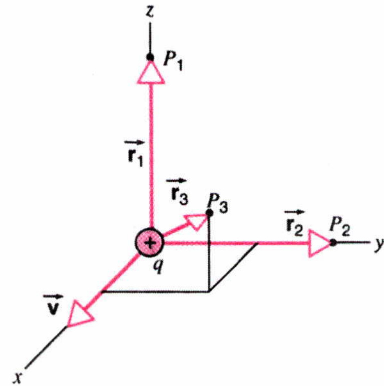
براساس این آزمایش ذهنی، توانستیم چندین خاصیت میدان مغناطیسی ایجادشده به‌وسیلهٔ بار متحرک را شناسایی کنیم، که یکی از این خاصیتها بستگی هندسی بسیار مهم بین جهت سرعت و جهت میدان است. اکنون تبدیل این رابطه به رابطهٔ مفیدتر مربوط به میدان مغناطیسی ایجادشده توسط سیمهای عامل جریان کاری ساده و پیش‌پا افتاده است.

چرا میدان مغناطیسی مشخص‌شده به‌وسیلهٔ معادله‌های (۳۳ـ۴) و (۳۳ـ۵) خیلی مفید نیستند؟ وقتی که میدانهای الکتریکی را مورد مطالعه قرار دادیم، بیشتر به میدان الکتریکی پایایی که توسط بارهای ساکن ایجاد شده بود، توجه داشتیم. این وضعیت را با عنوان الکتروستاتیک معرفی کردیم. در اینجا هم مغناطوستاتیک مورد توجه ماست ــ ایجاد میدانهای مغناطیسی پایا به‌وسیلهٔ بارهایی که حرکت آنها تغییر نکند. تک‌بار متحرک شکل ۳۳ـ۴ این معیار را برآورده نمی‌کند؛ یک لحظه پس از وضعیتی که در شکل ترسیم شده است، بار در موقعیت دیگری نسبت به نقطهٔ P قرار دارد، و دیگر هیچ باری در موقعیت قبلی آن وجود ندارد. یک لحظه بعد، میدان مغناطیسی متفاوت دیگری در نقطهٔ P وجود خواهد داشت. برای حفظ میدان مغناطیسی پایا در نقطهٔ P که ناشی از بار در حال حرکت در نقطهٔ نشان داده‌شده باشد، ضرورت دارد ترتیبی داده شود که بار ذره به محض خروج از آن موقعیت نابود شود و بار الکتریکی جدیدی با همان سرعت به آن موقعیت تزریق شود که این امر، سناریویی بسیار نامحتمل است. از طرف دیگر، جریان پایا دقیقاً همان چیزی را که می‌خواهیم به‌دست می‌دهد: حرکت بدون تغییری از بارها میدان مغناطیسی پایایی ایجاد می‌کند. در بخش بعدی معادله‌های (۳۳ـ۴) و (۳۳ـ۵) را به‌صورت قابل استفاده در مورد جریانهای پایا در می‌آوریم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۱ ذرهٔ آلفایی $(q = +۲e)$ با سرعت $c = ۱٫۵۰ \times ۱۰^{۶}\mathrm{m/s}$ ۰٫۰۰۵۰ در جهت مثبت x در حرکت است. میدان مغناطیسی این ذره را، وقتی از مبدأ مختصات می‌گذرد، در نقطه‌های (الف) $P_۱$: $x = ۰$، $y = ۰$، $z = +۲٫۰\ \mathrm{cm}$؛ (ب) $P_۲$: $x = ۰$، $y = +۲٫۰\ \mathrm{cm}$، $z = ۰$؛ (ج) $P_۳$: $x = +۱٫۰\ \mathrm{cm}$، $y = +۱٫۰\ \mathrm{cm}$، $z = +۱٫۰\ \mathrm{cm}$ پیدا کنید.

حل. (الف) در شکل ۳۳ـ۵، $\vec{\mathbf{r}}_۱$ در جهت $+z$ قرار دارد (از بار q به‌سوی نقطهٔ $P_۱$) طول بردار $\vec{\mathbf{r}}_۱$ برابر است با فاصلهٔ بین مبدأ مختصات و نقطهٔ $P_۱$، یا $۲٫۰\ \mathrm{cm}$. بردارهای $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{r}}_۱$ در صفحهٔ xz قرار دارند؛ بنابراین $\vec{\mathbf{B}}$ باید در جهت مثبت یا منفی محور y بر آن صفحه عمود باشد. جهت حاصلضرب $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}_۱$ مشخص می‌کند که $\vec{\mathbf{B}}$ باید در جهت $-y$ باشد. اندازهٔ بردار $\vec{\mathbf{B}}$ از معادلهٔ (۳۳ـ۵) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}B &= \frac{\mu_۰}{۴\pi}\,\frac{qv\,\sin\phi}{r_۱^۲}\\ &= (۱۰^{-۷}\mathrm{T \cdot m/A})\\ &\quad \frac{(۲)(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})(۱٫۵۰ \times ۱۰^{۶}\mathrm{m/s})(\sin ۹۰^\circ)}{(۰٫۰۲۰\ \mathrm{m})^۲}\\ &= ۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۶}\mathrm{T}\end{aligned}$$



شکل ۳۳ـ۵ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۱.

(ب) در نقطهٔ $P_۲$، $\vec{\mathbf{r}}_۲$ در جهت $+y$ است، در نتیجه $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}_۲$ مشخص، می‌کند که $\vec{\mathbf{B}}$ در جهت $+z$ است. چون فاصلهٔ بار q از نقطهٔ $P_۲$ برابر فاصلهٔ بار q از نقطهٔ $P_۱$ است. اندازهٔ میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در نقطهٔ $P_۲$ همان اندازهٔ مشخص‌شده در قسمت (الف) برای $P_۱$ است. در واقع، $\vec{\mathbf{B}}$ در تمام نقطه‌های روی دایره‌ای به شعاع $r = ۲٫۰\ \text{cm}$ به مرکز بار q در صفحهٔ yz مقدار یکسانی دارد.

(ج) در نقطهٔ $P_۳$، $r_۳ = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} = ۱٫۷۳\ \text{cm}$ است. بردار $\vec{\mathbf{r}}_۳$، از نقطهٔ q به نقطهٔ P، و بردار $\vec{\mathbf{v}}$ صفحه‌ای تشکیل می‌دهند که با محورهای y و z زاویهٔ $۴۵°$ می‌سازد (شکل ۳۳ـ۵). زاویهٔ ϕ بین $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{r}}_۳$ برابر $۵۴٫۷°$ است، که این را باید نشان بدهید. اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ در نقطهٔ $P_۳$ برابر است با

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_\circ}{۴\pi} \frac{qv\ \sin\phi}{r_۳^۲} \\ &= (۱۰^{-۷}\text{T}\cdot\text{m/A}) \\ &\times \frac{(۲)(۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۱٫۵۰ \times ۱۰^{۶}\text{m/s})(\sin ۵۴٫۷°)}{(۰٫۰۱۷۳\ \text{m})^۲} \\ &= ۱٫۳ \times ۱۰^{-۱۶}\text{T} \end{aligned}$$

$\vec{\mathbf{B}}$ بر صفحهٔ $\vec{\mathbf{r}}_۳$ و $\vec{\mathbf{v}}$ عمود است. در دستگاه مختصات دکارتی، مؤلفه‌های B_y و B_z از نظر اندازه با هم برابرند، ولی B_y یک کمیت منفی و B_z یک کمیت مثبت است. به‌صورت معادل، $\vec{\mathbf{B}}$ مماس بر دایره‌ای حول محور x است که مرکز آن به‌جای $x = ۰$ در $x = ۱٫۰\ \text{cm}$ قرار دارد. شعاع این دایره $\sqrt{y^۲ + z^۲} = ۱٫۴۱\ \text{cm}$ است. توجه کنید که در این حالت، برخلاف حالتهای (الف) و (ب)، $r_۳$ شعاع دایره‌ای نیست که $\vec{\mathbf{B}}$ بر آن مماس است.

میدانهای مغناطیسی را که در این مسئلهٔ نمونه به‌دست آوردیم بسیار کوچک و در حدود ۱۲ مرتبهٔ بزرگی از میدان مغناطیسی زمین کوچکترند. از این محاسبه‌ها درمی‌یابیم که چرا تلاش برای اندازه‌گیری نیروی بین تک‌بارهای متحرک نومیدکننده است. گرچه، میدانهای ناشی از تک‌ذره‌ها، در فاصله‌هایی متناظر با ابعاد اتمی ($۱۰^{-۱۰}\text{m}$) از مرتبهٔ $۱\,\text{T}$ است، که قطعاً می‌توانند آثاری قابل اندازه‌گیری به‌وجود آورند. در مقیاس اتمی، نیروی مغناطیسی بین ذرات باردار متحرک اغلب پیامدهایی مشاهده‌پذیر دارند، که در فصل ۳۵ بررسی می‌شود.

۳۳ـ۲ میدان مغناطیسی جریان

در آزمایشگاه برای ایجاد میدان مغناطیسی به‌جای حرکت تک‌بارها از سیمهای حامل جریان استفاده می‌کنیم. در این بخش، نتیجه‌های بخش پیشین را گسترش می‌دهیم تا این امکان را فراهم آورد که میدان مغناطیسی ناشی از جریان را معین کنیم. روش کلی ما این است که ابتدا میدان ناشی از عنصر کوچک سیم را پیدا کنیم و سپس با بهره‌گیری از روشهای انتگرال‌گیری میدان ناشی از جریان در تمامی طول سیم را به‌دست آوریم.

این روش مشابه روشی است که در بخش ۲۶ـ۴ برای یافتن میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوستهٔ بار مورد استفاده قرار دادیم. در فصل ۲۶، مسئله را با یافتن میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای آغاز کردیم، که می‌توانیم آن را به‌صورت $\vec{\mathbf{E}} = (q/۴\pi\epsilon_\circ r^۲)\hat{\mathbf{r}}$ بنویسیم. برای یافتن میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوستهٔ بار، فرض کردیم که جسم از اجزای بینهایت کوچکی با بار الکتریکی dq به‌وجود آمده باشد، که می‌توانیم هر کدام از آنها را بار نقطه‌ای در نظر بگیریم. این جزء بینهایت کوچک در میدان کل به اندازهٔ $d\vec{\mathbf{E}} = (dq/۴\pi\epsilon_\circ r^۲)\hat{\mathbf{r}}$ مشارکت دارد. میدان الکتریکی کل با افزودن مشارکت همهٔ عنصرهای بار روی هم به‌دست می‌آید: یعنی، $\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}}$، که یک روش خلاصه‌نویسی برای نمایش میدان کل است که هر کدام از مؤلفه‌های آن به‌صورت $E_x = \int dE_x$ و الی‌آخر است.

چگونه در یک روش محاسبهٔ مشابه برای میدان مغناطیسی، یک نمو جریان را نمایش دهیم؟ به‌عنوان سرنخی دربارهٔ چگونگی انجام این کار، می‌توانیم بستگی بین نیروی مغناطیسی وارد بر یک تک‌ذرهٔ باردار متحرک، $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (معادلهٔ ۳۳ـ۳)، و نیروی مغناطیسی وارد بر یک عنصر جریان، $d\vec{\mathbf{F}}_B = id\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (معادلهٔ ۳۲ـ۲۹)، را که در فصل پیشین به‌دست آوردیم، مرور کنیم. در این معادله، $d\vec{\mathbf{L}}$

برداری است که طول آن برابر با طول یک عنصر یا جزء از سیم است و جهت آن جهت جریان در آن عنصر. یعنی، می‌توانیم از عبارتی که نیروی وارد بر یک تک‌ذرهٔ باردار متحرک را توصیف می‌کند، با جایگزین کردن $id\vec{\mathbf{L}}$ به‌جای $q\vec{\mathbf{v}}$ به‌عبارتی برسیم که نیروی وارد بر عنصر جریان را توصیف می‌کند.

می‌توانیم معادلهٔ (۳۳ـ۴) را دقیقاً به همین روش اصلاح کنیم. می‌خواهیم سهم $d\vec{\mathbf{B}}$، میدان مغناطیسی ناشی از یک عنصر جریان، را مشخص کنیم که می‌توانیم چنین تصور کنیم که به‌وسیلهٔ عنصر بار dq که با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ حرکت می‌کند نمایش یافته باشد:

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\,\frac{dq\vec{\mathbf{v}}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۳۳ـ۶)$$

می‌توانیم سرعت را به‌صورت $\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{s}}/dt$ بنویسیم، به‌طوری که بار dq در بازهٔ زمانی dt جابه‌جایی $d\vec{\mathbf{s}}$ را از سر می‌گذراند. اکنون داریم

$$dq\vec{\mathbf{v}} = dq\frac{d\vec{\mathbf{s}}}{dt} = \frac{dq}{dt}d\vec{\mathbf{s}} = id\vec{\mathbf{s}} \qquad (۳۳ـ۷)$$

با جایگزین کردن معادلهٔ (۳۳ـ۷) در معادلهٔ (۳۳ـ۶)، می‌رسیم به

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\,\frac{id\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\,\frac{id\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \qquad (۳۳ـ۸)$$

این عبارت به قانون بیوـساوار مشهور است. جهت بردار $d\vec{\mathbf{B}}$ همان جهت بردار $d\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{r}}$ است. اندازهٔ عنصر میدان $d\vec{\mathbf{B}}$ چنین است

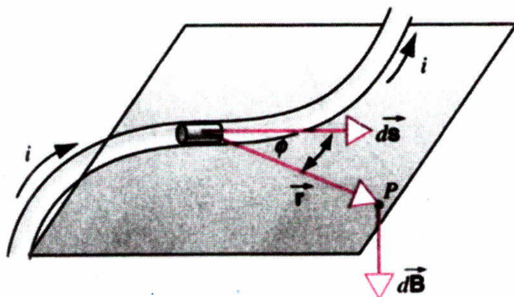
$$dB = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\,\frac{ids\sin\phi}{r^2} \qquad (۳۳ـ۹)$$

که در اینجا ϕ زاویهٔ بین بردار $d\vec{\mathbf{s}}$، که جهت جریان را مشخص می‌کند، و بردار $\vec{\mathbf{r}}$، از عنصر جریان به نقطهٔ مشاهدهٔ P، است. شکل ۳۳ـ۶ این ارتباط برداری را نشان می‌دهد؛ آن را با شکل ۳۳ـ۴ مقایسه کرده و توجه کنید که این دو شکل چقدر به‌هم شبیه‌اند.

برای یافتن میدان کل $\vec{\mathbf{B}}$ ناشی از تمامی توزیع جریان، باید روی تمام عناصر جریان $id\vec{\mathbf{s}}$ انتگرال بگیریم:

$$\vec{\mathbf{B}} = \int d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{id\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{id\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \qquad (۳۳ـ۱۰)$$

درست همان‌طورکه در فصل ۲۶ در مورد میدانهای الکتریکی انجام دادیم، در محاسبهٔ این انتگرال، در حالت کلی، باید به این نکته توجه داشته باشیم که تمام عنصرهای $d\vec{\mathbf{B}}$ در یک جهت نیستند (بخش ۲۶ـ۴ را ببینید).

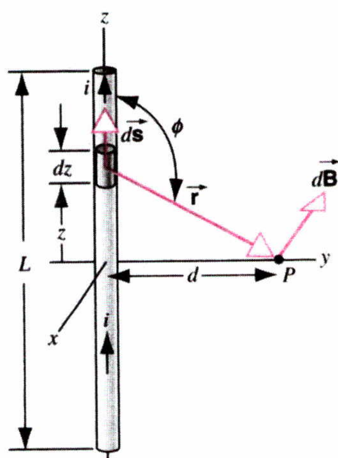


شکل ۳۳ـ۶ میدان مغناطیسی $d\vec{\mathbf{B}}$ به‌وسیلهٔ جزئی از یک سیم حامل جریان به‌وجود آمده است. در قیاس با شکل ۳۳ـ۴، میدان عمود است بر صفحه‌ای که $d\vec{\mathbf{s}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$ را در بر دارد.

اکنون می‌خواهیم ببینیم که چگونه از قانون بیوـساوار برای محاسبهٔ میدانهای مغناطیسی برخی از سیمهای حامل جریان با شکلهای متفاوت استفاده کنیم.

سیم دراز مستقیم

با به‌کارگرفتن قانون بیوـساوار برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان i در یک پارهٔ سیم مستقیم به‌طول L، چگونگی استفاده از آن را نشان می‌دهیم. در شکل ۳۳ـ۷ نمایش هندسی این مسئله را ترسیم کرده‌ایم. سیم در امتداد محور z قرار گرفته است، و می‌خواهیم $\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P روی محور y و در فاصلهٔ d از سیم به‌دست آوریم. مرکز سیم در مبدأ مختصات است، بنابراین P روی عمودمنصف سیم قرار دارد. اولین گام برای انجام محاسبه آن است که یک جزء دلخواه از سیم، مانند $id\vec{\mathbf{s}}$، را که در مختصهٔ z نسبت به مبدأ قرار گرفته است،



شکل ۳۳ـ۷ یک عنصر $id\vec{\mathbf{s}}$، از یک قطعه سیم مستقیم در نقطهٔ P میدان مغناطیسی $d\vec{\mathbf{B}}$ را در جهت منفی x ایجاد می‌کند.

انتخاب کنیم. سهم $d\vec{\mathbf{B}}$ این جزء جریان در میدان ایجادشده در نقطهٔ P با معادلهٔ (۳۳ـ۸) داده شده است که شامل حاصلضرب برداری $d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{r}}$ است. با استفاده از قاعدهٔ دست راست می‌توانیم نشان دهیم که، در نمودار هندسی نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۷، حاصلضرب $d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{r}}$ برداری است که جهت آن به‌سوی x منفی است و می‌بینیم که این موضوع همواره واقعیت دارد بدون توجه به اینکه جزء جریان را در کجای سیم اختیار کرده باشیم. هر جزء $id\vec{\mathbf{s}}$ در سیم، میدانی مانند $d\vec{\mathbf{B}}$ را در جهت منفی x ایجاد می‌کند و بنابراین وقتی تمام اجزای $d\vec{\mathbf{B}}$ را به‌هم بیفزاییم درمی‌یابیم که میدان کل در راستای منفی x است. اکنون چون جهت بردار $\vec{\mathbf{B}}$ را معین کردیم، بازمی‌گردیم تا با استفاده از معادلهٔ (۳۳ـ۹) اندازهٔ آن را به‌دست آوریم.

چون $d\vec{\mathbf{s}}$ در جهت محور z است، داریم $ds = dz$، و z متغیر انتگرال‌گیری خواهد بود که در گسترهٔ $-L/۲$ تا $+L/۲$ تغییر می‌کند. به منظور انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۳۳ـ۹)، ابتدا باید ϕ و r را برحسب متغیر انتگرال‌گیری یعنی z بیان کنیم:

$$r = \sqrt{z^۲ + d^۲}$$

و

$$\sin\phi = \sin(\pi - \phi) = \frac{d}{\sqrt{z^۲ + d^۲}}$$

با انجام جانشانیهای بالا در معادلهٔ (۳۳ـ۹)، می‌رسیم به:

$$dB = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{dz\sin\phi}{r^۲} = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{d}{(z^۲ + d^۲)^{۳/۲}}dz \qquad (۳۳\text{ـ}۱۱)$$

با انجام این انتگرال‌گیری، میدان مغناطیسی کل را به‌دست می‌آوریم:

$$B = \frac{\mu_\circ id}{۴\pi}\int_{-L/۲}^{+L/۲}\frac{dz}{(z^۲ + d^۲)^{۳/۲}}$$

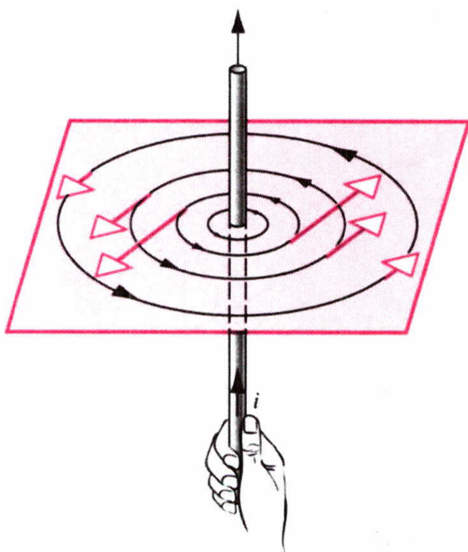
$$= \frac{\mu_\circ i}{۴\pi d}\frac{z}{(z^۲ + d^۲)^{۱/۲}}\Bigg|_{z=-L/۲}^{z=+L/۲}$$

یا

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi d}\frac{L}{(L^۲/۴ + d^۲)^{۱/۲}} \qquad (۳۳\text{ـ}۱۲)$$

در حد، و برای سیم بسیار بلند (یعنی، $L \gg d$) معادلهٔ (۳۳ـ۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi d} \qquad (۳۳\text{ـ}۱۳)$$

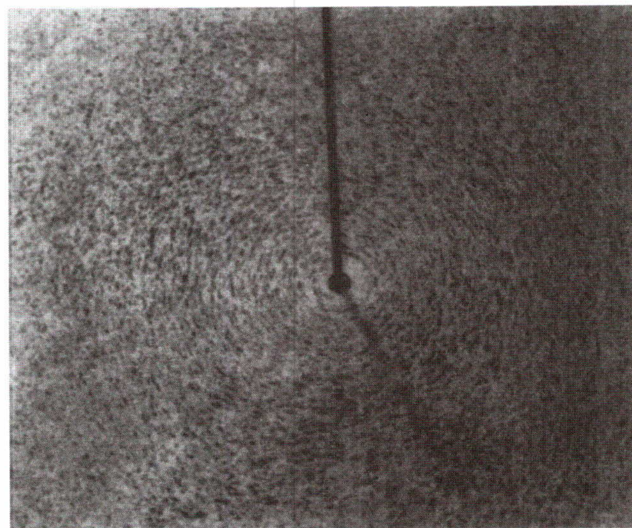


شکل ۳۳ـ۸ خطهای میدان مغناطیسی برای یک سیم بلند و مستقیم حامل جریان دایره‌های هم‌مرکزی گرداگرد سیم هستند. جهت این خطها با قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود.

این مسئله هم‌ارز الکتروستاتیکی آن را به یادمان می‌آورد. قبلاً (در بخش ۲۶ـ۴) با استفاده از قانون کولن و روشهای انتگرال‌گیری برای میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ ناشی از یک میلهٔ باردار بلند رابطه‌ای به‌دست آوردیم، همچنین همین مسئله را با استفاده از قانون گاؤس حل کردیم (بخش ۲۷ـ۵). بعدها، قانونی برای میدانهای مغناطیسی، به‌نام قانون آمپر، را در نظر می‌گیریم این قانون از آن نظر مشابه قانون گاؤس است که محاسبه‌های مربوط به میدان مغناطیسی را در مواردی که مسئله دارای مرتبهٔ بالایی از تقارن است (مانند همین مورد) ساده می‌کند.

درست به همان صورت که در مورد میدانهای الکتریکی انجام دادیم، می‌توانیم میدان مغناطیسی مربوط به یک سیم حامل جریان را به‌وسیلهٔ خطهای میدان مغناطیسی نمایش دهیم. در شکل ۳۳ـ۸ یک مجموعه از خطهای میدان مغناطیسی سیم مستقیم بلند را نشان داده‌ایم. همان‌طورکه با آزمایش اُرستد متوجه می‌شویم (شکل ۳۳ـ۱) و نیز با طرح‌وارهٔ مربوط به براده‌های آهن در نزدیکی یک سیم نشان داده می‌شود (شکل ۳۳ـ۹)، خطهای جریان دایره‌های هم‌مرکزی را در گرداگرد سیم تشکیل می‌دهند.

در هر نقطه، جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ مماس است به خط میدان در آن نقطه. هرچه خطهای میدان نزدیک‌تر به‌هم باشند (مانند نزدیکی سیم حامل جریان) میدان قوی‌تر است و هرچه خطها از هم دورتر باشند میدان ضعیف‌تر است (مانند نقطه‌های دور از سیم حامل جریان).



شکل ۳۳ـ۹ سیم عمود، حامل جریانی است که میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد. برادهٔ آهن که روی یک قطعه مقوا پاشیده می‌شود طرح دایره‌های هم‌مرکز را نشان می‌دهد که معرف میدان مغناطیسی است.

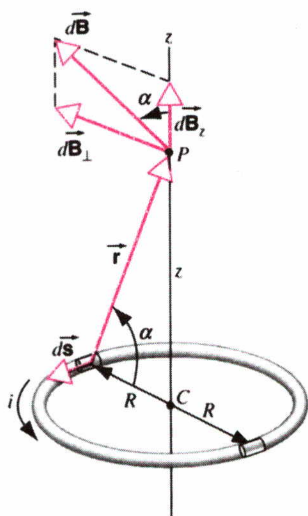
برعکس خطهای میدان الکتریکی ناشی از بارها، که از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می‌شوند. خطهای میدان مغناطیسی ناشی از جریانها حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند که نه آغازی دارند و نه پایانی. برای یافتن جهت خطهای میدان، از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم: اگر سیم را چنان در دست راستتان بگیرید که شستتان در جهت جریان قرار بگیرد، آنگاه انگشتان شما که دور سیم حلقه شده‌اند در جهت میدان قرار دارند.

حلقهٔ جریان دایره‌ای

در شکل ۳۳ـ۱۰ یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع R را نشان داده‌ایم که حامل جریان i است. می‌خواهیم میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P روی محور حلقه و در فاصلهٔ z از مرکز آن محاسبه کنیم.

زاویهٔ ϕ بین جزء جریان $i d\vec{\mathbf{s}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$ برابر ${}^{\circ}۹۰$ است. از قانون بیوـساوار می‌دانیم که بردار $d\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به این جزء بر صفحهٔ متشکل از $i d\vec{\mathbf{s}}$ و $\vec{\mathbf{r}}$ عمود و در نتیجه، همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، بر $\vec{\mathbf{r}}$ عمود است.

فرض کنید که $d\vec{\mathbf{B}}$ را به دو مؤلفه تجزیه کنیم؛ یکی $d\vec{\mathbf{B}}_z$ در امتداد محور حلقه و دیگری $d\vec{\mathbf{B}}_\perp$ عمود بر محور حلقه. فقط مؤلفه‌های $d\vec{\mathbf{B}}_z$ در میدان مغناطیسی کل $\vec{\mathbf{B}}$ در نقطهٔ P سهیم‌اند. این نتیجه پیامد آن است که مؤلفه‌های $d\vec{\mathbf{B}}_z$ برای تمام اجزای جریان روی محور قرار می‌گیرند و مستقیماً با هم جمع می‌شوند؛ ولی مؤلفه‌های $d\vec{\mathbf{B}}_\perp$



شکل ۳۳ـ۱۰ یک حلقه جریان دایره‌ای. جز $i d\vec{\mathbf{s}}$ حلقهٔ، میدان $d\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P روی محور حلقه به‌وجود می‌آورد.

در جهتهای مختلف عمود بر محور قرار می‌گیرند و به دلیل تقارن حاصل‌جمع همهٔ $d\vec{\mathbf{B}}_\perp$های مربوط به یک حلقهٔ کامل برابر صفر است. (یک جزء جریان که به‌طور قطری مقابل جزء نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۱۰ قرارگرفته است، همان $d\vec{\mathbf{B}}_z$ ولی $d\vec{\mathbf{B}}_\perp$ مخالف را ایجاد می‌کند.) بنابراین می‌توانیم انتگرال برداری روی تمام $d\vec{\mathbf{B}}$ها را با یک انتگرال نرده‌ای روی تمام مؤلفه‌های z جایگزین کنیم:

$$B = \int dB_z \qquad (۱۴\text{ـ}۳۳)$$

برای جزء جریان نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۱۰، از قانون بیوـساوار (معادلهٔ ۳۳ـ۹) داریم

$$dB = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\,\frac{ds \sin ۹۰^\circ}{r^۲} \qquad (۱۵\text{ـ}۳۳)$$

همچنین می‌دانیم که

$$dB_z = dB \cos\alpha$$

که از ترکیب آن با معادلهٔ (۳۳ـ۱۵) می‌رسیم به

$$dB_z = \frac{\mu_\circ i \cos\alpha\, ds}{۴\pi r^۲} \qquad (۱۶\text{ـ}۳۳)$$

شکل ۳۳ـ۱۰ نشان می‌دهد که r و α مستقل از یکدیگر نیستند. این دو کمیت را برحسب z بیان می‌کنیم، که فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز حلقه است. این رابطه‌ها عبارت‌اند از

$$r = \sqrt{R^۲ + z^۲}$$

و

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^{۲} + z^{۲}}}$$

با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ (۳۳ـ۱۶) برای dB_z نتیجه می‌گیریم

$$dB_z = \frac{\mu_\circ iR}{۴\pi(R^{۲} + z^{۲})^{۳/۲}} ds \qquad (۳۳\text{ـ}۱۷)$$

توجه کنید که کمیتهای R ،i و z برای همهٔ اجزای جریان مقدار یکسانی دارند. از انتگرال‌گیری این معادله نتیجه می‌گیریم

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_\circ iR}{۴\pi(R^{۲} + z^{۲})^{۳/۲}} \int ds \qquad (۳۳\text{ـ}۱۸)$$

یا، با توجه به اینکه $\int ds$ به‌سادگی پیرامون حلقه (مساوی $۲\pi R$) است، داریم

$$B = \frac{\mu_\circ iR^{۲}}{۲(R^{۲} + z^{۲})^{۳/۲}} \qquad (۳۳\text{ـ}۱۹)$$

برای یافتن میدان مغناطیسی در مرکز حلقه می‌توانیم مرحله‌های محاسبهٔ بالا را تکرار کنیم. در این حالت، در همه‌جا داریم $r = R$ و قانون بیوـساوار نتیجه می‌دهد:

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R^{۲}} \int ds \qquad (۳۳\text{ـ}۲۰)$$

اگر درگرداگرد دایره انتگرال بگیریم، باز هم انتگرال برابر $۲\pi R$ است و در نتیجه

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲R} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۱)$$

که این نتیجه را می‌توان با قرار دادن $z = ۰$ در معادلهٔ (۳۳ـ۱۹) به‌دست آورد. ولی، می‌توانیم از این روش برای به‌دست‌آوردن میدان در حالتهای کلی‌تری که در آنها جریان در یک دایرهٔ کامل جاری نمی‌شود بلکه فقط درکمانی از دایره جریان پیدا می‌کند استفاده کنیم. فرض کنید که کمان زاویهٔ θ را از مرکز دایره دربر می‌گیرد. در آن صورت، در معادلهٔ (۳۳ـ۲۰)، انتگرال، پیرامون کامل دایره را به‌دست نمی‌دهد بلکه فقط طول کمان $R\theta$ را به‌دست می‌دهد (که وقتی $\theta = ۲\pi$ برابر با $۲\pi R$ است). در این حالت، میدان در مرکز کمان برابر است با

$$B = \frac{\mu_\circ i\theta}{۴\pi R} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۲)$$

در این معادله زاویهٔ θ باید برحسب رادیان بیان شود. باز هم قاعدهٔ دست راست جهت میدان مغناطیسی را به‌دست می‌دهد، که در امتداد محور z است.

اگر $z \gg R$ باشد، به‌طوری که نقطه‌های نزدیک به حلقه در نظر گرفته نشوند، معادله (۳۳ـ۱۹) به شکل زیر درمی‌آید

$$B = \frac{\mu_\circ iR^{۲}}{۲z^{۳}} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۳)$$

این نحوهٔ وابستگی میدان به عکس مکعب فاصله، میدانِ الکتریکیِ ناشی از یک دوقطبی الکتریکی را به یاد می‌آورد (معادلهٔ (۲۶ـ۱۲)) و نیز مسئلهٔ ۱ فصل ۲۶ را برای میدان روی محور دوقطبی ببینید). بیشتر وقتها مناسب است که یک حلقهٔ سیم را به‌عنوان یک دوقطبی مغناطیسی درنظر بگیریم. در مورد اتمها، حلقهٔ جریان ناشی از چرخش الکترونها حول هسته است. گشتاور دوقطبی مغناطیسیِ اتمها را در فصل ۳۵ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۲ در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون با بسامد f، برابر $۶٫۶۰ \times ۱۰^{۱۵}\text{Hz(rev/s)}$، در مسیری به شعاع $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\text{m}$ گرد هسته می‌چرخد. در مرکز این مواد چه میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آید؟

حل. جریان، آهنگ عبور بار از هر نقطه روی مدار است که به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$i = ef = (۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۶٫۶۰ \times ۱۰^{۱۵}\text{Hz}) = ۱٫۰۶ \times ۱۰^{-۳}\text{A}$$

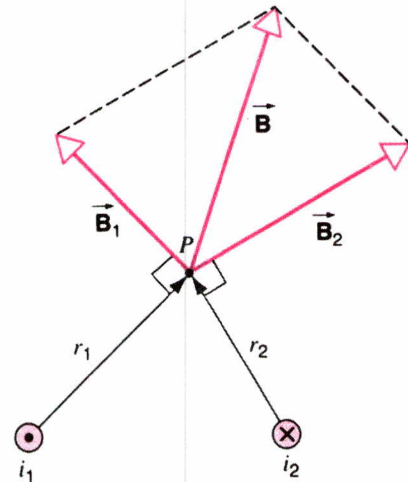
میدان مغناطیسی B در مرکز مدار از معادلهٔ (۳۳ـ۲۱) به‌دست می‌آید،

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲R} = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷}\text{T}\cdot\text{m/A})(۱٫۰۶ \times ۱۰^{-۳}\text{A})}{۲(۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\text{m})} = ۱۲٫۶\,\text{T}$$

۳۳ـ۳ دو جریان موازی

در این بخش از دو سیم بلند حامل جریانهای موازی (یا پادموازی) استفاده می‌کنیم تا دو خاصیت میدانهای مغناطیسی را به تصویر بکشیم: افزودن میدانهای ناشی از سیمهای متفاوت و نیرویی که یک سیم بر سیم دیگر وارد می‌کند.

نخست جمع برداری میدانهای ناشی از دو سیم متفاوت را، که در شکل ۳۳ـ۱۱ نشان داده شده است، مورد توجه قرار می‌دهیم. دو سیم



شکل ۳۳ـ۱۱ دو سیم حامل جریانهایی عمود بر صفحهٔ شکل هستند؛ $i_۱$ به سمت بیرون از صفحه (که با ⊙ نمایش داده شده است، تا نوک تیز پیکان را به‌خاطر آورد) و $i_۲$ به سمت داخل صفحه (که با ⊗ نمایش داده شده است تا یادآور انتهای پیکان باشد). میدان کل در نقطهٔ P برابر است با حاصل‌جمع برداری بردارهای $\vec{\mathbf{B}}_۱$ و $\vec{\mathbf{B}}_۲$.

بر صفحهٔ شکل عمودند و حامل جریانهایی در جهتهای مخالف‌اند. می‌خواهیم میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم را در نقطهٔ P مشخص کنیم. خطهای میدان مغناطیسی ناشی از سیم ۱، دایره‌های هم‌مرکزی حول آن سیم تشکیل می‌دهند و اندازهٔ میدان در فاصلهٔ $r_۱$ با معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) معین می‌شود، یعنی $B = \mu_\circ i_۱/۲\pi r_۱$. جهت $\vec{\mathbf{B}}_۱$ به‌وسیلهٔ مماس بر کمان دایره‌ای که از نقطهٔ P می‌گذرد معلوم می‌شود؛ یا به‌طور هم‌ارز، $\vec{\mathbf{B}}_۱$ عمود است بر $\vec{\mathbf{r}}_۱$ که $\vec{\mathbf{r}}_۱$ برداری است شعاعی از سیم به نقطهٔ P.

به‌صورتی مشابه، میدان ناشی از سیم ۲ در شکل به‌صورت بردار $\vec{\mathbf{B}}_۲$ نمایش داده شده است. این بردار بر خطهای دایره‌ای میدان مغناطیسی مماس است و بر $\vec{\mathbf{r}}_۲$ عمود است. برای اینکه میدان خالص در نقطهٔ P را پیدا کنیم، حاصل‌جمع برداری میدانهای ناشی از هرکدام از دو سیم منفرد را محاسبه می‌کنیم: $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_۱ + \vec{\mathbf{B}}_۲$. اندازه و جهت میدان کل را می‌توان با بهره‌گیری از قاعده‌های متداول جمع برداری مشخص کرد.

وضعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۱۱ مشابه روش محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ است: میدانها ناشی از هرکدام از دو بار را در نقطهٔ P مشخص می‌کنیم، و سپس حاصل‌جمع برداری، میدان کل را به‌دست می‌دهد، $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_۱ + \vec{\mathbf{E}}_۲$. برای مشاهدهٔ این میدان الکتریکی کل در نقطهٔ P، می‌توانستیم نیروی وارد بر ذرهٔ باردار سومی را که در آنجا قرار می‌دادیم اندازه‌گیری کنیم. به‌صورتی مشابه، برای مشاهدهٔ میدان مغناطیسی کل در نقطهٔ P در شکل ۳۳ـ۱۱، می‌توانیم نیروی وارد بر ذرهٔ باردار متحرکی را که از آن نقطه می‌گذرد یا نیروی وارد بر سیم حامل جریان سومی که از P می‌گذرد اندازه‌گیری کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۳ در شکل ۳۳ـ۱۲، فرض کنید که $i_۱ = ۱۵\text{ A}$ و $i_۲ = ۳۲\text{ A}$ باشد. دو سیم در فاصلهٔ $a = ۵٫۳\text{cm}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. میدان مغناطیسی کل را در نقطه‌ای به فاصلهٔ $a/۲$ و روی خط عمود بر خط واصل بین دو سیم پیدا کنید.

حل. در شکل ۳۳ـ۱۲ آرایش هندسی و میدانهای $\vec{\mathbf{B}}_۱$ و $\vec{\mathbf{B}}_۲$ را نشان داده‌ایم. با درنظرگرفتن اینکه $d_۱ = d_۲ = a/\sqrt{۲}$، اندازهٔ میدانها عبارت‌اند از

$$B_۱ = \frac{\mu_\circ i_۱}{۲\pi d_۱} = \frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷}\text{T}\cdot\text{m/A})(۱۵\text{ A})}{۲\pi(۰٫۰۵۳\text{ m})/\sqrt{۲}} = ۸۰\,\mu\text{T}$$

$$B_۲ = \frac{\mu_\circ i_۲}{۲\pi d_۲} = \frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷}\text{T}\cdot\text{m/A})(۳۲\text{ A})}{۲\pi(۰٫۰۵۳\text{ m})/\sqrt{۲}} = ۱۷۱\,\mu\text{T}$$

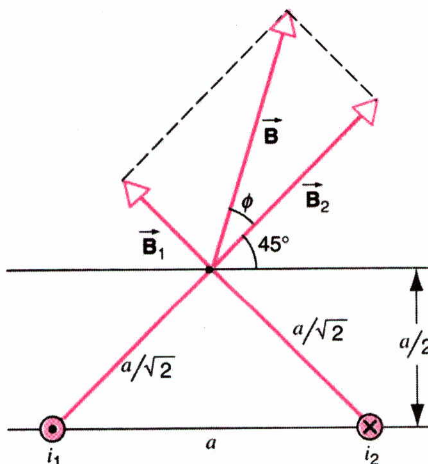
در آرایش هندسی خاص شکل ۳۳ـ۱۲ دو میدان بر یکدیگر عمودند، در نتیجه

$$B = \sqrt{B_۱^۲ + B_۲^۲} = ۱۹۰\,\mu\text{T}$$

زاویهٔ ϕ بین $\vec{\mathbf{B}}$ و $\vec{\mathbf{B}}_۲$ برابر است با

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{B_۱}{B_۲} = ۲۵^\circ$$

بنابراین زاویهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ و محور افقی برابر $۲۵^\circ + ۴۵^\circ = ۷۰^\circ$ است.



شکل ۳۳ـ۱۲ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۳. جریان $i_۱$ به سمت بیرون از صفحهٔ جریان و $i_۲$ به سمت داخل صفحه است.

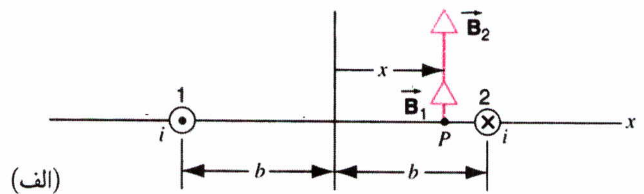
مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۴ دو سیم موازی بلند که با فاصلهٔ $2b$ از هم قرار گرفته‌اند، مطابق شکل ۳۳ـ۱۳ (الف)، حامل جریانهای i در دو جهت مخالف هم هستند. رابطه‌ای برای میدان مغناطیسی B در نقطهٔ P به‌دست آورید. نقطهٔ P روی خط واصل بین دو سیم و به فاصلهٔ x از نقطهٔ وسط آنها قرار گرفته است.

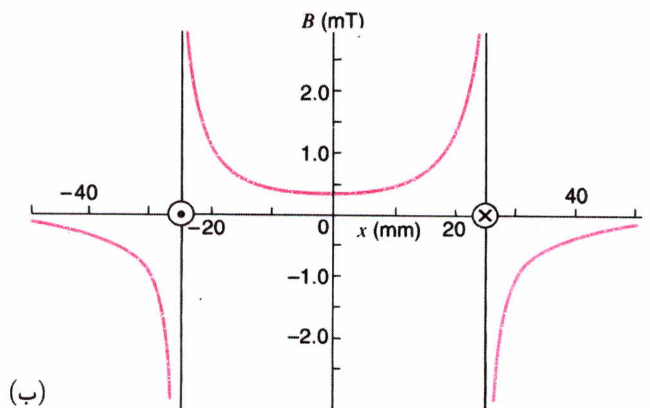
حل. مطالعهٔ شکل ۳۳ـ۱۳ (الف) نشان می‌دهد که $\vec{\mathbf{B}}_1$ میدان ناشی از جریان i_1 و $\vec{\mathbf{B}}_2$ میدان ناشی از جریان i_2 در نقطهٔ P هر دو در یک جهت هستند. هرکدام از این میدانها از معادلهٔ (۳۳ـ۱۳)، یعنی $B = \mu_0 i/2\pi d$ به‌دست می‌آید به‌طوری که

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b+x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(b-x)} = \frac{\mu_0 i b}{\pi(b^2 - x^2)}$$

بررسی این نتیجه نشان می‌دهد که (۱) B حول نقطهٔ $x = 0$ متقارن است، (۲) در $x = 0$ میدان مغناطیسی B دارای کمترین مقدار (مساوی $\mu_0 i/\pi b$) است، و (۳) وقتی $x \to \pm b$ آنگاه میدان $B \to \infty$. این نتیجه‌گیری اخیر درست نیست، زیرا معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) را نمی‌توان برای نقطه‌های داخلی سیم به‌کار برد. در واقع میدان ناشی از هر سیم در مرکز آن صفر می‌شود.

باید نشان دهید نتیجه‌هایی که برای میدان کل ناشی از دو جریان به‌دست آوردیم، برای نقطه‌های $|x| > b$ معتبر است. در شکل ۳۳ـ۱۳ (ب) تغییرهای میدان B برحسب x را برای $i = 25\ \text{A}$ و $b = 25\ \text{mm}$ نشان داده‌ایم.





شکل ۳۳ـ۱۳ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۴. (الف) میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانهای موجود در سیمهای ۱ و ۲ در نقطهٔ P. (ب) میدان برایند در نقطهٔ P که برای $i = 25\ \text{A}$ و $b = 25\ \text{mm}$ محاسبه شده است.

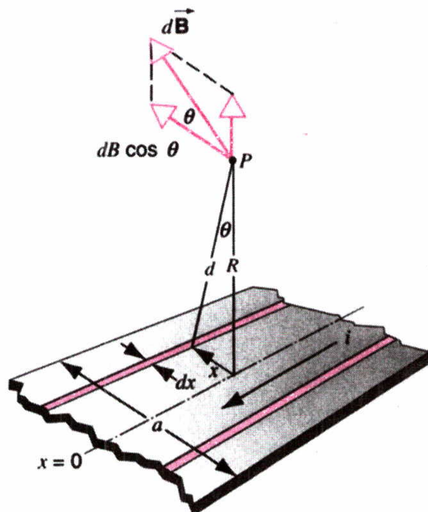
مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۵ در شکل ۳۳ـ۱۴ یک نوار پهن مسی به عرض a و ضخامت ناچیز را نشان داده‌ایم که حامل جریان i است. میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P در فاصلهٔ R از مرکز نوار و روی عمودمنصف آن، معین کنید.

حل. فرض کنید که این نوار پهن را به رشته‌های دراز به عرض بینهایت کوچک dx تقسیم کنیم، به‌طوری که هر یک از این رشته‌ها را بتوان یک سیم حامل جریان di در نظر گرفت که از رابطهٔ $i(dx/a)$ به‌دست می‌آید. سهم میدان dB ناشی از جزء نشان داده‌شده در نیمهٔ سمت چپ نوار شکل ۳۳ـ۱۴ در نقطهٔ P، از شکل دیفرانسیلی معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) به‌دست می‌آید، یا

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i(dx/a)}{R\sec\theta}$$

که در آن $d = R/\cos\theta = R\sec\theta$. توجه کنید که بردار $d\vec{\mathbf{B}}$ عمود بر خطی است که با d مشخص شده است.

فقط مؤلفهٔ افقی $d\vec{\mathbf{B}}$، یعنی $dB\cos\theta$، مؤثر است؛ مؤلفهٔ قائم را رشته‌ای که به‌طور متقارن در سمت دیگر مبدأ قرار گرفته است (جزء



شکل ۳۳ـ۱۴ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۵. نوار تخت به عرض a و حامل جریان i.

سایه‌دار دوم در شکل ۳۳ـ۱۴) خنثی می‌کند. به این ترتیب B در نقطهٔ P از انتگرال (نرده‌ای) زیر به‌دست می‌آید:

$$B = \int dB\cos\theta = \int \frac{\mu_0 i(dx/a)}{2\pi R\sec\theta}\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi aR}\int \frac{dx}{\sec^2\theta}$$

متغیرهای x و θ مستقل از هم نیستند و با معادلهٔ زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$x = R\tan\theta$$

یا

$$dx = R\sec^2\theta\, d\theta$$

حدود تغییرات θ عبارت است از $\pm\alpha$، که در اینجا $\alpha = \tan^{-1}(a/2R)$. با جایگزین کردن dx در عبارت مربوط به B، می‌رسیم به

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi aR}\int \frac{R\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\alpha = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2R} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۴)$$

این رابطه نتیجهٔ کلی برای میدان مغناطیسی ناشی از نوار جریان است.

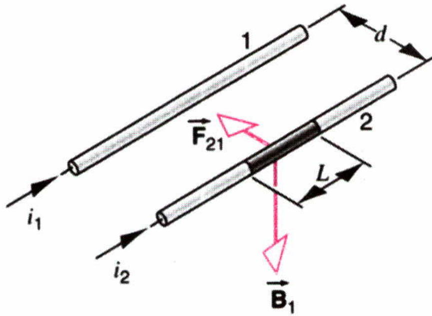
در فاصله‌های بسیار دور از نوار، α زاویهٔ کوچکی است که برای آن $\alpha \approx \tan\alpha = a/2R$. به این ترتیب به‌عنوان یک نتیجهٔ تقریبی داریم

$$B \approx \frac{\mu_0 i}{\pi a}\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{R}$$

انتظار چنین نتیجه‌ای را داشتیم، زیرا در نقطه‌های دوردست نمی‌توان نوار را از یک رشته سیم نازک تمیز داد (معادلهٔ ۳۳ـ۱۳ را ببینید).

برهم‌کنش بین جریانهای موازی

اکنون به انجام محاسبه‌های متفاوتی می‌پردازیم که دو سیم بلند، مستقیم حامل جریانهای موازی (یا پادموازی) را در بر می‌گیرد. به‌علت وجود میدان مغناطیسی ناشی از سیم در موقعیت سیم دوم، نیروی مغناطیسی به سیم دوم وارد می‌شود. به‌صورتی مشابه، سیم دوم نیز یک میدان مغناطیسی در موقعیت سیم اول ایجاد می‌کند که آن هم نیرویی به سیم اول وارد می‌کند.



شکل ۳۳ـ۱۵ دو سیم موازی حامل جریانهای هم‌جهت همدیگر را می‌ربایند. میدان $\vec{B}_1$ در موقعیت سیم ۲ ناشی از جریان جاری در سیم ۱ است.

در شکل ۳۳ـ۱۵، سیم ۱ حامل جریان i_1 میدان مغناطیسی $\vec{B}_1$ را ایجاد می‌کند که اندازهٔ آن در موقعیت سیم دوم، بنابر معادلهٔ (۳۳ـ۱۳)، عبارت است از

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که جهت میدان $\vec{B}_1$ در موقعیت سیم ۲ به سمت پایین است، که این میدان را در شکل ۳۳ـ۱۵ نشان داده‌ایم.

می‌توان چنین تصور کرد که سیم ۲، که حامل جریان i_2 است در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}_1$ غوطه‌ور است. بر قطعه‌ای از این سیم به طول L نیروی مغناطیسی جانبی $\vec{F}_{21} = i_2\vec{L}\times\vec{B}_1$ وارد می‌شود که اندازهٔ آن عبارت است از

$$F_{21} = i_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{2\pi d} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۵)$$

قاعدهٔ حاصلضرب برداری نشان می‌دهد که $\vec{F}_{21}$ در صفحهٔ سیمها قرار دارد و جهت آن در شکل ۳۳ـ۱۵ به طرف سیم ۱ است.

می‌توانستیم کار را با سیم ۲ آغاز و با محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از آن، یعنی $\vec{B}_2$، در موقعیت سیم ۱ نیروی $\vec{F}_{12}$ را معین کنیم که میدان $\vec{B}_2$ بر قطعه‌ای به‌طول L از سیم ۱ وارد می‌کند. نیروی وارد بر سیم ۱، برای جریانهای موازی شکل ۳۳ـ۱۵، به‌طرف سیم ۲ است. نیروهایی که دو سیم بر یکدیگر وارد می‌کنند از نظر اندازه با هم برابر و جهت آنها مخالف یکدیگر است؛ این نیروها، بنابر قانون سوم نیوتون یک زوج کنش‌ـواکنش را تشکیل می‌دهند.

اگر جریانهای شکل ۳۳ـ۱۵ پادموازی باشند، درمی‌یابیم که نیروهای وارد بر سیمها برعکس می‌شود؛ سیمها یکدیگر را دفع می‌کنند. قاعدهٔ کلی در این مورد چنین است:

جریانهای موازی یکدیگر را می‌ربایند و جریانهای پادموازی یکدیگر را می‌رانند.

این قاعده از جهتی برخلاف قاعدهٔ مربوط به بارهای الکتریکی است، زیرا جریانهای هم‌نام (موازی) یکدیگر را می‌ربایند ولی بارهای هم‌نام (هم‌علامت) یکدیگر را می‌رانند.

از نیروی وارد بین دو سیم بلند موازی برای تعریف آمپر استفاده می‌کنیم. با در اختیار داشتن دو سیم بلند موازی با سطح مقطع دایره‌ای ناچیز که در خلأ در فاصلهٔ یک متر از هم قرارگرفته‌اند، آمپر را به‌صورت جریانی در سیمها تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر متر طول آنها نیروی ۲×۱۰^{-۷} نیوتون را ایجاد کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۶ یک سیم بلند افقی که تکیه‌گاه صلبی دارد حامل جریان i_{a} برابر با ۹۶ A است. درست در بالای این سیم و موازی با آن سیم نازکی قرارگرفته که حامل جریان i_{b} برابر با ۲۳ A است. وزن واحد طول این سیم ۰٫۰۷۳ N/m است. اگر بخواهیم وزن سیم دوم را با رانش مغناطیسی خنثی کنیم، این سیم را باید در چه فاصله‌ای در بالای سیم پایینی قرار دهیم؟

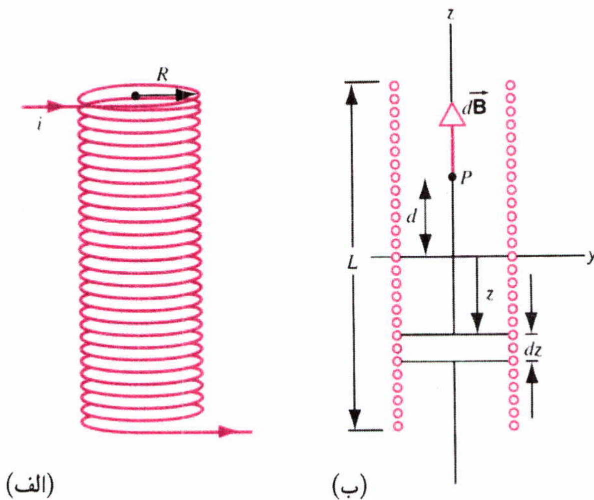
حل. برای فراهم آوردن رانش، باید جریانها در دو سیم در جهت مخالف باشند. در حالت تعادل، باید نیروی مغناطیسی به‌ازای واحد طول با نیروی وزن واحد طول مساوی و در جهت مخالف آن باشد. از حل معادلهٔ (۳۳ـ۲۵) برحسب d نتیجه می‌گیریم که

$$d = \frac{\mu_{\circ} i_{\mathrm{a}} i_{\mathrm{b}}}{۲\pi(F/L)} = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷}\mathrm{T\cdot m/A})(۹۶\,\mathrm{A})(۲۳\,\mathrm{A})}{۲\pi(۰٫۰۷۳\,\mathrm{N/m})}$$
$$= ۶٫۰ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{m} = ۶٫۰\ \mathrm{mm}$$

فرض می‌کنیم که قطر سیم آویخته خیلی کوچکتر از فاصلهٔ بین دو سیم باشد. این فرض لازم است، زیرا در به‌دست‌آوردن معادلهٔ (۳۳ـ۲۵) به‌طور ضمنی فرض کردیم که میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم برای تمام نقطه‌های داخل سیم دیگر یکنواخت است.

آیا تعادل سیم آویخته نسبت به جابه‌جایی قائم پایدار است یا ناپایدار؟ این تعادل را می‌توان با جابه‌جاکردن سیم در امتداد قائم و مطالعهٔ چگونگی تغییرهای نیروی وارد بر سیم بررسی کرد. تعادل این سیم نسبت به جابه‌جایی افقی پایدار است یا ناپایدار؟

فرض کنید که رشته سیم نازک در زیر سیمی قرارگرفته است که به‌وسیلهٔ تکیه‌گاه صلبی نگهداری می‌شود. چگونه می‌توان آن را "معلق یا شناور" نگه داشت؟ تعادل این سیم نسبت به جابه‌جاییهای قائم پایدار است یا ناپایدار؟ نسبت به جابه‌جاییهای افقی چطور؟



شکل ۳۳ـ۱۶ (الف) یک سیملوله. (ب) یک حلقهٔ نازک به ضخامت dz میدان $d\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P روی محور z به‌وجود می‌آورد.

۳۳ـ۴ میدان مغناطیسی سیملوله

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۵ روشی برای به‌دست‌آوردن میدان مغناطیسی یکنواخت (یعنی، میدان مغناطیسیی که اندازه و جهت آن تغییر نمی‌کند) ارائه می‌دهد. یک نوار رسانا، که حامل جریان یکنواخت توزیع‌شدهٔ i است، میدان مغناطیسیی ایجاد می‌کند که با معادلهٔ (۳۳ـ۲۴) مشخص شده است. در نقطه‌های خیلی نزدیک به نوار ($R \to ۰$ و $\tan^{-۱} a/۲R \to \pi/۲$)، معادلهٔ (۳۳ـ۲۴) به‌صورت $B = \mu_{\circ} i/۲a$ در می‌آید که مستقل از فاصلهٔ R از نوار است. این رفتار، میدان الکتریکی در نزدیکی یک سطح تخت حامل چگالی بار یکنواخت را به‌خاطر ما می‌آورد، که در آنجا جهت و اندازهٔ میدان الکتریکی تغییر نمی‌کرد. مشابه خازن با صفحه‌های تخت برای میدانهای الکتریکی، می‌توانیم قطعه یا وسیله‌ای با دو صفحهٔ تخت حامل جریانهای برابر در جهتهای مخالف بسازیم، که میدانها در ناحیهٔ بین دو صفحه همدیگر را تقویت کرده در خارج از فضای بین آنها یکدیگر را خنثی می‌کنند.

یک روش عملی‌تر برای به‌دست‌آوردن میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت استفاده از سیملوله است. همان‌طور که در شکل ۳۳ـ۱۶ (الف) نشان داده‌ایم، سیملوله عبارت است از یک

سیم‌پیچ مارپیچی روی یک هستهٔ استوانه‌ای. سیمها حامل جریان i هستند و تنگ هم چیده شده‌اند، به‌طوری که در امتداد سیملوله n دور سیم به‌ازای واحد طول پیچیده شده است.

در این بخش، میدان را در امتداد محور مرکزی سیملوله محاسبه می‌کنیم و برای این کار از نتیجه‌های قبلی برای میدان مغناطیسی حلقهٔ سیم دایره‌ای استفاده می‌کنیم. محاسبهٔ میدان در خارج از محور و با استفاده از قانون بیو-ساوار کار دشواری است، ولی در بخش بعدی روش متفاوت و بسیار ساده‌تری را برای محاسبهٔ میدان در خارج از محور مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در شکل ۳۳ـ۱۶(ب) شمای هندسی مربوط به محاسبهٔ میدان روی محور را نشان داده‌ایم. محور تقارن سیملوله را محور z اختیار می‌کنیم، و مبدأ مختصات را در مرکز سیملوله در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم میدان را در نقطهٔ P، که در فاصلهٔ d از مبدأ و روی محور z است، محاسبه کنیم. فرض می‌کنیم که سیم‌پیچها آن‌چنان نازک باشند که هر دور آن را بتوانیم تقریباً یک حلقهٔ دایره‌ای در نظر بگیریم، و فرض می‌کنیم صفحهٔ حلقه موازی صفحهٔ xy باشد. سیملوله شامل N دور سیم‌پیچ در طول L است و در نتیجه تعداد دورها در واحد طول برابر $n = N/L$ است.

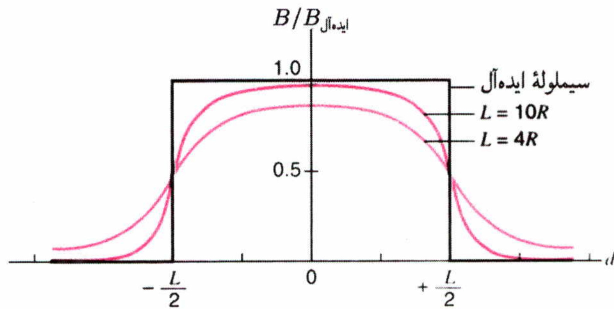
یک حلقهٔ نازک با ضخامت dz در نظر بگیرید. تعداد دورها در این حلقه برابر با $n\,dz$، و در نتیجه کل جریان جاری در این حلقه برابر $ni\,dz$ است، زیرا هر دور سیم حامل جریان i است. میدان ناشی از این حلقه در نقطهٔ P، با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳۳ـ۱۹)، برابر است با

$$dB = \frac{\mu_0 (ni\,dz)R^2}{2[R^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۶)$$

که در این معادله $z - d$ مکان حلقه نسبت به نقطهٔ P است. برای یافتن میدان کل ناشی از تمامی این‌گونه حلقه‌ها، باید از این عبارت از فاصلهٔ $z = -L/2$ تا $z = +L/2$ انتگرال بگیریم. از محاسبهٔ این انتگرال (با استفاده از انتگرال ۱۸ پیوست ط)، می‌رسیم به

$$B = \frac{\mu_0 niR^2}{2}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dz}{[R^2+(z-d)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 ni}{2}\left(\frac{L/2+d}{\sqrt{R^2+(L/2+d)^2}} + \frac{L/2-d}{\sqrt{R^2+(L/2-d)^2}}\right) \qquad (۳۳\text{ـ}۲۷)$$

این عبارت میدان مغناطیسی را در داخل یک سیملوله، روی محور آن، و در فاصلهٔ d از مرکزش به‌دست می‌دهد. این عبارت هم برای



شکل ۳۳ـ۱۷ میدان مغناطیسی مربوط به یک سیملولهٔ ایده‌آل و دو سیملولهٔ غیرایده‌آل به‌صورت تابعی از فاصلهٔ d از مرکز سیملوله.

نقطه‌های داخلی سیملوله و هم برای نقطه‌های خارجی آن معتبر است. جهت میدان، طبق معمول، با بهره‌گیری از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود، به‌طوری که اگر از بالا نگاه کنیم، جریان پادساعتگردی گرد مدار جاری باشد، میدان در جهت مثبت محور z است.

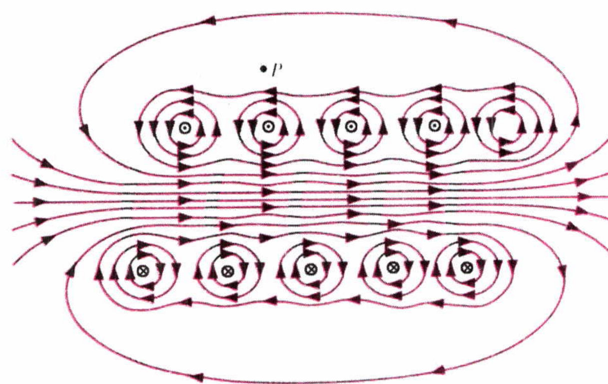
در سیملولهٔ ایده‌آل، طول L سیملوله خیلی بیشتر از شعاع R آن است. در این مورد معادلهٔ (۳۳ـ۲۷) به‌صورت زیر در می‌آید

$$B = \mu_0 ni \qquad \text{(سیملولهٔ ایده‌آل)} \qquad (۳۳\text{ـ}۲۸)$$

همان‌طورکه در فصل بعد نشان خواهیم داد، معادلهٔ (۳۳ـ۲۸)، میدان را در تمام نقطه‌های داخلی یک سیملولهٔ ایده‌آل، اعم از نقطه‌های روی محور یا خارج از آن، به‌دست می‌دهد و میدان برای تمامی نقطه‌های خارجی سیملوله برابر صفر است.

در شکل ۳۳ـ۱۷، میدان محاسبه‌شده به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۳۳ـ۲۷) برحسب تابعی از مکان روی محور برای سیملولهٔ ایده‌آل و دو سیملولهٔ متفاوت غیرایده‌آل ترسیم شده است. توجه کنید که هرچه سیملوله درازتر و باریک‌تر بشود، و به این ترتیب به حالت ایده‌آل نزدیک‌تر بشود، میدان در امتداد محور تقریباً به‌صورت یک ثابت در می‌آید و در خارج از سیملوله و فراتر از دو سر آن خیلی سریع‌تر به صفر کاهش پیدا می‌کند.

میدان داخل سیملوله را با "کشیدن" و درازکردن آن، به‌صورتی که در شکل ۳۳ـ۱۸ نشان داده‌ایم، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. در فاصله‌های خیلی نزدیک به هر یک از سیمها، میدان مغناطیسی خیلی نزدیک به میدان مغناطیسی یک سیم بلند و مستقیم است، که خطهای میدان دایره‌های هم‌مرکزی را حول سیم تشکیل می‌دهند. این میدانها در نقطه‌های میان سیمهای مجاور همدیگر را خنثی می‌کنند. از این شکل چنین استنتاج می‌کنیم که میدانهای ناشی از حلقه‌های منفرد سیم با هم جمع می‌شوند تا خطهای میدانی را به‌وجود آورند

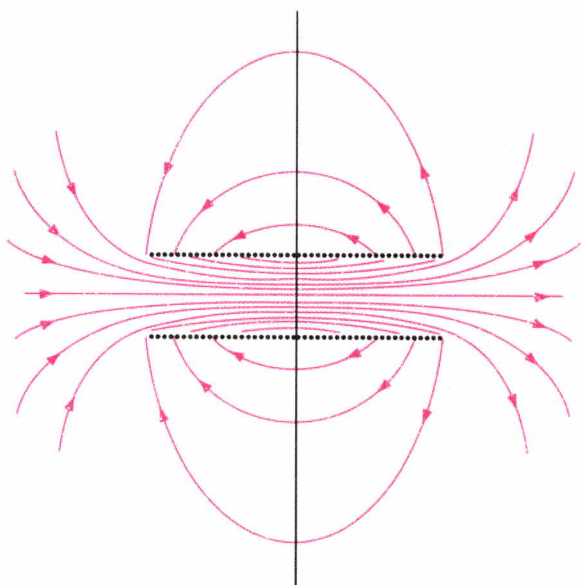


شکل ۳۳ـ۱۸ قسمتی از یک سیملوله که در این تصویر کشیده و بلند شده است. در اینجا خطهای میدان را نشان داده‌ایم.

که در داخل سیملوله با محور آن تقریباً موازی‌اند. در حد مربوط به سیملولهٔ ایده‌آل، میدان یکنواخت و موازی محور سیملوله می‌شود.

در نقطه‌های خارج از سیملوله، مانند نقطهٔ P در شکل ۳۳ـ۱۸، میدان ناشی از قسمت بالایی سیم‌پیچهای سیملوله (که به دلیل رو به بیرون بودن جریان با نماد $\odot$ نشان داده شده‌اند) به سمت چپ است و در جهت خنثی کردن میدان ناشی از قسمت پایینی سیم‌پیچهای سیملوله (که به دلیل رو به داخل صفحه بودن جریان با نماد $\otimes$ نشان داده شده‌اند) که در نزدیکی P به سمت راست است عمل می‌کند. در حالت حدی مربوط به سیملولهٔ ایده‌آل، میدان در خارج از سیملوله صفر است. اگر طول سیملوله بسیار بزرگتر از شعاع آن باشد و فقط میدان را در نقطه‌هایی مانند P بخواهیم، در آن صورت برای سیملوله‌های واقعی تقریب خوبی است که میدان خارجی را صفر در نظر بگیریم. در شکل ۳۳ـ۱۹ خطهای میدان مغناطیسی سیملولهٔ غیرایده‌آل را نشان داده‌ایم. از فاصلهٔ بین خطهای میدان می‌توانید مشاهده کنید که میدان در خارج از سیملوله بسیار ضعیف‌تر از میدان داخل سیملوله است، که در سطح مقطع سیملوله خیلی نزدیک به میدان یکنواخت است.

سیملوله برای میدانهای مغناطیسی همان چیزی است که خازن با صفحه‌های موازی برای میدانهای الکتریکی: وسیله یا ابزار نسبتاً ساده‌ای که توانایی ایجاد میدان تقریباً یکنواخت را دارد. در خازن با صفحه‌های موازی، در صورتی میدان الکتریکی تقریباً یکنواخت است که فاصلهٔ بین صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد صفحه‌ها کوچک باشد و نقطه‌های مورد نظر خیلی نزدیک به لبهٔ خازن نباشند. به همین ترتیب، میدان مغناطیسی در سیملوله در صورتی تقریباً یکنواخت است که شعاع آن در مقایسه با طول سیملوله کوچک باشد و نقطه‌های مورد نظر



شکل ۳۳ـ۱۹ خطهای میدان مغناطیسی سیملوله با طول محدود. توجه کنید که میدان در داخل سیملوله قوی‌تر (که با چگالی بیشتر خطهای میدان مشخص شده است) از خارج آن است.

خیلی نزدیک به دو سر سیملوله نباشند. همان‌طور که در شکل ۳۳ـ۱۷ نشان داده‌ایم، حتی برای وقتی که طول سیملوله فقط ده برابر شعاع آن است میدان مغناطیسی در نیمهٔ مرکزی وسیله در محدودهٔ چند درصد با میدان سیملوله ایده‌آل تفاوت دارد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۷ طول یک سیملوله $L = ۱٫۲۳\,\mathrm{m}$ و قطر داخلی آن $d = ۳٫۵۵\,\mathrm{cm}$ است. این سیملوله پنج لایه سیم‌پیچ دارد که هر کدام شامل ۸۵۰ دور سیم است و جریان $i = ۵٫۵۷\,\mathrm{A}$ از آن می‌گذرد. مقدار B در مرکز این سیملوله چقدر است؟

حل. از آنجا که $L/R = ۶۹$، با آسودگی خاطر می‌توانیم این سیملوله را تقریباً ایده‌آل در نظر بگیریم. از معادلهٔ (۳۳ـ۲۸) داریم

$$B = \mu_\circ ni$$
$$= (۴\pi \times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{T\cdot m/A})\left(\frac{۵ \times ۸۵۰\ \text{دور}}{۱٫۲۳\,\mathrm{m}}\right)(۵٫۵۷\,\mathrm{A})$$
$$= ۲٫۴۲ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{T} = ۲۴٫۲\,\mathrm{mT}$$

توجه کنید که گرچه سیملوله بیش از یک لایه سیم‌پیچ دارد باز هم می‌توانیم از معادلهٔ (۳۳ـ۲۸) استفاده کنیم، زیرا قطر سیم‌پیچها در معادله دخالتی ندارد.

۵ـ۳۳ قانون آمپر

قانون کولن را می‌توان یک قانون بنیادی الکتروستاتیک در نظر گرفت؛ از این قانون می‌توانیم برای محاسبهٔ میدان الکتریکی مربوط به هر توزیع باری استفاده کنیم. ولی، در فصل ۲۷ نشان دادیم که قانون گاؤس امکان حل بعضی از مسئله‌ها را، که تقارن بالایی دارند، با سادگی و ظرافت فراهم می‌آورد. علاوه بر آن، نشان دادیم که قانون گاؤس در محدودهٔ خود، شامل قانون کولن مربوط به میدان الکتریکی بار نقطه‌ای نیز هست. قانون گاؤس را بنیادی‌تر از قانون کولن در نظر می‌گیریم. قانون گاؤس یکی از چهار معادلهٔ بنیادی (ماکسول) در نظریهٔ الکترومغناطیس است.

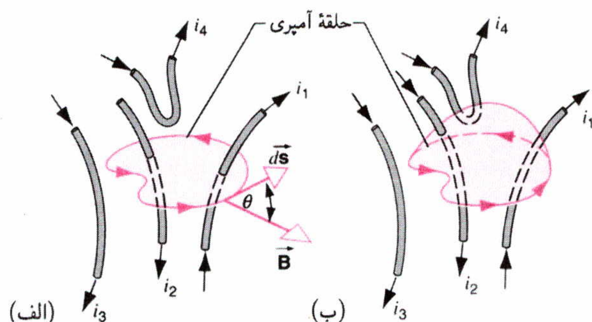
در مغناطیس نیز وضعیت مشابهی وجود دارد. با بهره‌گیری از قانون بیوـساوار، می‌توانیم میدان مغناطیسی ناشی از هر توزیع جریانی را محاسبه کنیم، درست همان‌طور که از معادلهٔ (۲۶ـ۶) یا معادله‌های (۲۶ـ۱۳) و (۲۶ـ۱۴) (که هم‌ارز قانون کولن‌اند) برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از هر نوع توزیع باری استفاده کردیم. در یک رهیافت بنیادی‌تر به میدانهای مغناطیسی از قانونی استفاده می‌کنیم که (مانند قانون گاؤس برای میدانهای الکتریکی) برای ساده کردن محاسبهٔ میدان $\vec{\mathbf{B}}$ از تقارن موجود در مسئله‌های معینی بهره می‌گیرد. این قانون را بنیادی‌تر از قانون بیوـساوار در نظر می‌گیریم که به معادلهٔ دیگری از چهار معادلهٔ ماکسول می‌انجامد.

این نتیجهٔ جدید را قانون آمپر می‌نامیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ i \qquad (۳۳ـ۲۹)$$

به‌خاطر دارید که برای استفاده از قانون گاؤس، ابتدا یک سطح فرضی بسته (به‌نام سطح گاؤسی) در نظر گرفتیم که مقدار معینی بار را احاطه می‌کرد. برای استفاده از قانون آمپر یک منحنی بسته (به‌نام حلقهٔ آمپری) در نظر می‌گیریم، که در شکل ۳۳ـ۲۰ نشان داده‌ایم. طرف چپ معادلهٔ (۳۳ـ۲۹) حکم می‌کند که این منحنی را به پاره‌خطهای کوچکی به طول $d\vec{\mathbf{s}}$ تقسیم کنیم. وقتی حلقه را دور می‌زنیم (جهت حرکت ما جهت $d\vec{\mathbf{s}}$ را مشخص می‌کند)، کمیت $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ را محاسبه و این کمیتها را گرد حلقه با هم جمع می‌کنیم (انتگرال می‌گیریم).

انتگرال طرف چپ معادلهٔ (۳۳ـ۲۹) را انتگرال خطی می‌نامیم. (قبلاً در فصل ۱۱ برای محاسبهٔ کار و در فصل ۲۸ به منظور محاسبهٔ اختلاف پتانسیل از انتگرال خطی استفاده کرده‌ایم.) دایرهٔ کوچک روی علامت انتگرال نشان می‌دهد که انتگرال‌گیری باید دور مسیر بسته



شکل ۳۳ـ۲۰ (الف) درکاربرد قانون آمپر، حول یک حلقهٔ بسته انتگرال می‌گیریم. حاصل انتگرال به‌وسیلهٔ جریان خالص گذرنده از رویه‌ای که توسط حلقه محدود شده است، معین می‌شود. (ب) رویهٔ محدودشده توسط حلقه به سمت بالاکشیده شده است.

انجام شود. اگر θ زاویهٔ بین $d\vec{\mathbf{s}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ باشد، انتگرال خطی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint B\, ds \cos\theta \qquad (۳۳ـ۳۰)$$

جریان i در معادلهٔ (۳۳ـ۲۹) کل جریانی است که حلقه "دربر می‌گیرد"؛ یعنی حاصل‌جمع جریان در سیمهایی که رویهٔ دربرگرفته‌شده توسط حلقه را سوراخ می‌کنند. مشابه مورد مربوط به بارها در قانون گاؤس، جریانهایی که خارج از محدودهٔ حلقه قرار گرفته‌اند به حساب آورده نمی‌شوند. در شکل ۳۳ـ۲۰ (الف) چهار سیم حامل جریان وجود دارد. میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ در هر نقطه، اثر خالص کلیهٔ جریانهایی است که از همهٔ سیمها عبور می‌کند. با این همه، در محاسبهٔ طرف راست معادلهٔ (۳۳ـ۲۹)، تنها جریانهای $i_۱$ و $i_۲$ را در نظر می‌گیریم، زیرا سیمهای حامل جریانهای $i_۳$ و $i_۴$ از رویهٔ محصور توسط حلقه عبور نمی‌کنند. دو سیمی که از داخل حلقه می‌گذرند حامل جریانهایی در جهتهای مخالف‌اند. از قاعدهٔ دست راست برای تعیین علامت جریانها استفاده می‌کنیم: اگر انگشتان دست راست در جهت پیمایش حلقه باشد، جریانهایی که در جهت شست قرار می‌گیرند (مانند جریان $i_۱$) را مثبت در نظر می‌گیریم، در حالی که جریانهایی که در جهت مخالف آن هستند (مانند جریان $i_۲$) را منفی منظور می‌کنیم. به این ترتیب جریان خالص i که از حلقهٔ شکل ۳۳ـ۲۰ (الف) می‌گذرد عبارت است از $i = i_۱ - i_۲$.

میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ در نقطه‌های روی حلقه و داخل آن مسلماً به جریانهای $i_۳$ و $i_۴$ بستگی دارد؛ ولی، انتگرال $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ روی حلقه به جریانهایی نظیر $i_۳$ و $i_۴$ که رویهٔ دربرگرفته‌شده توسط حلقه را سوراخ نمی‌کنند وابسته نیست. این نتیجه منطقی است، زیرا $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$

مربوط به میدان حاصل از جریانهای $i_۱$ و $i_۲$ در حرکت گرد حلقه همواره دارای علامت ثابتی است؛ در صورتی که $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ مربوط به میدانهای ناشی از جریانهای $i_۳$ و $i_۴$ در حرکت گرد حلقه تغییر علامت می‌دهند و در واقع قسمتهای مثبت و منفی دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند.

نتیجه‌های به‌دست‌آمده در اینجا، با تغییردادن شکل رویه بدون تغییردادن حلقه، تغییر نمی‌کند. در شکل ۳۳ـ۲۰(ب)، رویه را به سمت بالاکشیده‌ایم، به‌طوری که در حالت اخیر سیم حامل جریان $i_۴$ رویه را سوراخ می‌کند. ولی، توجه کنید که این سیم رویه را دو بار سوراخ می‌کند، یک‌بار وقتی سیم به سمت پایین می‌رود (که متناظر با مشارکت $-i_۴$ به جریان کل گذرنده از رویه، و منطبق بر قاعدهٔ دست راست است) و یک‌بار وقتی سیم به سمت بالا می‌رود (که متناظر با مشارکت $+i_۴$ به جریان کل است). به این ترتیب، جریان کل گذرنده از رویه تغییر نمی‌کند؛ البته انتظار چنین نتیجه‌ای را نیز داشتیم، زیرا با کشیدن رویه، میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در مکانهای موجود روی حلقهٔ ثابت تغییر نمی‌کند و بنابراین انتگرال خطی در طرف چپ قانون آمپر تغییر نمی‌کند.

توجه کنید که واردکردن ثابت دلخواه ۴π در قانون بیو_ساوار، ثابت قانون آمپر را به $\mu_۰$ تبدیل می‌کند. (ساده‌سازی مشابهی برای قانون گاؤس با منظور کردن ثابت ۴π در قانون کولن حاصل شد.)

برای وضعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۲۰، قانون آمپر نتیجه می‌دهد که

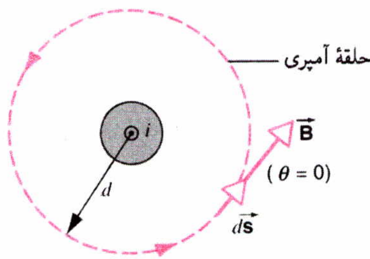
$$\oint B\, ds\, \cos\theta = \mu_۰ (i_۱ - i_۲) \qquad (۳۳\text{ـ}۳۱)$$

معادلهٔ (۳۳ـ۳۱) برای میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ تا زمانی که روی حلقهٔ آمپری، هم اندازه و هم جهتش تغییر می‌کند معتبر است. نمی‌توانیم این معادله را برای B حل کنیم مگر راهی پیدا کنیم که B را از زیر علامت انتگرال درآوریم. برای انجام این کار، از تقارن هندسی بهره می‌گیریم تا یک حلقه آمپری انتخاب کنیم که برای آن B ثابت است. در محاسبهٔ میدانهای الکتریکی با بهره‌گیری از قانون گاؤس از ترفند مشابهی سود بردیم.

مثالهای زیر نشان می‌دهند که چگونه می‌توانیم از قانون آمپر برای محاسبهٔ میدانهای مغناطیسی مواردی که در آنها درجهٔ بالایی از تقارن وجود دارد استفاده کنیم.

کاربردهای قانون آمپر

سیم بلند و مستقیم (نقطه‌های خارجی). می‌توانیم از قانون آمپر برای یافتن میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم بلند و مستقیم در



شکل ۳۳ـ۲۱ از یک حلقهٔ آمپری دایره‌ای برای یافتن میدان مغناطیسی حاصل از جریان در سیم بلند و مستقیم استفاده شده است. سیم بر صفحهٔ شکل عمود و جهت جریان به طرف خارج از صفحه است.

نقطه‌ای به فاصلهٔ d از آن استفاده کنیم. این مسئله را قبلاً با استفاده از قانون بیو_ساوار حل کرده‌ایم.

همان‌گونه که در شکل ۳۳ـ۲۱ نشان داده‌ایم، حلقهٔ آمپری دایره‌ای به شعاع d است که مرکزش روی سیم قرار دارد و صفحهٔ این حلقه بر امتداد سیم عمود است. از تقارن موجود در مسئله، $\vec{\mathbf{B}}$ تنها می‌تواند تابع d باشد (و نه مثلاً، وابسته به مختصات زاویه‌ای در دور دایره). با انتخاب مسیری که همه‌جا به یک فاصله از سیم است، می‌دانیم که B روی این مسیر ثابت است.

از آزمایشهای اُرستد می‌دانیم که $\vec{\mathbf{B}}$ فقط یک مؤلفهٔ مماسی دارد. به این ترتیب، زاویهٔ θ برابر صفر است و انتگرال خطی به‌صورت زیر در می‌آید

$$\oint B\, ds\, \cos\theta = B \oint ds = B(۲\pi d) \qquad (۳۳\text{ـ}۳۲)$$

توجه داشته باشید که انتگرال ds در گرداگرد مسیر، همان طول مسیر، یا در مورد دایره $۲\pi d$ است. طرف راست قانون آمپر به‌سادگی برابر $\mu_۰ i$ است (که بنابه قاعدهٔ دست راست، مثبت در نظر گرفته شده است). از قانون آمپر داریم

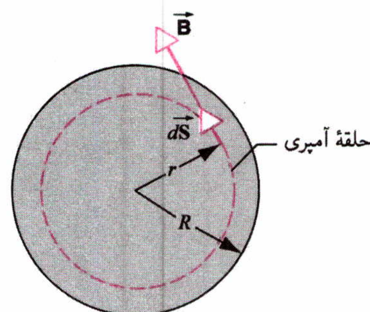
$$B(۲\pi d) = \mu_۰ i$$

یا

$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi d}$$

که همان معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) است. معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) را (با تلاش به‌مراتب بیشتری) با استفاده از قانون بیو_ساوار به‌دست آوردیم.

سیم بلند و مستقیم (نقطه‌های داخلی). همچنین می‌توانیم از قانون آمپر برای یافتن میدان مغناطیسی در نقطه‌های داخلی یک سیم استفاده کنیم. فرض می‌کنیم که جریان i به‌طور یکنواخت روی سطح مقطع



شکل ۳۳ـ۲۲ یک سیم بلند و مستقیم حامل جریانی است که جهت آن به طرف خارج از صفحهٔ شکل است و به‌طور یکنواخت در مقطع دایره‌ای سیم توزیع شده است. در داخل سیم یک حلقهٔ دایره‌ای آمپری رسم شده است.

یک سیم استوانه‌ای به شعاع R توزیع شده باشد. می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ $r < R$ از مرکز سیم محاسبه کنیم.

در شکل ۳۳ـ۲۲ یک حلقهٔ آمپری به شعاع r را در داخل سیم نشان داده‌ایم. تقارن موجود در وضعیت هندسی ایجاب می‌کند که اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ در همه جا روی حلقه ثابت و جهت آن همواره بر حلقه مماس باشد، به‌طوری که طرف چپ قانون آمپر مقدار $B(2\pi r)$ را به‌دست می‌دهد، دقیقاً به همان صورتی که معادلهٔ (۳۳ـ۳۲) حاصل شد. طرف راست قانون آمپر فقط شامل جریانی می‌شود که در داخل شعاع r قرارگرفته است. اگر جریان به‌طور یکنواخت روی سطح مقطع سیم توزیع شده باشد، کسری از جریان که در داخل شعاع r قرار می‌گیرد همان کسری از سطح مقطع است که در داخل شعاع r قرار می‌گیرد، یا $\pi r^2/\pi R^2$. آنگاه از قانون آمپر داریم

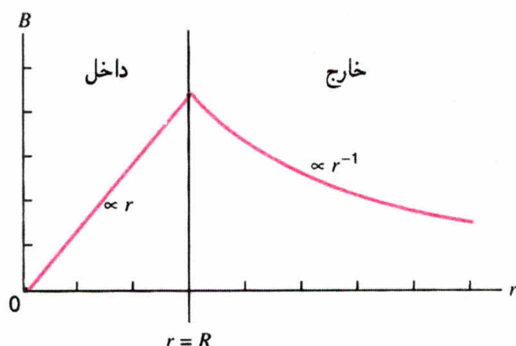
$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \qquad (۳۳ـ۳۳)$$

که در اینجا، باز هم طرف راست معادله فقط شامل همان کسری از جریان می‌شود که از رویهٔ محصور در مسیر انتگرال‌گیری (یعنی حلقهٔ آمپری) می‌گذرد.

از حل این معادله برای B، می‌رسیم به

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \qquad (۳۳ـ۳۴)$$

روی سطح سیم $(r = R)$، معادلهٔ (۳۳ـ۳۴) به معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) تبدیل می‌شود (که در آنجا $d = R$). یعنی، هر دو رابطه نتیجهٔ یکسانی را برای میدان روی سطح سیم به‌دست می‌دهند. در شکل ۳۳ـ۲۳ بستگی میدان مغناطیسی به r را برای نقطه‌های داخل و خارج سیم نشان داده‌ایم.



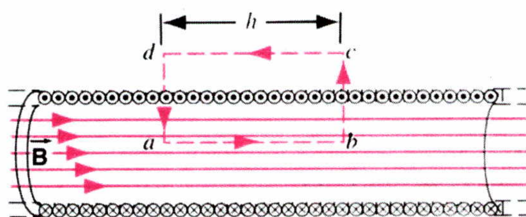
شکل ۳۳ـ۲۳ میدان مغناطیسی محاسبه‌شده برای سیم شکل ۳۳ـ۲۲. توجه کنید که بزرگترین میدان در سطح سیم ایجاد می‌شود.

معادلهٔ (۳۳ـ۳۴) فقط برای موردی معتبر است که جریان به‌طور یکنواخت روی مقطع سیم توزیع شده باشد. اگر چگالی جریان به r بستگی داشته باشد نتیجهٔ متفاوتی به‌دست خواهد آمد (مسئلهٔ ۱۳ را ببینید). با این همه، معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) برای میدان مغناطیسی نقطه‌های خارجی سیم همچنان معتبر باقی می‌ماند، چه چگالی جریان ثابت باشد و چه تابعی از r.

سیملوله. سیملولهٔ ایده‌آل مطابق شکل ۳۳ـ۲۴ را در نظر می‌گیریم و یک حلقهٔ آمپری مستطیل‌شکل $abcda$ را در آن برمی‌گزینیم. در این تحلیل فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی موازی محور این سیملولهٔ ایده‌آل است و اندازهٔ آن در امتداد خط ab ثابت است. همان‌طور که بعداً اثبات خواهیم کرد، میدان در قسمت داخلی سیملوله یکنواخت است (یا به عبارتی مستقل از فاصلهٔ خط ab از محور مرکزی است)، که این موضوع با برابر بودن فاصلهٔ بین خطهای میدان در شکل ۳۳ـ۲۴ تداعی می‌شود.

طرف چپ قانون آمپر را می‌توانیم به‌صورت حاصل‌جمع چهار انتگرال بنویسیم، که هر انتگرال مربوط به یک قطعه از مسیر است:

$$\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_a^b \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_b^c \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_c^d \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_d^a \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (۳۳ـ۳۵)$$



شکل ۳۳ـ۲۴ برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی این سیملولهٔ بلند ایده‌آل از یک حلقهٔ آمپری (مستطیل $abcd$) استفاده می‌کنیم.

حاصل اولین انتگرال سمت راست این معادله برابر Bh است، که در اینجا B بزرگی میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در داخل سیملوله است و h طول دلخواهی از مسیر از a تا b است. توجه کنید که مسیر ab، گرچه موازی محور سیملوله است، ولی ضرورت ندارد که بر آن منطبق باشد. در معادلهٔ (۳۳ـ۳۵) انتگرالهای دوم و چهارم برابر صفرند زیرا برای هر عنصر از این مسیرها $\vec{\mathbf{B}}$ بر مسیر عمود است (برای نقطه‌های داخلی سیملوله) یا صفر است (برای نقطه‌های خارجی سیملوله). در هر دو مورد $\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$ صفر است و حاصل انتگرالها نیز برابر صفر می‌شود. سومین انتگرال، که شامل آن قسمت از مستطیل می‌شود که در خارج از سیملوله قرار می‌گیرد، برابر با صفر است زیرا فرض کرده‌ایم که برای یک سیملولهٔ ایده‌آل برای تمام نقطه‌های خارجی، $\vec{\mathbf{B}}$ برابر صفر باشد.

انتگرال $\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$ برای کل مسیر مستطیل‌شکل برابر Bh است. جریان خالص i که از داخل حلقهٔ آمپری مستطیل‌شکل می‌گذرد همان جریان جاری در سیم‌پیچهای سیملوله نیست، زیرا سیم‌پیچها بیش از یک بار از حلقه می‌گذرند. فرض کنید که n تعداد دورهای سیم‌پیچ به‌ازای واحد طول سیملوله باشد؛ در آن صورت nh برابر تعداد کل سیم‌پیچها در داخل حلقهٔ آمپری است و جریان کل، که از حلقهٔ آمپری مستطیل‌شکل نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۲۴ می‌گذرد برابر nhi است. در این حالت قانون آمپر به‌صورت زیر درمی‌آید

$$Bh = \mu_\circ nhi$$

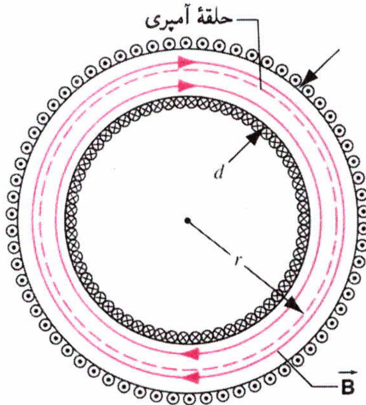
یا

$$B = \mu_\circ ni$$

این نتیجه با معادلهٔ (۳۳ـ۲۸)، که برای نقطه‌های روی محور مرکزی سیملوله به‌دست‌آمده، همخوان است. چون خط ab در شکل ۳۳ـ۲۴ را می‌توان در هر فاصله‌ای از محور سیملوله قرار داد، اکنون می‌توانیم چنین نتیجه‌گیری کنیم که میدان مغناطیسی در داخل سیملولهٔ ایده‌آل در تمامی سطح مقطع آن یکنواخت است.

چنبره. در شکل ۳۳ـ۲۵ چنبره‌ای را نشان داده‌ایم، که می‌توان آن را سیملوله‌ای در نظر گرفت که خم شده و به‌صورت دونات درآمده است. می‌توانیم با بهره‌گیری از قانون آمپر میدان مغناطیسی را در نقاط داخلی چنبره معین کنیم.

از تقارن هندسیِ شکل، در می‌یابیم که خطهای میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در داخل چنبره دایره‌های هم‌مرکزی، مطابق شکل ۳۳ـ۲۵، تشکیل می‌دهند.



شکل ۳۳ـ۲۵ چنبره. میدان مغناطیسی در نقطه‌های داخلی را می‌توان با استفاده از یک حلقهٔ آمپری دایره‌ای، که در شکل نشان داده شده است، معین کرد.

یک دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع r را به‌عنوان حلقهٔ آمپری اختیار می‌کنیم و آن را در جهت ساعتگرد می‌پیماییم. از قانون آمپر نتیجه می‌گیریم

$$B(۲\pi r) = \mu_\circ iN$$

که در آن i جریان در هر یک از دورهای چنبره و N تعداد دورهای سیم‌پیچ است. از این رابطه نتیجه می‌گیریم

$$B = \frac{\mu_\circ iN}{۲\pi r} \qquad (۳۳\text{ـ}۳۶)$$

که برخلاف سیملوله، B در سطح مقطع چنبره ثابت نیست. با بهره‌گیری از قانون آمپر، باید بتوانیم نشان بدهیم که برای چنبرهٔ ایده‌آل در فضای خارج از چنبره و در حفرهٔ مرکزی آن $B = ۰$ است.

بررسی دقیق معادلهٔ (۳۳ـ۳۶) این گزاره را که "چنبره سیملوله‌ای است که به‌صورت دونات خم شده است" تأیید می‌کند. مخرج کسر معادلهٔ (۳۳ـ۳۶)، یعنی $۲\pi r$، محیط دایرهٔ مرکزی چنبره است و $N/۲\pi r$ همان n یعنی تعداد دور به‌ازای واحد طول است. با این جانشانی، معادلهٔ (۳۳ـ۳۶) به‌صورت $B = \mu_\circ in$ در می‌آید که همان معادلهٔ مربوط به میدان مغناطیسی در ناحیهٔ میانی سیملوله است.

جهت میدان مغناطیسی در داخل چنبره (یا یک سیملوله) از قاعدهٔ دست راست به‌دست می‌آید: انگشتان دست راست را در جهت جریان می‌چرخانیم؛ جهت شست باز دست راست جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

چنبره‌ها قسمت اصلی توکاماک را تشکیل می‌دهند، که امیدواریم اساس یک رآکتور همجوشی هسته‌ای را به وجود آورند. طرز کار این وسیله را در فصل ۵۱ این کتاب بررسی می‌کنیم.

میدان خارج سیملوله (اختیاری). تا اینجا میدان مغناطیسی خارج سیملوله را نادیده گرفتیم، ولی حتی برای سیملولهٔ ایده‌آل میدان در نقطه‌های خارجی سیم‌پیچ صفر نیست. شکل ۳۳ـ۲۶ یک مسیر آمپری دایره‌ای‌شکل به شعاع r را نشان می‌دهد. چون سیم‌پیچهای سیملوله مارپیچی هستند، یک دور از این سیم‌پیچ سطحی را که دایره دربرگرفته است می‌شکافد و از یک طرف به طرف دیگر آن می‌رود. حاصلضرب $\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$ برای این مسیر به مؤلفهٔ مماسی میدان یعنی $B_{\rm t}$ بستگی دارد و به این ترتیب از قانون آمپر داریم

$$B_{\rm t}(2\pi r)=\mu_0 i$$

یا

$$B_{\rm t}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad (۳۳\text{ـ}۳۷)$$

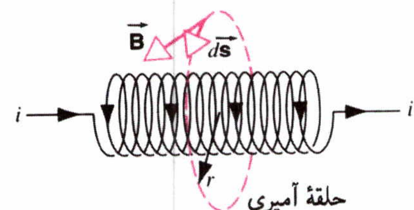
که همان میدانی است (هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت) که سیم مستقیم تولید می‌کند. توجه کنید که سیم‌پیچها، علاوه بر حمل جریان در سطح سیملوله، حامل جریان از چپ به راست در شکل ۳۳ـ۲۶ نیز هستند و از این نظر سیملوله برای نقطه‌های خارجی سیم‌پیچ، مانند یک رشته سیم مستقیم عمل می‌کند.

میدان مماسی بسیار کوچکتر از میدان مغناطیسی داخل سیملوله (معادلهٔ ۳۳ـ۲۸) است که این موضوع را می‌توان با به‌دست‌آوردن نسبت میدانها مشاهده کرد

$$\frac{B_{\rm t}}{B}=\frac{\mu_0 i/2\pi r}{\mu_0 n i}=\frac{1}{2\pi r n} \qquad (۳۳\text{ـ}۳۸)$$

فرض کنید سیملوله از یک لایه سیم‌پیچ تشکیل شده باشد که در آن سیمها، مانند سیم‌پیچ شکل ۳۳ـ۲۴، کاملاً به‌هم چسبیده‌اند. در طول سیملوله هر بازه‌ای که طول آن مساوی قطر سیم باشد شامل یک دور است و از آن رو تعداد دورها به‌ازای واحد طول، یعنی n، باید برابر با $1/D$ باشد. در نتیجه نسبت بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{B_{\rm t}}{B}=\frac{D}{2\pi r} \qquad (۳۳\text{ـ}۳۹)$$



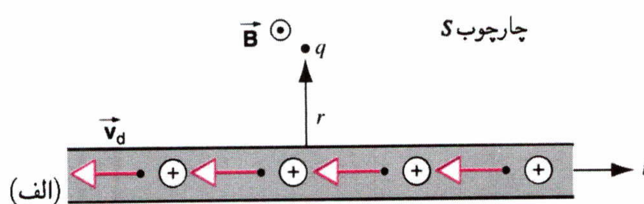
شکل ۳۳ـ۲۶ یک حلقهٔ آمپری دایره‌ای به شعاع r برای یافتن میدان مماسی در خارج از سیملوله به‌کار گرفته شده است.

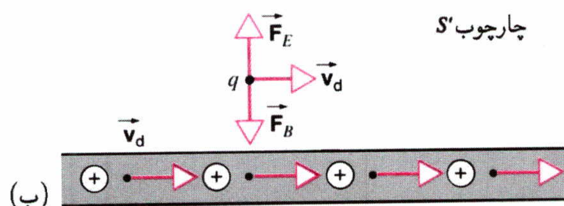
برای سیمهای معمولی، $D=0{,}1\ \rm mm$. فاصلهٔ r تا نقطه‌های خارجی باید حداقل برابر با شعاع سیملوله باشد، که ممکن است چندین سانتی‌متر باشد. در نتیجه $B_{\rm t}/B\le 0{,}001$ و میدان مماسی در مقایسه با میدان داخلی در امتداد محور سیملوله در واقع ناچیز است. بنابراین با اطمینان می‌توان میدان خارجی را نادیده گرفت.

با ترسیم یک دایرهٔ آمپری، مشابه مسیر شکل ۳۳ـ۲۶، ولی با شعاعی کوچکتر از شعاع سیملوله، می‌توانیم نشان دهیم که مؤلفهٔ مماسی میدان داخلی صفر است.

۳۳ـ۶ الکترومغناطیس و چارچوبهای مرجع (اختیاری)

در شکل ۳۳ـ۲۷ (الف) ذره‌ای را نشان داده‌ایم که حامل بار مثبت q است، و در نزدیکی یک سیم بلند و مستقیم حامل جریان i، در حالت سکون قرار دارد. این سیستم را از دیدگاه چارچوب مرجع S مشاهده می‌کنیم که در آن سیم حامل جریان ساکن است. در داخل سیم الکترونهای دارای بار منفی با سرعت سوق $\vec{\mathbf{v}}_{\rm d}$ در حرکت‌اند و هسته‌های یونی دارای بار مثبت ساکن. در هر قطعه‌ای از سیم، تعداد الکترونها با تعداد هسته‌های یونی برابر است و بار خالص هر قطعه از سیم صفر است. الکترونها را می‌توان به‌طور لحظه‌ای به‌صورت رشته‌ای از بار منفی در نظر گرفت، که در محل بار q میدان الکتریکی به‌وجود





شکل ۳۳ـ۲۷ (الف) ذره‌ای با بار q در نزدیکی سیم حامل جریان i ساکن و در حال تعادل است. این وضعیت از چارچوب مرجع S که نسبت به ذره ساکن است مشاهده می‌شود. (ب) همین وضعیت از چارچوب مرجع S' مشاهده شده است که با سرعت سوق الکترونها در سیم در حرکت است. ذره در این چارچوب مرجع نیز تحت تأثیر نیروهای $\vec{\mathbf{F}}_E$ و $\vec{\mathbf{F}}_B$ در حال تعادل است.

می‌آورد که از معادلهٔ (۲۶ـ۱۷) به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0 r}$$

که در این معادله، λ_- چگالی خطی بار الکترونهاست (یک عدد منفی). هسته‌های یونی مثبت نیز میدانی الکتریکی به‌وجود می‌آورند که از رابطهٔ مشابهی به‌دست می‌آید و به چگالی خطی بار یونهای مثبت λ_+ بستگی دارد. چون چگالیهای بار از نظر اندازه برابر و از نظر علامت مخالف یکدیگرند، $\lambda_+ + \lambda_- = 0$، و برایند میدان الکتریکی وارد بر ذره صفر است.

در اینجا در مکان ذره میدان مغناطیسی غیرصفر وجود دارد، ولی چون ذره ساکن است، هیچ نیروی مغناطیسی بر آن وارد نمی‌شود. بنابراین، در این چارچوب مرجع هیچ نیروی خالصی که منشأ الکترومغناطیسی داشته باشد بر جسم وارد نمی‌شود.

اکنون وضعیت را از دیدگاه ناظر چارچوب مرجع S' که موازی با سیم و با سرعت $\vec{\mathbf{v}}_d$ (سرعت سوق الکترونها) حرکت می‌کند بررسی می‌کنیم. شکل ۳۳ـ۲۷(ب) وضعیت را در این چارچوب مرجع نشان می‌دهد، که در آن الکترونها ساکن‌اند و هسته‌های یونی با سرعت $\vec{\mathbf{v}}_d$ به طرف راست در حرکت‌اند. بدیهی است در این حالت، بر ذرهٔ باردار q که در حرکت است، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ وارد می‌شود.

ناظران چارچوب مرجعهای لخت متفاوت باید توافق داشته باشند که اگر در چارچوب مرجع S برای بار q شتابی وجود ندارد، در چارچوب مرجع S' هم شتابی درکار نیست. بنابراین این ذره در چارچوب مرجع S' هم نباید تحت تأثیر هیچ نیروی خالصی قرار بگیرد و در نتیجه باید به غیر از نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ نیروی دیگری بر این ذره وارد آید تا نیروی خالص وارد بر آن صفر شود.

این نیروی اضافی که در چارچوب مرجع S' بر ذره اثر می‌کند باید منشأ الکتریکی داشته باشد در شکل ۳۳ـ۲۷(الف)، قسمتی از سیم به طول L را در نظر بگیرید. می‌توانیم تصور کنیم که این قطعه سیم از دو خطکش تشکیل شده است، یک خطکش با بار مثبت (یونها) ساکن و خطکش دیگر با بار منفی (الکترونها) که متحرک است. در چارچوب مرجع S طول هر دو خطکش یکسان است و حاوی تعداد بار مساوی هستند. وقتی این دو خطکش را به چارچوب مرجع S' انتقال می‌دهیم، در می‌یابیم که طول خطکش دارای بار منفی در چارچوب مرجع S' بیشتر است. در چارچوب مرجع S، این خطکش متحرک، با توجه به اثر نسبیتی انقباض طول که در بخش ۲۰ـ۳ مطالعه کردیم، دارای طول انقباض‌یافته است. در چارچوب S'، این خطکش در حال سکون است و ویژه‌طول خود را دارد که بلندتر از طول انقباض‌یافتهٔ آن در چارچوب S است. چگالی خطی بار منفی λ'_- در چارچوب مرجع S' از نظر اندازه کوچکتر از چگالی در چارچوب S (یعنی $|\lambda_-| > |\lambda'_-|$) است زیرا در چارچوب S' همین مقدار بار در طول بیشتری توزیع شده است.

برای بارهای مثبت، وضعیت برعکس است. در چارچوب S بارهای مثبت در حال سکون‌اند. خطکش بار مثبت ویژه‌طول خودش را دارد. در چارچوب S'، این بارها در حرکت‌اند و طول انقباض‌یافتهٔ کوتاه‌تری دارد. چگالی خطی بار مثبت در S' یعنی λ'_+ بیشتر از همین چگالی در چارچوب S یعنی λ_+ است و داریم $(\lambda'_+ > \lambda_+)$، زیرا همان مقدار بار در طول کوتاه‌تری توزیع شده است. بنابراین رابطه‌های زیر بین چگالیهای بار الکتریکی در چارچوبهای متفاوت برقرار است:

$$\lambda_+ = |\lambda_-| \ : \ S \text{ در چارچوب}$$

$$\lambda'_+ > |\lambda'_-| \ : \ S' \text{ در چارچوب}$$

بار q تحت تأثیر میدانهای الکتریکی ناشی از یک رشته بار مثبت و یک رشته بار منفی قرار می‌گیرد. این میدانها در چارچوب S' یکدیگر را خنثی نمی‌کنند، زیرا چگالی خطی بارها متفاوت است. بنابراین در چارچوب مرجع S' میدان الکتریکی در نقطهٔ q ناشی از چگالی خطی بار مثبت خالصی است که باقی می‌ماند و بار q از سیم رانده می‌شود. در نتیجه نیروی الکتریکی $\vec{\mathbf{F}}_E$ وارد بر بار q در خلاف جهت نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ است. این مطلب در شکل ۳۳ـ۲۷(ب)، نشان داده شده است. محاسبه‌های مفصل* در این مورد نشان می‌دهد که نیروی الکتریکی مؤثر دقیقاً برابر است با نیروی مغناطیسی و نیروی برایند وارد بر بار q در چارچوب S' صفر است. به این ترتیب ذره در هیچ‌کدام از چارچوبها شتاب نمی‌گیرد. می‌توان این نتیجه را به موارد دیگری به غیر از مورد خاصی که در اینجا بررسی کردیم و در آن چارچوب S' با سرعت $\vec{\mathbf{v}}_d$ به چارچوب S حرکت می‌کرد، تعمیم داد. در چارچوبهای مرجع دیگر، نیروهای الکتریکی و مغناطیسی مقدارهایی غیر از مقدارهای چارچوب S' دارند؛ ولی در هر چارچوب مرجعی نیروهای الکتریکی و مغناطیسی (مربوط به آن چارچوب) از

* نگاه کنید به:

R. Resnick, *Introduction to Special Relativity* (Wiley, 1968), Chapter 4.

نظر اندازه با هم برابر و از نظر جهت مخالف یکدیگرند و برایند نیروی وارد بر ذره در هر چارچوب مرجعی، صفر است.

این نتیجه جالب توجه است. بنابراین نظریهٔ نسبیت خاص، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موجودیت جداگانه‌ای ندارند. میدانی که در چارچوب مرجع، کاملاً الکتریکی یا صرفاً مغناطیسی است در چارچوب مرجع دیگر، هم مؤلفهٔ الکتریکی دارد و هم مؤلفهٔ مغناطیسی. با بهره‌گیری از معادله‌های تبدیل نسبیتی، به سادگی می‌توان بین چارچوب مرجعهای متفاوت رفت‌وآمد کرد و اغلب می‌توان با گزینش یک چارچوب مرجع که در آن میدانها ویژگی ساده‌تری دارند مسئله‌های مشکل را حل کرد و نتیجه‌ها را به چارچوب اصلی منتقل کرد. نظریهٔ نسبیت خاص می‌تواند در حل مسائلی از این دست ارزش عملی بسیار زیادی داشته باشد، زیرا روشهای نسبیت خاص می‌توانند ساده‌تر از روشهای کلاسیک باشند.

به زبان ریاضی، می‌گوییم که قانونهای الکترومغناطیس (معادله‌های ماکسول) نسبت به تبدیلهای لورنتس ناوردا هستند. مبحث مربوط به ناوردایی قانونهای فیزیکی در بخش ۱۱ـ۶ را به‌خاطر آورید: قانون را در یک چارچوب می‌نویسیم، آن را به چارچوب دیگری تبدیل می‌کنیم و قانونی به‌دست می‌آوریم که از نظر ریاضی درست به همان شکل قانون اول است. به‌عنوان مثال، قانون گاؤس، یکی از چهار معادلهٔ ماکسول، در تمام چارچوب مرجعها یکسان است.

کلام اینشتین در این مورد سرراست و دقیق است: "نیروی وارد بر جسم متحرک در میدان مغناطیسی چیزی جز میدان الکتریکی نیست." (در واقع، عنوان مقالهٔ اصلی سال ۱۹۰۵ اینشتین، که در آن مقاله او برای اولین بار ایده‌های نسبیت خاص را ارائه داد چنین بود "دربارهٔ الکترودینامیک اجسام متحرک.") از این منظر، می‌توان مغناطیس را یک اثر نسبیتی در نظر گرفت که به سرعت ذرهٔ باردار نسبت به ناظر، بستگی دارد. گرچه، برعکس سایر آثار نسبیتی، این موضوع پیامدهای قابل مشاهدهٔ بسیاری در سرعتهایی بسیار کمتر از سرعت نور دارد.

چندگزینه‌ای

۳۳ـ۱ میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک

۱. دو ذرهٔ باردار، با بار مثبت q_1 و q_2 به طرف راست شکل ۳۳ـ۲۸ در حرکت‌اند.

(۱) جهت نیروی وارد بر بار q_1 که از میدان مغناطیسی ایجادشده توسط بار q_2 ناشی می‌شود، کدام است؟

(الف) به طرف داخل صفحهٔ کاغذ

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ

(ج) به طرف بالای صفحهٔ کاغذ

(د) به طرف پایین صفحهٔ کاغذ

(۲) جهت نیروی وارد بر بار q_2 که از میدان مغناطیسی ایجادشده توسط بار q_1 ناشی می‌شود، کدام است؟

(الف) به طرف داخل صفحهٔ کاغذ

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ

(ج) به طرف بالای صفحهٔ کاغذ

(د) به طرف پایین صفحهٔ کاغذ





شکل ۳۳ـ۲۸ پرسش چندگزینه‌ای ۱.

۳۳ـ۲ میدان مغناطیسی جریان

۲. اندازهٔ میدان مغناطیسی $B(z)$ روی محور یک حلقهٔ جریان دایره‌ای را در نظر بگیرید.

(۱) $B(z)$ در مکانهای زیر بیشینه است

(الف) $z = 0$ (ب) $0 < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) صحیح است.

(۲) $B(z)$ ممکن است در مکانهای زیر برابر صفر شود

(الف) $z = 0$ (ب) $0 < |z| < \infty$ (ج) $|z| = \infty$

(د) پاسخهای (الف) و (ج) صحیح است.

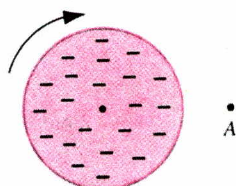
۳. قرص با بار منفی شکل ۳۳ـ۲۹ ساعتگرد چرخانده می‌شود. جهت میدان مغناطیسی در نقطهٔ A واقع بر صفحهٔ قرص کدام است؟

(الف) به طرف داخل صفحهٔ کاغذ

(ب) به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ

(ج) به طرف بالای صفحهٔ کاغذ

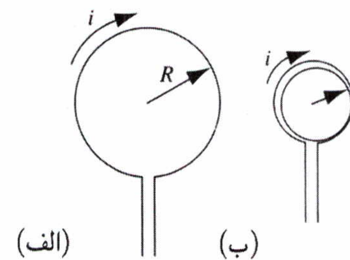
(د) به طرف پایین صفحهٔ کاغذ



شکل ۳۳ـ۲۹ پرسش چندگزینه‌ای ۳.

۴. یک قطعه سیم به طول L، مطابق شکل ۳۳ـ۳۰(الف) به‌صورت یک حلقه یا، مطابق شکل ۳۳ـ۳۰(ب) به‌صورت دو حلقه در آمده است. این سیم حامل جریان i است. نسبت شدت میدان مغناطیسی B_1 در مرکز تک‌حلقه به شدت میدان مغناطیسی B_2 در مرکز دوحلقه‌ای برابر است با

(الف) ۲ (ب) ۱ (ج) ۱/۲ (د) ۱/۴



شکل ۳۳ـ۳۰ پرسش چندگزینه‌ای ۴.

۳۳ـ۳ دو جریان موازی

۵. یک سیم بلند و مستقیم حامل جریانی به سمت شمال است. یک سیم بلند مستقیم دیگر در فاصلهٔ ۰٫۵ m به‌طور قائم در بالای سیم اول قرار دارد و حامل جریان یکسانی به سمت شرق است. هر دو سیم به‌قدر کافی بلند هستند که بتوان آنها را بینهایت در نظر گرفت.

(۱) جهت نیروی خالص وارد بر سیم بالایی به علت وجود جریان در سیم پایینی کدام است؟

(الف) بالا (ب) پایین (ج) شمال (د) جنوب

(ه) نیروی خالص صفر است.

(۲) جهت گشتاور نیروی وارد بر سیم بالایی به علت وجود جریان در سیم پایینی کدام است؟

(الف) بالا (ب) پایین (ج) شمال (د) جنوب

(ه) گشتاور نیرو صفر است.

۶. جهت دو جریان موازی به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ است. اندازهٔ میدان مغناطیسی B_2 در یک نقطهٔ دلخواه و به فاصلهٔ مساوی از هر دو سیم را با اندازهٔ میدان مغناطیسی B_1 ناشی از فقط یکی از سیمها در همان نقطه مقایسه کنید.

(الف) برای تمام نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی $B_2 > B_1$ است.

(ب) برای تمام نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی $B_2 = B_1$ است.

(ج) برای تمام نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی $B_2 < B_1$ است.

(د) فقط برای نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی نزدیک‌تر $B_2 > B_1$ است.

(ه) فقط برای نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی نزدیک‌تر $B_2 < B_1$ است.

۷. جریانهای پادموازی چنان جهت داده شده‌اند که یکی به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ و دیگری به طرف داخل صفحهٔ کاغذ است. اندازهٔ میدان مغناطیسی B_2 در یک نقطهٔ دلخواه و به فاصلهٔ مساوی از هر دو سیم را با اندازهٔ میدان مغناطیسی B_1 ناشی از فقط یکی از سیمها در همان نقطه مقایسه کنید.

(الف) برای تمام نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی $B_2 > B_1$ است.

(ب) برای تمام نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی $B_2 = B_1$ است.

(ج) برای تمام نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی $B_2 < B_1$ است.

(د) فقط برای نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی نزدیک‌تر $B_2 > B_1$ است.

(ه) فقط برای نقطه‌های با فاصلهٔ مساوی نزدیک‌تر $B_2 < B_1$ است.

۳۳ـ۴ میدان مغناطیسی سیملوله

۸. "لغزانک" فلزی را می‌توان به‌جای سیملوله مورد استفاده قرار داد. لغزانک را اندکی می‌کشیم، و جریانی از آن عبور می‌دهیم. آیا میدان مغناطیسی ایجادشده سبب می‌شود که لغزانک در هم فرو رود یا بیشتر کشیده شود؟

(الف) در هم فرو رود (ب) بیشتر کشیده شود

(ج) هیچ‌یک از پاسخهای بالا، زیرا میدان مغناطیسی در خارج از سیملوله صفر است.

(د) پاسخ بستگی به جهت جریان دارد.

۹. سیملوله‌ای را در نظر بگیرید که برای آن $R \ll L$ است. میدان مغناطیسی در مرکز سیملوله برابر B_0 است. سیملولهٔ دیگری را چنان ساخته‌ایم که شعاع و طول آن به ترتیب دو برابر شعاع و طول سیملولهٔ اول است و جریانی که از آن می‌گذرد نیز دو برابر جریان سیملولهٔ اول است، ولی این سیملوله دارای همان تعداد دور سیم‌پیچ بر متر است. میدان مغناطیسی در مرکز سیملولهٔ دوم برابر است با

(الف) $B_0/2$ (ب) B_0 (ج) $2B_0$ (د) $4B_0$

۱۰. میدان مغناطیسی $B(z)$، برای نقطه‌های روی محور سیملوله چگونه تغییر می‌کند؟ فرض کنید که $z \gg L$ است، و L معرف طول سیملوله است.

(الف) $B(z)$ ثابت است. (ب) $B(z) \propto z^{-1}$

(ج) $B(z) \propto z^{-2}$ (د) $B(z) \propto z^{-3}$

۳۳ـ۵ قانون آمپر

۱۱. بدون انتگرال‌گیری، عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} B\, dz$$

در اینجا B، میدان مغناطیسی در امتداد محور حلقهٔ جریان دایره‌ای است که با معادلهٔ (۳۳ـ۱۹) داده شده است. حاصل این انتگرال چیست؟

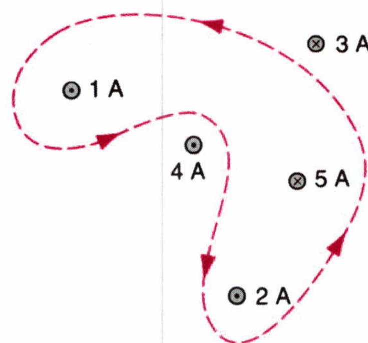
(الف) $i/2R$ (ب) $2\mu_0 i$ (ج) $\mu_0 i$

(د) این عبارت را نمی‌توان بدون انتگرال‌گیری حل کرد.

۱۲. مقدار انتگرال $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ برای مسیر نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۳۱ چقدر است؟

(الف) $-8\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$ (ب) $-4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$

(ج) $+8\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$ (د) $+32\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$

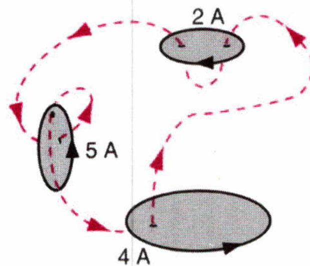


شکل ۳۳ـ۳۱ پرسش چندگزینه‌ای ۱۲.

۱۳. مقدار انتگرال $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ برای مسیر نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۳۲ چقدر است؟

(الف) $+56\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$ (ب) $-24\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$

(ج) $+328\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$ (د) $+80\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m}$



شکل ۳۳ـ۳۲ پرسش چندگزینه‌ای ۱۳.

۱۴. آیا عبارت $B = \mu_0 ni$، برای سیملوله‌های با طول بینهایت که مقطع دایره‌ای ندارند، درست است؟

(الف) برای مقطعهای نزدیک به دایره، تقریبی منطقی است.

(ب) برای هر سطح مقطع با هر شکلی، تقریبی منطقی است.

(ج) برای مقطعهایی که دارای تقارن کافی باشند (مانند مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع) درست است.

(د) برای هر سطح مقطعی با هر شکلی درست است.

۳۳ـ۶ الکترومغناطیس و چارچوبهای مرجع

پرسشها

۱. از سیکلوترونی باریکهٔ پروتونهایی با انرژی ۲۰ MeV گسیل می‌شود. آیا این ذرات میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورند؟

۲. در مورد شباهتها و اختلافها بین قانون کولن و قانون بیوـساوار بحث کنید.

۳. یک خط میدان مغناطیسی در نظر بگیرید. آیا در امتداد این خط اندازهٔ $\vec{B}$ ثابت است یا متغیر؟ آیا می‌توانید برای هر یک از این موردها مثالی ارائه دهید؟

۴. در الکترونیک، سیمهایی را که حامل جریانهای مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند اغلب به‌هم می‌پیچانند تا اثر مغناطیسی آنها را در فاصله‌های دور کاهش دهند. چرا این عمل مؤثر است؟

۵. دو بار الکتریکی در نظر بگیرید که (الف) هم‌علامت باشند و (ب) با علامت مخالف باشند و در مسیرهای موازی جداگانه با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. جهت نیروهای الکتریکی و مغناطیسی متقابل را در هر یک از دو مورد بالا مقایسه کنید.

۶. آیا برای تولید میدان مغناطیسی به غیر از واداشتن بارهای الکتریکی به حرکت، راه دیگری وجود دارد؟

۷. جزییات سه روش را ارائه دهید که به‌وسیلهٔ آنها می‌توان میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در نقطهٔ P، که به فاصلهٔ قائم r از سیم حامل جریان i قرار دارد، اندازه‌گیری کرد. این روشها مبتنی هستند بر (الف) پرتاب ذره با بار q و سرعت $\vec{v}$ موازی با سیم از نقطهٔ P؛ (ب) اندازه‌گیری نیروی وارد بر واحد طول سیم دیگری که موازی با سیم اول و حامل جریان i' است؛ (ج) اندازه‌گیری گشتاور نیروی وارد بر یک دوقطبی مغناطیسی کوچک که در فاصلهٔ قائم r از سیم قرار گرفته است.

۸. آیا $\vec{B}$ برای تمام نقطه‌های داخل حلقهٔ دایره‌ای حامل جریان یکنواخت است؟ در این باره توضیح دهید.

۹. دو رسانای بلند موازی حامل جریانهای مساوی i در یک جهت هستند. خطهای برایند $\vec{B}$ ناشی از اثر دو جریان را به‌طور تقریبی رسم کنید. آیا این شکل ربایش بین دو سیم را نشان می‌دهد؟

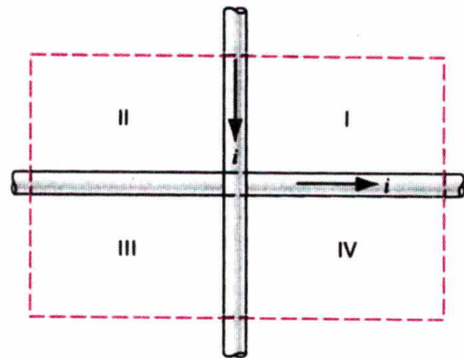
۱۰. جریانی را از یک فنر قائم که به انتهای پایینی آن وزنه‌ای آویخته شده است می‌گذارنیم. چه اتفاقی خواهد افتاد؟

۱۱. معادلهٔ (۳۳ـ۱۳) $(B = \mu_0 i/2\pi d)$ نشان می‌دهد که در

نقطه‌های نزدیک به یک سیم بلند حامل جریان، میدان مغناطیسی شدیدی به‌وجود می‌آید. چرا با وجود جریان i و میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$، هیچ نیرویی مطابق با معادلهٔ $\vec{\mathbf{F}}_B = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$ بر سیم وارد نمی‌شود؟

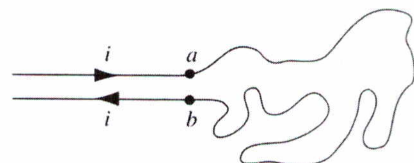
۱۲. دو سیم بلند و مستقیم به‌صورت متعامد از نزدیکی یکدیگر می‌گذرند. در صورتی که این سیمها بتوانند آزادانه حرکت کنند، حرکت آنها را وقتی که جریانهایی در آنها برقرار شود توصیف کنید.

۱۳. دو سیم ثابت به‌طور متعامد یکدیگر را قطع می‌کنند، این دو سیم واقعاً در تماس با یکدیگر قرار نمی‌گیرند ولی بسیار نزدیک به‌هم هستند. شکل ۳۳ـ۳۳ را ببینید. جریان یکسان i در هر دو سیم در جهتهای نشان داده‌شده در شکل برقرار است. در کدام‌یک از ناحیه‌ها، ممکن است نقطه‌هایی وجود داشته باشد که در آنها میدان مغناطیسی برایند صفر است.



شکل ۳۳ـ۳۳ پرسش ۱۳.

۱۴. یک حلقهٔ درهم و برهم از سیم نرم روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و دو سر آن، مطابق شکل ۳۳ـ۳۴، در نقطه‌های a و b محکم شده است. اگر جریان i از سیم بگذرد، آیا این حلقه باز می‌شود و به‌صورت حلقهٔ دایره‌ای در می‌آید یا اینکه بیشتر جمع می‌شود و در هم فرو می‌رود؟

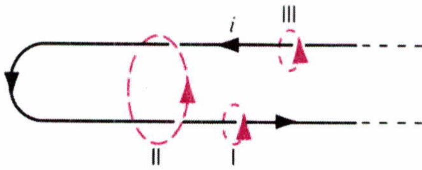


شکل ۳۳ـ۳۴ پرسش ۱۴.

۱۵. آیا مسیر انتگرال‌گیری مربوط به قانون آمپر می‌تواند از رسانا بگذرد؟

۱۶. دور کابلی که حاوی ۱۲ رشته سیم با جریانهای متفاوت است یک مسیر انتگرال‌گیری در نظر می‌گیریم. (شاید بعضی از این جریانها در جهت مخالف یکدیگر باشند.) در این مورد چگونه جریان i را برای قانون آمپر محاسبه می‌کنید؟

۱۷. قانون آمپر را به‌صورت کیفی برای سه مسیر شکل ۳۳ـ۳۵ به‌کار ببندید.



شکل ۳۳ـ۳۵ پرسش ۱۷.

۱۸. در مورد شباهتها و تفاوتهای قانون گاؤس و قانون آمپر بحث کنید.

۱۹. آیا الزاماً از استدلالهای مبتنی بر تقارن به تنهایی چنین نتیجه‌گیری می‌شود که خطوط میدان $\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به یک رشته سیم بلند و مستقیم حامل جریان i باید دایره‌های هم‌مرکز باشد؟

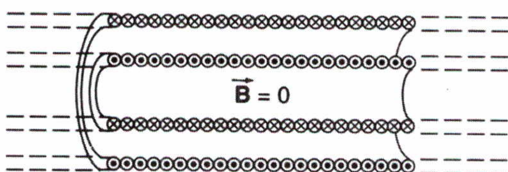
۲۰. جریان طولی یکنواخت پایایی در یک لولهٔ مسی بلند برقرار است. آیا (الف) در داخل و یا (ب) در خارج لوله میدان مغناطیسی وجود دارد؟

۲۱. یک رسانای بسیار بلند با سطح مقطع مربعی دارای حفرهٔ هم‌محوری با مقطع مربعی است. جریان به‌صورت یکنواخت در مقطع مادی رسانا توزیع شده است. آیا میدان مغناطیسی در داخل حفره صفر است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۲۲. یک رشته سیم بلند و مستقیم به شعاع R حامل جریان پایای i است. میدان حاصل از این جریان چه رابطه‌ای با R دارد؟ نقطه‌های مورد مطالعه را در داخل و خارج سیم در نظر بگیرید.

۲۳. یک رشته سیم بلند مستقیم، حامل جریان ثابت i است. برای یک حلقه که (الف) سیم را در بر می‌گیرد ولی دایره‌ای نیست، (ب) سیم را در بر نمی‌گیرد، و (ج) سیم را در بر می‌گیرد ولی در یک صفحه نیست، قانون آمپر چه الزامی را پیش می‌آورد؟

۲۴. دو سیملولهٔ بلند، مطابق شکل ۳۳ـ۳۶، یکی در داخل دیگری و هم‌محور قرار گرفته‌اند. این دو سیملوله حامل جریانهای مساوی ولی در جهتهای مخالف هستند. اگر در داخل سیملولهٔ داخلی میدان

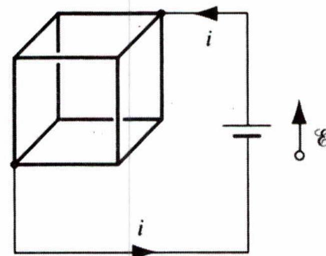


شکل ۳۳ـ۳۶ پرسش ۲۴.

مغناطیسی وجود نداشته باشد، دربارهٔ n، تعداد دور سیم‌پیچ به‌ازای واحد طول، هر یک از دو سیملوله چه می‌توانید بگویید؟ اگر این دو عدد با هم تفاوت دارند، n مربوط به کدام سیملوله بیشتر است؟

۲۵. میدان مغناطیسی در مرکز حلقهٔ جریان دایره‌ای برابر $B = \mu_\circ i/2R$ است، نگاه کنید به معادلهٔ (۳۳ـ۲۱). ولی، میدان الکتریکی در مرکز حلقهٔ بار صفر است. چرا این اختلاف وجود دارد؟

۲۶. جریان پایایی در یک شبکهٔ مکعبی از سیمهای مقاوم، مطابق شکل ۳۳ـ۳۷، برقرار شده است. با بهره‌گیری از استدلالهای مبتنی بر تقارن نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز مکعب صفر است.



شکل ۳۳ـ۳۷ پرسش ۲۶.

۲۷. آیا معادلهٔ (۳۳ـ۲۸) $(B = \mu_\circ ni)$، برای سیملوله‌ای با مقطع مربعی معتبر است؟

۲۸. چنبره را سیملوله‌ای تعریف می‌کنیم که به‌صورت دونات خم شده باشد. میدان مغناطیسی در خارج از سیملولهٔ ایده‌آل صفر نیست. در مورد شدت میدان مغناطیسی در خارج از چنبرهٔ ایده‌آل چه می‌توان گفت؟

۲۹. الکترونهای متحرک در سیم جریانی به‌وجود می‌آورند که به آن میدان مغناطیسی وابسته است. ناظری که با سرعت سوق الکترونها در امتداد سیم حرکت می‌کند، جریان و میدان مغناطیسی را چقدر اندازه می‌گیرد؟

تمرینها

۳۳ـ۱ میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک

۱. (الف) فیزیک نانسبیتی سرعت دو پروتون را که با فاصلهٔ d از هم و در کنار هم حرکت می‌کنند چقدر پیش‌بینی می‌کند تا نیروی مغناطیسی بین آنها دقیقاً با نیروی الکتریکی بین آنها موازنه کند؟ (ب) دربارهٔ مناسب‌بودن به‌کارگیری عبارتهای نانسبیتی در مورد این مسئله اظهار نظر کنید.

۳۳ـ۲ میدان مغناطیسی جریان

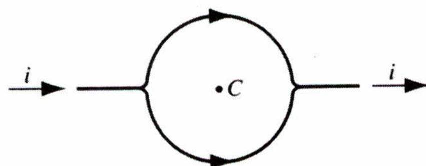
۲. یک نقشه‌بردار در فاصلهٔ ۶٫۳ m زیر یک خط انتقال نیرو که حامل جریان پایای ۱۲۰ A است از قطب‌نما استفاده می‌کند. آیا این خط انتقال در عملکرد قطب‌نما تأثیری جدی دارد؟ مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در این محل ۲۱٫۰ μT است.

۳. سیم نمرهٔ ۱۰ مسی لخت (به قطر ۲٫۶ mm) می‌تواند بدون گرم‌شدن بیش از حد حامل جریان ۵۰ A باشد. برای این جریان، میدان مغناطیسی در سطح سیم چقدر است؟

۴. شدت میدان مغناطیسی زمین در مکانی در فیلیپین ۳۹٫۰ μT است و این میدان افقی و به سمت شمال است. میدان مغناطیسی برایند در فاصلهٔ ۸٫۱۳ cm بالای یک سیم بلند و مستقیم افقی که حامل جریان پایایی است، صفر است. (الف) جریان را محاسبه و (ب) جهت آن را تعیین کنید.

۵. تفنگ الکترونی ۲۵ـkV لامپ تصویر تلویزیونی باریکه‌ای به قطر ۰٫۲۲ mm شلیک می‌کند. در هر ثانیه $۵٫۶ \times ۱۰^{۱۴}$ الکترون با صفحهٔ لامپ برخورد می‌کند. میدان مغناطیسیی که این باریکه در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱٫۵ mm از محور آن تولید می‌کند محاسبه کنید.

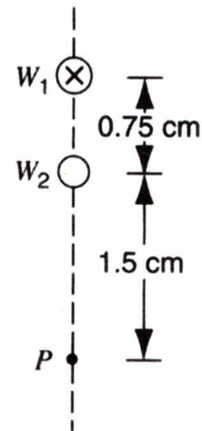
۶. رسانای مستقیمی که حامل جریان i است به دو شاخهٔ کاملاً یکسان نیمدایره‌ای، مطابق شکل ۳۳ـ۳۸، منشعب می‌شود. شدت میدان مغناطیسی، در مرکز C حلقهٔ دایره‌ای حاصل چقدر است؟



شکل ۳۳ـ۳۸ تمرین ۶.

۷. یک سیم بلند و مستقیم حامل جریان ۴۸٫۸ A است. الکترونی که با سرعت $۱٫۰۸ \times ۱۰^{۷}$ m/s حرکت می‌کند از فاصلهٔ ۵٫۲۰ cm این سیم می‌گذرد. نیروی وارد بر الکترون را در حالتهای زیر تعیین کنید: (الف) الکترون به طرف سیم حرکت می‌کند، (ب) الکترون موازی با جریان در حرکت است، و (ج) جهت حرکت الکترون عمود بر جهتهای توصیف‌شده در قسمتهای (الف) و (ب) است.

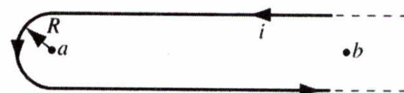
۸. دو سیم بلند و مستقیم موازی که به فاصلهٔ ۰٫۷۵ cm از هم قرار گرفته‌اند، بر صفحهٔ شکل ۳۳ـ۳۹ عمودند. سیم $W_۱$ حامل جریان ۶٫۶ A به طرف داخل شکل است. برای اینکه میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ P برابر با صفر باشد، چه جریانی (اندازه و جهت) باید از سیم $W_۲$ بگذرد؟



شکل ۳۳ـ۳۹ تمرین ۸.

۹. دو سیم بلند و موازی در فاصلهٔ ۸٫۱۰ cm از یکدیگر قرار گرفته‌اند. اگر بخواهیم شدت میدان مغناطیسی در نقطهٔ وسط بین دو سیم برابر ۲۹۶μT باشد، چه جریانهای برابری باید از دو سیم بگذرد؟

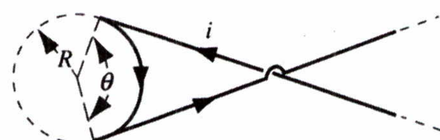
۱۰. یک رشته سیم را خم می‌کنیم و مطابق شکل ۳۳ـ۴۰ به‌صورت یک سنجاق سر بلند در می‌آوریم. اگر این سیم حامل جریان $i =$ ۱۱٫۵ A باشد، (الف) اندازه و جهت $\vec{\mathbf{B}}$ در نقطهٔ a کدام است؟ (ب) در نقطهٔ b که در فاصلهٔ زیادی از a قرار دارد $\vec{\mathbf{B}}$ چقدر است؟ در اینجا فرض کنید که $R =$ ۵٫۲۰ mm است.



شکل ۳۳ـ۴۰ تمرین ۱۰.

۱۱. دانشجویی با پیچیدن ۳۲۰ دور سیم، دور یک استوانهٔ چوبی به قطر ۴٫۸۰ cm آهنربای الکتریکی درست می‌کند. این پیچه متصل به باتری است که جریان ۴٫۲۰ A را در سیم برقرار می‌کند. در چه فاصله‌ای روی محور این پیچه ($z \gg d$) میدان مغناطیسی پیچه برابر ۵٫۰ μT (تقریباً یک‌دهم میدان مغناطیسی زمین) می‌شود؟

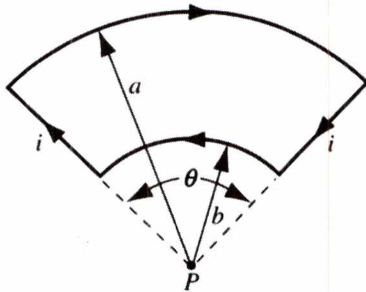
۱۲. یک رشته سیم حامل جریان i مطابق شکل ۳۳ـ۴۱ درآمده است. دو قطعه سیم مستقیم نیم‌نامتناهی، که به دایرهٔ یکسانی مماس‌اند، با



شکل ۳۳ـ۴۱ تمرین ۱۲.

قوس دایره‌ای به زاویهٔ θ روی محیط آن دایره به‌هم وصل می‌شوند، و تمام بخشهای این مجموعه در یک صفحه قرار دارد. زاویهٔ θ چقدر باشد تا B در مرکز این دایره صفر شود؟

۱۳. مدار شکل ۳۳ـ۴۲ را در نظر بگیرید. قسمتهای خمیده قوسهایی از دایره‌هایی با شعاعهای a و b هستند. قسمتهای مستقیم در امتداد شعاعها قرار دارند. با فرض اینکه جریان در مدار برابر i باشد، میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P معین کنید.



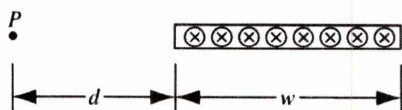
شکل ۳۳ـ۴۲ تمرین ۱۳.

۱۴. نشان دهید که میدان B در مرکز حلقهٔ سیم مستطیلی به طول L و به عرض W که حامل جریان i است از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$B = \frac{۲\mu_۰ i}{\pi} \frac{(L^۲ + W^۲)^{۱/۲}}{LW}$$

نشان دهید که وقتی $L \gg W$، این رابطه به نتیجه‌ای سازگار با مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۴ تبدیل می‌شود.

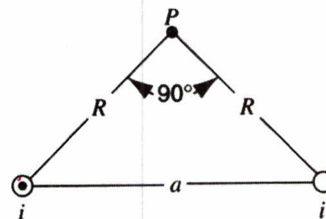
۱۵. در شکل ۳۳ـ۴۳ سطح مقطع یک نوار بلند نازک به عرض W را نشان داده‌ایم که حامل جریان کل یکنواخت توزیع‌شدهٔ i، به داخل صفحهٔ شکل است. اندازه و جهت میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطه‌ای مانند P واقع در صفحهٔ نوار و به فاصلهٔ d از لبهٔ آن محاسبه کنید. (راهنمایی: فرض کنید نوار از تعداد زیادی سیمهای بلند نازک موازی تشکیل شده است.)



شکل ۳۳ـ۴۳ تمرین ۱۵.

۱۶. هریک از دو رشته سیم بلند و مستقیم موازی که به فاصلهٔ ۱۲٫۲ cm از هم قرار گرفته‌اند، حامل جریان ۱۱۵ A اند. در شکل ۳۳ـ۴۴ سطح مقطع این سیمها را که عمود بر صفحهٔ شکل قرار دارند، نشان داده‌ایم.

نقطهٔ P روی عمودمنصف a قرار دارد. اندازه و جهت میدان مغناطیسی را در نقطهٔ P وقتی که جریان در سیم سمت چپ به طرف خارج از صفحهٔ شکل است و جریان در سیم سمت راست (الف) به طرف خارج از صفحهٔ شکل و (ب) به طرف داخل صفحه شکل است، معین کنید.



شکل ۳۳ـ۴۴ تمرین ۱۶.

۱۷. در شکل ۳۳ـ۱۳(الف) فرض کردیم که هر دو جریان در یک جهت و به سمت خارج از صفحهٔ شکل باشند. نشان دهید که میدان مغناطیسی در صفحه متشکل از این سیمها برابر است با

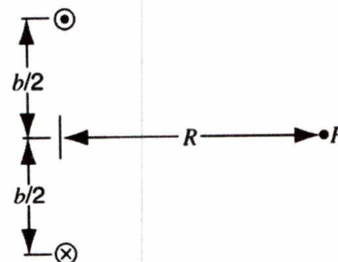
$$B = \frac{\mu_\circ ix}{\pi(x^۲ - b^۲)}$$

فرض کنید در شکل ۳۳ـ۱۳(الف)، داشته باشیم $i = ۲۵\ \mathrm{A}$، $b = ۲٫۵\ \mathrm{cm}$. میدان B را در محدودهٔ $-۲٫۵\ \mathrm{cm} < x < +۲٫۵\ \mathrm{cm}$ رسم کنید. قطر سیمها را ناچیز در نظر بگیرید.

۱۸. دو سیم بلند که در فاصلهٔ b از یکدیگر قرار دارند، حامل جریانهای پادموازی i هستند (نگاه کنید به شکل ۳۳ـ۴۵). (الف) نشان دهید که شدت میدان مغناطیسی در نقطهٔ P که از دو سیم به یک فاصله است از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$B = \frac{۲\mu_\circ ib}{\pi(۴R^۲ + b^۲)}$$

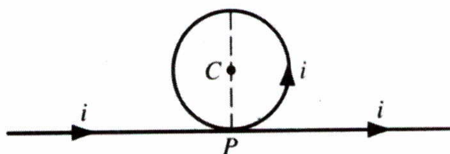
(ب) جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ کدام است؟



شکل ۳۳ـ۴۵ تمرین ۱۸.

۱۹. یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۲ cm حامل جریانی به شدت ۱۳ A است. حلقهٔ دیگری به شعاع ۰٫۸۲ cm، متشکل از ۵۰ دور سیم، حامل جریانی به شدت ۱٫۳ A است و در مرکز حلقهٔ اول قرارگرفته است. (الف) حلقهٔ بزرگ چه میدان مغناطیسی در مرکزش به‌وجود می‌آورد؟ (ب) گشتاور نیرویی را که بر حلقهٔ کوچک وارد می‌شود محاسبه کنید. فرض کنید که صفحه‌های حلقه‌ها برهم عمودند و میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ بزرگ در تمام حجم اشغال‌شده توسط حلقهٔ کوچک یکنواخت است.

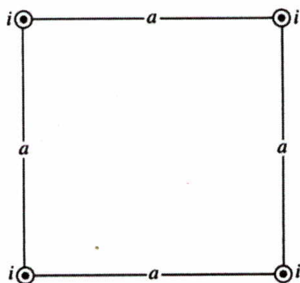
۲۰. (الف) یک رشته سیم بلند به‌صورت نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۴۶ درآمده است، بدون اینکه در نقطهٔ تلاقی P تماسی ایجاد شود. شعاع قسمت دایره‌ای این مسیر R است. وقتی، آن‌طور که در شکل نموده‌شده، جریان i در این مسیر برقرار شود، مقدار و جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را در مرکز C بخش دایره‌ای مشخص کنید. (ب) بخش دایره‌ای را بدون واپیچش حول قطری که در شکل با خط‌چین نشان داده شده است به اندازهٔ یک‌چهارم دور به‌طور ساعتگرد می‌چرخانیم، به‌طوری که حلقهٔ دایره‌ای اکنون عمود بر صفحهٔ کاغذ است. در این حالت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را در مرکز C حلقه معین کنید.



شکل ۳۳ـ۴۶ تمرین ۲۰.

۳۳ـ۳ دو جریان موازی

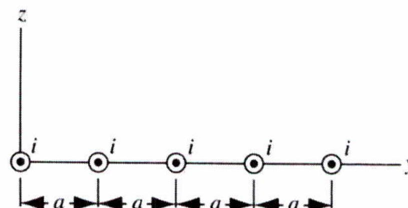
۲۱. چهار رشته سیم مسی بلند موازی، مطابق شکل ۳۳ـ۴۷، به‌صورت مربع آراسته شده‌اند. این سیمها، همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، حامل جریانهای یکسان i به سمت خارج از صفحهٔ شکل هستند. نیروی وارد بر واحد طول هر یک از چهار رشته سیم را محاسبه کنید؛ اندازه و جهت نیرو را در هر مورد به‌دست آورید. فرض کنید



شکل ۳۳ـ۴۷ تمرین ۲۱.

$i = ۱۸٫۷\,\mathrm{A}$ و $a = ۲۴٫۵\,\mathrm{cm}$ است. (این رفتار در حرکت موازی ذره‌های باردار در پلاسما به اثر تنگش موسوم است.)

۲۲. در شکل ۳۳ـ۴۸، پنج رشته سیم بلند موازی را نشان داده‌ایم، که در صفحهٔ xy قرار گرفته‌اند. هر یک از سیمها حامل جریان $i = ۳٫۲۲\,\mathrm{A}$ در جهت مثبت x است. فاصلهٔ بین سیمهای مجاور هم برابر $a = ۸٫۳۰\,\mathrm{cm}$ است. نیروی مغناطیسی (بزرگی و جهت) وارد بر واحد طول هر یک از این پنج رشته سیم را معین کنید.

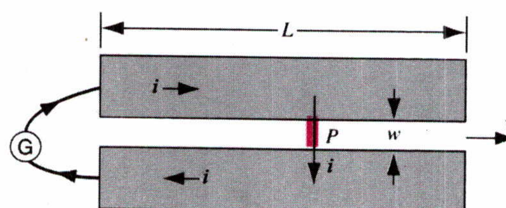


شکل ۳۳ـ۴۸ تمرین ۲۲.

۲۳. در شکل ۳۳ـ۴۹ طرح ایده‌آل یک "تفنگ ریل الکترومغناطیسی" را نشان داده‌ایم که برای شلیک پرتابه‌هایی با سرعت حداکثر $۱۰\,\mathrm{km/s}$ طراحی شده است. پرتابهٔ P بین ریلها و در تماس با آنها قرار دارد و می‌تواند در امتداد آنها بلغزد. مولد G جریانی در یک ریل برقرار می‌کند که از پرتابه عبور می‌کند و از طریق ریل دیگر باز می‌گردد. (الف) فرض کنید که w فاصلهٔ بین ریلها، r شعاع ریلها (که فرض می‌کنیم دایره‌ای هستند)، و i جریان در مدار باشد. نشان دهید که نیروی وارد بر پرتابه به طرف راست بوده و اندازهٔ آن تقریباً برابر است با

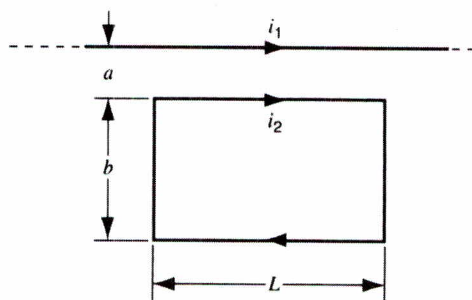
$$F = \frac{۱}{۲}\left(\frac{i^{۲}\mu_{\circ}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{w+r}{r}\right)$$

(ب) اگر پرتابه از انتهای سمت چپ ریل از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت خروج آن را از انتهای سمت راست معین کنید. در اینجا فرض کنید $i = ۴۵۰\,\mathrm{kA}$، $w = ۱۲\,\mathrm{mm}$، $r = ۶٫۷\,\mathrm{cm}$، $L = ۴٫۰\,\mathrm{m}$ و جرم پرتابه (چارپاره) یعنی m برابر ۱۰ گرم است.



شکل ۳۳ـ۴۹ تمرین ۲۳.

۲۴. در شکل ۳۳ـ۵۰ یک رشته سیم بلند حامل جریان $i_۱$ را نشان داده‌ایم. حلقهٔ مستطیلی حامل جریان $i_۲$ است. برایند نیروی وارد بر حلقه را محاسبه کنید. فرض کنید $a = ۱٫۱۰\,\mathrm{cm}$، $b = ۹٫۲۰\,\mathrm{cm}$، $L = ۳۲٫۳\,\mathrm{cm}$، $i_۱ = ۲۸٫۶\,\mathrm{A}$، و $i_۲ = ۲۱٫۸\,\mathrm{A}$ است.



شکل ۳۳ـ۵۰ تمرین ۲۴.

۲۵. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۶، فرض کنید که سیم بالایی را اندکی به طرف پایین جابه‌جا و سپس رها کنیم. نشان دهید که حرکت ایجادشده در سیم بالایی حرکت هماهنگ ساده با بسامدی برابر با بسامد آونگ ساده به طول d است.

۳۳ـ۴ میدان مغناطیسی سیملوله

۲۶. سیملوله‌ای به طول $۹۵٫۶\,\mathrm{cm}$ و با شعاع $۱٫۹۰\,\mathrm{cm}$ دارای ۱۲۳۰ دور سیم‌پیچ است و جریان $۳٫۵۸\,\mathrm{A}$ را حمل می‌کند. شدت میدان مغناطیسی را در داخل این سیملوله محاسبه کنید.

۲۷. سیملوله‌ای به طول $۱٫۳۳\,\mathrm{m}$ و به قطر $۲٫۶۰\,\mathrm{cm}$ حامل جریانی به شدت $۱۷٫۸\,\mathrm{A}$ است. شدت میدان مغناطیسی در داخل این سیملوله $۲۲٫۴\,\mathrm{mT}$ است. طول سیم مورد استفاده در این سیملوله را معین کنید.

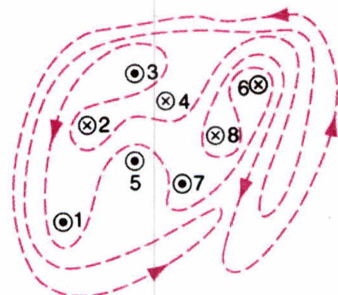
۲۸. سیملولهٔ بلندی با ۱۱۵ دور سیم در هر سانتی‌متر و با شعاع $۷٫۲۰\,\mathrm{cm}$ حامل جریان $۱٫۹۴\,\mathrm{mA}$ است. جریانی به‌شدت $۶٫۳۰\,\mathrm{A}$ در یک رسانای مستقیم در امتداد محور سیملوله برقرار است. (الف) در چه فاصلهٔ شعاعی از محور سیملوله، جهت میدان مغناطیسی برایند با محور استوانه زاویهٔ $۴۰٫۰^{\circ}$ می‌سازد؟ (ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی چقدر است؟

۲۹. درستی انتگرال‌گیری در معادلهٔ (۳۳ـ۲۷) را بررسی کنید و نشان دهید که وقتی $L \to \infty$ معادلهٔ (۳۳ـ۲۷) به معادلهٔ (۳۳ـ۲۸) نزدیک می‌شود.

۳۳ـ۵ قانون آمپر

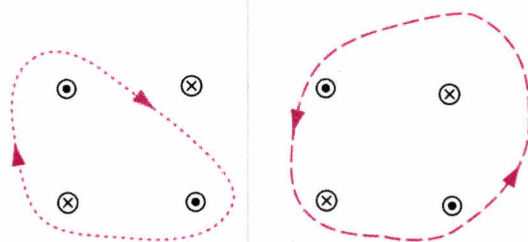
۳۰. هشت رشته سیم در نقطه‌های نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۵۱

به‌طور عمود، صفحهٔ شکل را قطع می‌کنند. هر یک از این سیمها با عدد درست k $(k = ۱, ۲, ۳, \ldots, ۸)$ نشانه‌گذاری شده‌اند و حامل جریان $ki_\circ$ هستند. برای سیمهای فرد جریان به طرف خارج صفحهٔ شکل و برای سیمهای زوج جریان به طرف داخل است. انتگرال خطی $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ را روی مسیر بسته و در جهت نشان داده‌شده در شکل محاسبه کنید.



شکل ۳۳ـ۵۱ تمرین ۳۰.

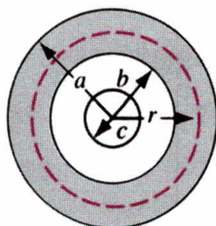
۳۱. هرکدام از هشت رسانای نشان داده‌شده در شکل ۳۳ـ۵۲ حامل جریان $۲٫۰\ \mathrm{A}$ به داخل صفحهٔ شکل یا خارج از آن هستند. دو مسیر برای انتگرال‌گیری خطی $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ مشخص شده است. مقدار انتگرال برای (الف) مسیر نقطه‌چین و (ب) مسیر خط‌چین چقدر است؟



شکل ۳۳ـ۵۲ تمرین ۳۱.

۳۲. سیم استوانه‌ای بلندی به شعاع R را در نظر بگیرید که حامل جریان i است. این جریان به‌طور یکنواخت در سطح مقطع سیم توزیع شده است. در چه دو فاصله‌ای از محور سیم شدت میدان مغناطیسی ناشی از جریان، برابر نصف شدت میدان روی سطح استوانه است؟

۳۳. در شکل ۳۳ـ۵۳ مقطع یک رسانای بلند از نوعی را نشان داده‌ایم که به آنها کابلهای هم‌محور می‌گوییم. شعاعهای این کابل عبارت‌اند از a، b، و c. جریانهای برابر با توزیع یکنواخت و پادموازی i در دو رسانا برقرار است. روابطی را برای تغییرات $B(r)$ در گستره‌های (الف) $r < c$، (ب) $c < r < b$، (ج) $b < r < a$ و (د) $r > a$ به‌دست آورید. (ه) این رابطه‌ها را برای تمام موارد خاص ممکن ارزیابی کنید. (و) فرض کنید $a = ۲٫۰\ \mathrm{cm}$، $b = ۱٫۸\ \mathrm{cm}$، $c = ۰٫۴۰\ \mathrm{cm}$ و $i = ۱۲۰\ \mathrm{A}$؛ نمودار تغییرات $B(r)$ را در گسترهٔ $۰ < r < ۳\ \mathrm{cm}$ رسم کنید.

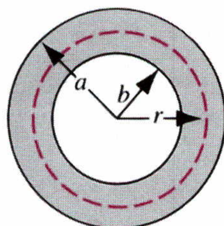


شکل ۳۳ـ۵۳ تمرین ۳۳.

۳۴. در شکل ۳۳ـ۵۴ مقطع یک استوانهٔ رسانای توخالی به شعاعهای a و b را نشان داده‌ایم، که حامل جریان یکنواخت توزیع‌شدهٔ i است. (الف) با استفاده از حلقهٔ آمپری دایره‌ای در شکل، نشان دهید که $B(r)$ در گسترهٔ $b < r < a$ به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

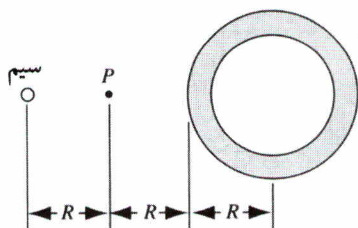
$$B(r) = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi(a^۲ - b^۲)} \frac{r^۲ - b^۲}{r}$$

(ب) درستی این فرمول را برای حالتهای خاص $r = a$، $r = b$ و $b = ۰$ تحقیق کنید. (ج) فرض کنید داشته باشیم $a = ۲٫۰\ \mathrm{cm}$، $b = ۱٫۸\ \mathrm{cm}$، و $i = ۱۰۰\ \mathrm{A}$ و در این حالت نمودار تغییرات $B(r)$ را در گسترهٔ $۰ < r < ۶\ \mathrm{cm}$ رسم کنید.



شکل ۳۳ـ۵۴ تمرین ۳۴.

۳۵. یک لولهٔ استوانه‌ای بلند با شعاع خارجی R حامل جریان (با توزیع یکنواخت) $i_\circ$ به طرف داخل صفحهٔ شکل ۳۳ـ۵۵ است. یک

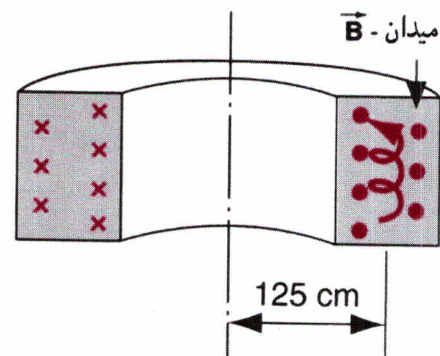


شکل ۳۳ـ۵۵ تمرین ۳۵.

رشته سیم به موازات لوله و در فاصلهٔ مرکز به مرکز $3R$ از آن کشیده شده است. اندازه و جهت جریان در سیم را چنان تعیین کنید که میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ P از لحاظ اندازه با میدان مغناطیسی برایند در مرکز لوله برابر ولی از نظر جهت برخلاف آن باشد.

۳۶. چنبره‌ای با مقطع مربعی به ضلع ۵٫۲۰ cm و شعاع داخلی ۱۶٫۲ cm دارای ۵۳۵ دور سیم‌پیچ و حامل جریانی به شدت ۸۱۳ mA است. میدان مغناطیسی در داخل چنبره را در (الف) شعاع داخلی و (ب) شعاع خارجی محاسبه کنید.

۳۷. وقتی می‌کوشیم مجموعه‌ای از الکترونها و یونهای مثبت (یک پلاسما) را در میدان مغناطیسی یک چنبره محصور کنیم پدیدهٔ جالب (و نومیدکننده‌ای) رخ می‌دهد. ذراتی که حرکتشان عمود بر میدان $\vec{B}$ است حرکت دایره‌ای نخواهند داشت، زیرا شدت میدان مغناطیسی با فاصلهٔ شعاعی از محور چنبره تغییر می‌کند. این اثر، که (به‌صورت اغراق‌آمیزی) در شکل ۳۳ـ۵۶ نشان داده شده است، سبب می‌شود که ذرات با بارهای الکتریکی مخالف در جهتهای مخالف یکدیگر و موازی با محور چنبره به حرکت درآیند. (الف) علامت بار ذره‌ای که مسیرش در شکل نشان داده شده چیست؟ (ب) اگر شعاع انحنای مسیر ذره در هنگامی که فاصلهٔ آن از محور چنبره ۱۲۵ cm است برابر با ۱۱ cm است، وقتی فاصلهٔ ذره از محور چنبره ۱۱۰ cm است شعاع انحنای مسیر آن چقدر می‌شود؟

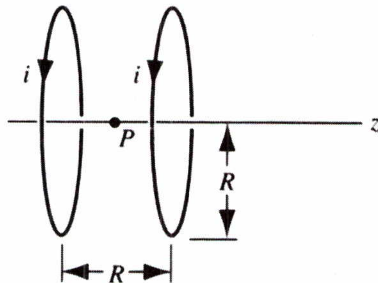


شکل ۳۳ـ۵۶ تمرین ۳۷.

۳۳ـ۶ الکترومغناطیس و چارچوبهای مرجع

مسئله‌ها

۱. در شکل ۳۳ـ۵۷ ترتیبی را نشان داده‌ایم که به پیچهٔ هلمهولتز معروف است. این وسیله تشکیل شده است از دو پیچهٔ هم‌محور دایره‌ای به شعاع R، که هر کدام شامل N حلقه است و در فاصلهٔ R از یکدیگر قرار دارند. این پیچه‌ها حامل جریانهای یکسان i در یک جهت هستند. میدان مغناطیسی را در نقطهٔ P، نقطهٔ وسط دو پیچه، تعیین کنید.

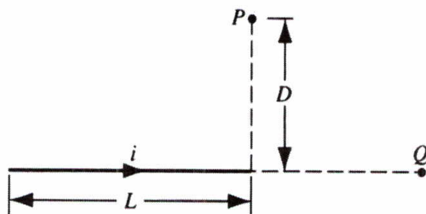


شکل ۳۳ـ۵۷ مسئله‌های ۱، ۳، و مسئلهٔ کامپیوتری ۱.

۲. یک قطعه سیم مستقیم به طول L، حامل جریان i است. (الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی ناشی از این سیم در نقطهٔ P که در فاصلهٔ عمودی D از یک سر سیم قرار دارد (شکل ۳۳ـ۵۸) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_\circ i}{4\pi D}\frac{L}{(L^2 + D^2)^{1/2}}$$

(ب) نشان دهید که میدان مغناطیسی در نقطهٔ Q در امتداد رشته سیم صفر است.



شکل ۳۳ـ۵۸ مسئلهٔ ۲.

۳. در مسئلهٔ ۱ (شکل ۳۳ـ۵۷) فرض کنید که فاصلهٔ بین پیچه‌ها متغیری مانند s باشد (که الزاماً برابر با شعاع R پیچه نیست). (الف) نشان دهید که مشتق اول میدان مغناطیسی (dB/dz) در نقطهٔ میانی P، بدون توجه به مقدار s، صفر می‌شود. با توجه به تقارن چرا انتظار دارید که این شرط برقرار باشد؟ (ب) نشان دهید که اگر $s = R$ باشد، مشتق دوم میدان مغناطیسی (d^2B/dz^2) نیز در نقطهٔ P برابر صفر می‌شود. این شرط، یکنواختی میدان B در حوالی نقطهٔ P برای این فاصلهٔ خاص بین پیچه‌ها را توجیه می‌کند.

۴. یک حلقهٔ مربع‌شکل به ضلع a حامل جریان i است. (الف) نشان دهید که میدان B برای نقطه‌ای واقع بر محور این حلقه و در فاصلهٔ

z از مرکز آن، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B(z) = \frac{۴\mu_\circ ia^۲}{\pi(۴z^۲ + a^۲)(۴z^۲ + ۲a^۲)^{۱/۲}}$$

(ب) این رابطه برای مرکز حلقه به چه صورت در می‌آید؟

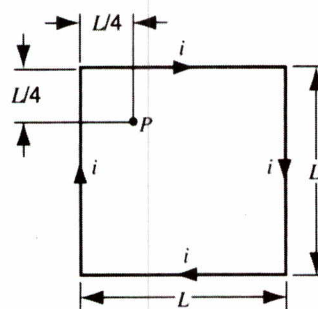
۵. (الف) سیمی که به‌صورت یک nضلعی منتظم درآمده در دایره‌ای به شعاع a محصور شده است. نشان دهید که اگر جریان i در این سیم برقرار شود، اندازهٔ میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ در مرکز دایره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_\circ ni}{۲\pi a}\tan(\pi/n)$$

(ب) نشان دهید که وقتی $n \to \infty$ این نتیجه، میدان مربوط به حلقهٔ دایره‌ای را به‌دست می‌دهد.

۶. قطعه سیمی به طول L در اختیار دارید که می‌توانید در آن جریان i را برقرار کنید. این قطعه سیم را می‌توان به‌صورت دایره یا مربع درآورد. نشان دهید که میدان B در مرکز حلقهٔ مربع‌شکل بیشتر است.

۷. (الف) میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را در نقطهٔ P در شکل ۳۳ـ۵۹ محاسبه کنید. (ب) آیا شدت میدان در نقطهٔ P از شدت میدان در مرکز مربع بیشتر است یا کمتر؟



شکل ۳۳ـ۵۹ مسئلهٔ ۷.

۸. در سطح یک قرص پلاستیکی نازک به شعاع R بار q به‌صورت یکنواخت توزیع شده است. اگر این قرص را با بسامد زاویه‌ای ω حول محورش بچرخانیم، نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز قرص برابر است با

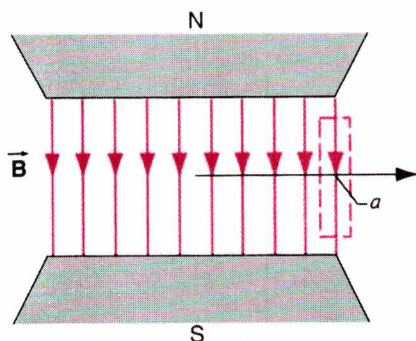
$$B = \frac{\mu_\circ \omega q}{۲\pi R}$$

(راهنمایی: قرص چرخان معادل آرایه‌ای از حلقه‌های جریان است.)

۹. سیملولهٔ بلندی دارای ۱۰۰ دور سیم‌پیچ در هر سانتی‌متر است. الکترونی در داخل این سیملوله در دایره‌ای به شعاع ۲٫۳۰ cm و عمود بر محور سیملوله در حرکت است. سرعت الکترون c ۰٫۰۴۶۰ (c = سرعت سیر نور) است. جریان را در سیملوله تعیین کنید.

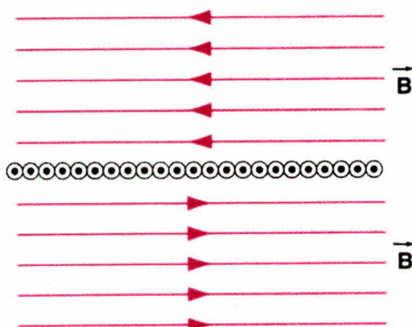
۱۰. در ناحیهٔ خاصی از فضا چگالی جریان یکنواخت $۱۵\,\mathrm{A/m^۲}$ در جهت مثبت z برقرار است. انتگرال $\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$، وقتی انتگرال خطی روی سه پاره‌خط مستقیم از $(۴d, ۰, ۰)$ به $(۴d, ۳d, ۰)$ به $(۰, ۰, ۰)$ به $(۴d, ۰, ۰)$ گرفته شود و $d = ۲۳\,\mathrm{cm}$ باشد، چقدر است؟

۱۱. نشان دهید آن‌گونه که پیکان افقی گذرنده از نقطهٔ a در شکل ۳۳ـ۶۰ تداعی می‌کند، میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ وقتی عمود بر خطوط آن حرکت می‌کنیم نمی‌تواند به‌طور ناگهانی و یک‌باره صفر شود. (راهنمایی: قانون آمپر را برای مسیر مستطیلی که در شکل با خط‌چین مشخص شده است، به‌کار ببرید.) در آهنرباهای واقعی "آثار لبه‌ای"، یا چتری شدن، خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ همواره رخ می‌دهند که به این معنی است که $\vec{\mathbf{B}}$ تدریجاً به صفر نزدیک می‌شود. خطوط $\vec{\mathbf{B}}$ در این شکل را اصلاح کنید تا وضعیت واقعی‌تری را نشان دهند.



شکل ۳۳ـ۶۰ مسئلهٔ ۱۱.

۱۲. رسانایی از تعداد نامتناهی سیمهای کنار هم تشکیل شده است، که هر یک از آنها دارای بلندی بینهایت و حامل جریان i است. نشان دهید که خطوط میدان $\vec{\mathbf{B}}$ به‌صورت شکل ۳۳ـ۶۱ است و $\vec{\mathbf{B}}$ برای



شکل ۳۳ـ۶۱ مسئلهٔ ۱۲.

تمام نقاط بالا و پایین برگهٔ نامتناهی جریان از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B = \frac{۱}{۲}\mu_۰ ni$$

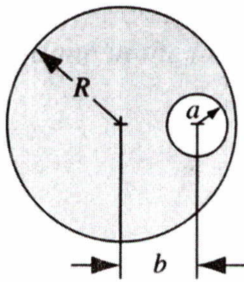
که در اینجا، n تعداد سیمها به‌ازای واحد طول است. این نتیجه را با کاربرد مستقیم قانون آمپر و به‌صورت حالت حدی مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۵ به‌دست آورید.

۱۳. چگالی جریان در یک سیم بلند و توپُر استوانه‌ای به شعاع a در امتداد محور سیم است و با فاصلهٔ شعاعی از محور به‌طور خطی طبق رابطهٔ $j = j_۰ r/a$ تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی را در داخل سیم مشخص کنید. پاسخ خود را برحسب جریان کل i که در سیم برقرار است، بیان کنید.

۱۴. در شکل ۳۳ـ۶۲ سطح مقطع یک رسانای بلند استوانه‌ای به شعاع R را نشان داده‌ایم که دارای یک سوراخ بلند استوانه‌ای به شعاع a است. محورهای این دو استوانه موازی‌اند و در فاصلهٔ b از یکدیگر قرار دارند. جریان i به‌طور یکنواخت، در سطح هاشورخوردهٔ شکل، توزیع شده است. (الف) با استفاده از ایده‌های برهم‌نهی، نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز سوراخ برابر است با

$$B = \frac{\mu_۰ ib}{۲\pi(R^۲ - a^۲)}$$

(ب) دو حالت خاص $a = ۰$ و $b = ۰$ را بررسی کنید. (ج) آیا می‌توانید از قانون آمپر برای نشان دادن اینکه میدان مغناطیسی در سوراخ یکنواخت است استفاده کنید؟ (راهنمایی: تصور کنید که در سوراخ استوانه‌ای دو جریان مساوی ولی در جهتهای مخالف جاری است، به‌طوری که یکدیگر را خنثی می‌کنند. فرض کنید هر یک از این جریانها همان چگالی جریان مربوط به رسانای واقعی را دارند. به این ترتیب میدانهای ناشی از جریانهای جاری در دو استوانهٔ کامل، به شعاعهای R و a، را برهم می‌نهیم که چگالی جریان یکسانی دارند.)



شکل ۳۳ـ۶۲ مسئلهٔ ۱۴.

مسئله‌های کامپیوتری

۱. دو پیچه در اختیار داریم که هر کدام شامل ۳۰۰ دور سیم‌پیچ است. هر یک از این دو پیچه حامل جریان i است. این پیچه‌ها چنان آرایش یافته‌اند که فاصلهٔ بین آنها برابر با شعاع آنهاست (مطابق شکل ۳۳ـ۵۷). (این آرایش هندسی پیچهٔ هلمهولتز است؛ مسئلهٔ ۱ را ببینید.) به‌ازای $R = ۵٫۰\ \text{cm}$ و $i = ۵۰\ \text{A}$، B را به‌صورت تابعی از فاصلهٔ z در امتداد محور مشترک دو پیچه در گسترهٔ $z = -۵\,\text{cm}$ تا $z = +۵\text{cm}$ رسم کنید، $z = ۰$ را در نقطهٔ وسط بین دو پیچه، یعنی P، در نظر بگیرید. چنین پیچه‌هایی میدان یکنواخت خاص B را در نزدیکی P ایجاد می‌کنند.

۲. یک پیچهٔ دوگانهٔ هلمهولتز طراحی کنید به‌طوری که در مرکز $d^۴B/dz^۴$ نیز صفر شود. این مسئله به بهترین وجه با بهره‌گیری از یک برنامهٔ کامپیوتری مانند Mathematica یا MAPLE حل می‌شود.

۳۴

قانون القای فاراده

اغلب می‌توان نتیجهٔ یک آزمایش را با توجه به اینکه چگونه با تقارن به آزمایشهای دیگر مربوط می‌شود پیش‌بینی کرد. مثلاً، به یک حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی گشتاور نیرویی (ناشی از میدان) وارد می‌آید که آن را می‌چرخاند. مورد مشابهی را در نظر بگیرید: یک حلقهٔ سیم که در آن جریانی وجود ندارد در میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد و عامل خارجی، گشتاور نیرویی به حلقه وارد می‌کند که سبب چرخش آن می‌شود. متوجه می‌شویم که در حلقه جریانی پدید آمده است! برای حلقه‌ای که در میدان مغناطیسی قرار دارد، هر جریانی پدیدآورندهٔ گشتاور نیرویی است و هر گشتاور نیرویی هم پدیدآورندهٔ یک جریان. این مثال نمونه‌ای از تقارن در طبیعت است.

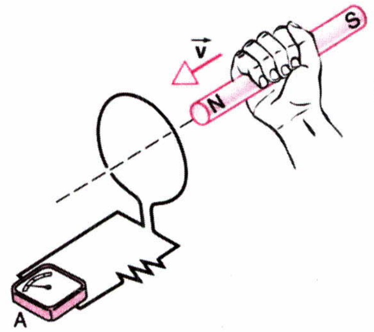
پیدایش جریان در حلقه را می‌توانیم براساس قانون القای فاراده درک کرده آن را تجزیه و تحلیل کنیم. قانون القای فاراده موضوع این فصل است. قانون فاراده را که یکی از چهار معادلهٔ ماکسول است، می‌توان به‌وسیلهٔ تعدادی آزمایشهای ساده، که انجام آنها در هر آزمایشگاهی امکان‌پذیر است، به‌طور مستقیم اثبات کرد.

۳۴ـ۱ آزمایشهای فاراده

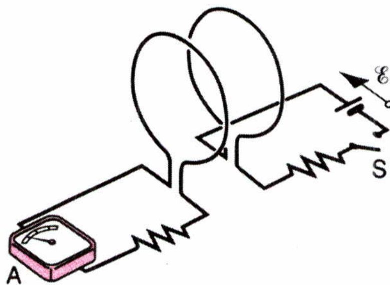
قانون القای فاراده از آزمایشهایی کشف شد که مایکل فاراده در سال ۱۸۳۱ در انگلستان و تقریباً در همان زمان ژوزف هانری* در ایالات متحده انجام دادند. گرچه فاراده نتیجه‌های خود را قبل از هانری منتشر کرد، که اولویت کشف را نصیب او کند، یکای SI القاییدگی (فصل ۳۶) هانری (با علامت اختصاری H) نامیده شد. از طرف دیگر، یکای SI ظرفیت، همان‌طورکه قبلاً دیدیم، فاراد (با علامت اختصاری F) خوانده می‌شود. در فصل ۳۶، که در مورد نوسانهای مدارهای خازنی ـ القایی بحث می‌کنیم، خواهیم دید چقدر مناسب است که نام این دو نابغهٔ هم‌عصر را در یک مفهوم واحد به‌هم پیوند دهیم.

در شکل ۳۴ـ۱ پیچه‌ای از سیم را نشان داده‌ایم که بخشی از مداری را تشکیل می‌دهد که شامل آمپرسنج است. معمولاً، انتظار نداریم که آمپرسنج عبور جریانی را نشان دهد زیرا به نظر می‌رسد که در مدار هیچ نیروی محرکهٔ الکتریکی وجود ندارد. با این همه، اگر یک آهنربای میله‌ای را به پیچه نزدیک کنیم به‌طوری که قطب شمال این آهنربا به طرف پیچه باشد، واقعهٔ شگفت‌آوری روی می‌دهد. تا وقتی که آهنربا حرکت می‌کند، عقربهٔ آمپرسنج در حال انحراف است و نشان می‌دهد که در پیچه جریانی برقرار شده است. اگر آهنربا را نسبت به

* فاراده و هانری علاوه برکشف مستقل و همزمان قانون القاییدگی، در زندگیشان شباهتهای دیگری هم داشتند. هر دو در نوجوانی شاگردی کرده‌اند، فاراده در سن ۱۴ سالگی در لندن شاگرد صحاف شد و هانری در سن ۱۳ سالگی در آلبانی، نیویورک، شاگرد یک ساعت‌ساز بود. بعدها فاراده رئیس انستیتوی سلطنتی در لندن شد، که بانی اصلی تأسیس آن یک امریکایی به نام بنیامین تامسن (کُنت رامفورد)، بود. از طرف دیگر هانری، دبیر انستیتوی اسمیتسونین در واشنگتن دی ـ سی شد که با موقوفات یک انگلیسی به نام جیمز اسمیتسون تأسیس شده بود.



شکل ۳۴ـ۱ وقتی آهنربا نسبت به پیچه‌ها جابه‌جا می‌شود، آمپرسنج A منحرف می‌شود که حاکی از وجود جریان در مدار است.



شکل ۳۴ـ۲ وقتی کلید S بسته یا باز شود آمپرسنج به‌طور لحظه‌ای منحرف می‌شود. در اینجا حرکت فیزیکی پیچه‌ها دخیل نیست.

پیچه ثابت نگه‌داریم آمپرسنج انحراف ندارد. اگر آهنربا را از پیچه دور کنیم، باز هم آمپرسنج منحرف می‌شود، ولی در جهت مخالف، که نشان می‌دهد جهت جریان در پیچه وارونه شده است. اگر به‌جای قطب شمال، قطب جنوب آهنربا را به‌کار ببریم، آزمایش به همان صورت بالاست ولی جهت انحرافها وارونه می‌شود. هر چه آهنربا تندتر حرکت کند، انحراف سنجه بیشتر می‌شود. آزمایشهای بیشتر نشان می‌دهد که آنچه اهمیت دارد حرکت نسبی آهنربا و پیچه است. اصلاً فرق نمی‌کند که آهنربا را به طرف پیچه حرکت دهیم یا پیچه را به طرف آهنربا.

جریان پدیدآمده در این آزمایش را جریان القایی می‌نامیم و می‌گوییم که این جریان را یک نیروی محرکهٔ القایی به‌وجود آورده است. توجه کنید که در اینجا در هیچ جای مدار باتریی وجود ندارد. فاراده با انجام آزمایشهایی از این نوع توانست به قانونی پی ببرد که اندازه و جهت نیروی محرکهٔ القایی را به‌دست می‌دهد. این نیروهای محرکهٔ الکتریکی از لحاظ عملی بسیار حائز اهمیت‌اند. به احتمال بسیار زیاد، نور اتاقی که شما در آن این کتاب را مطالعه می‌کنید از نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در مولد الکتریکی تجاری فراهم شده است.

در آزمایش دیگر، ابزار شکل ۳۴ـ۲ مورد استفاده قرار می‌گیرد. پیچه‌ها در نزدیکی هم قرار می‌گیرند ولی نسبت به‌هم ساکن‌اند. وقتی با بستن کلید S جریان پایایی در پیچهٔ سمت راست برقرار می‌کنیم، سنجهٔ موجود در مدار پیچهٔ چپ به‌طور لحظه‌ای منحرف می‌شود؛ وقتی کلید S را باز و به این وسیله جریان را قطع می‌کنیم، باز هم سنجه به‌طور لحظه‌ای منحرف می‌شود، ولی در جهت مخالف. در این آزمایش هیچ‌یک از اجزای وسیله حرکت فیزیکی ندارد.

آزمایش نشان می‌دهد که وقتی جریان در پیچهٔ طرف راست شکل ۳۴ـ۲ تغییر می‌کند، در پیچهٔ طرف چپ یک نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی به‌وجود می‌آید. در اینجا آنچه اهمیت دارد آهنگ تغییر جریان است و نه اندازهٔ آن.

جنبهٔ مشترک این دو آزمایش حرکت یا تغییر است. این آهنربای متحرک یا جریان متغیر است که باعث ایجاد نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی می‌شود. در بخش بعد، مبانی ریاضی این اثر را ارائه می‌دهیم.

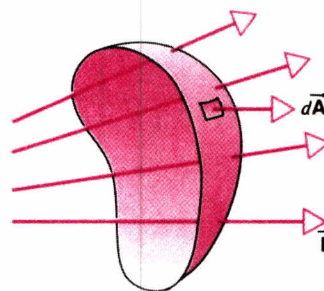
۳۴ـ۲ قانون القای فاراده

فرض کنید که خطهای میدان مغناطیسی ناشی از آهنربای میله‌ای شکل ۳۴ـ۱ و از جریان موجود در حلقهٔ جریان شکل ۳۴ـ۲ در فضا وجود داشته باشند. بعضی از این خطهای میدان از پیچهٔ سمت چپ هر دو شکل می‌گذرند. وقتی در شکل ۳۴ـ۱ آهنربا را حرکت می‌دهیم، یا وقتی در شکل ۳۴ـ۲ کلید S را باز یا بسته می‌کنیم، تعداد خطهای میدان مغناطیسی را که از پیچهٔ سمت چپ می‌گذرند تغییر می‌دهیم. همان‌طور که آزمایشهای فاراده نشان داد و روش خطهای میدان فاراده به ما کمک کرد که این موضوع را مجسم کنیم، این تغییر تعداد خطهای میدان گذرنده از حلقهٔ مدار است که نیروی محرکهٔ الکتریکی را در حلقه القا می‌کند. به‌طور مشخص، این آهنگ تغییر در تعداد خطهای میدان گذرنده از حلقه است که نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را تعیین می‌کند.

برای کمّی‌کردن این گزاره، شار مغناطیسی Φ_B را معرفی می‌کنیم. شار مغناطیسی را می‌توان مانند شار الکتریکی (بخش ۲۷ـ۳) معیاری از تعداد خطهای میدانی که از یک سطح می‌گذرند در نظر گرفت. مانند شار الکتریکی (معادلهٔ ۲۷ـ۷)، شار مغناطیسی گذرنده از هر سطح را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (۳۴ـ۱)$$

که در این معادله، $d\vec{\mathbf{A}}$ عنصر سطح (نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۳) است و انتگرال‌گیری روی تمام سطحی انجام می‌شود که می‌خواهیم شار را برای آن محاسبه کنیم (مانند سطحی که حلقهٔ سمت چپ شکل



شکل ۳۴ـ۳ میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ که از سطح A می‌گذرد شار مغناطیسی گذرنده از آن سطح را به‌دست می‌دهد. عنصر سطح $d\vec{\mathbf{A}}$ با یک بردار نمایش داده شده است.

۳۴ـ۱ در برمی‌گیرد). اگر میدان مغناطیسی در سطح تخت A، اندازه و جهت ثابتی داشته باشد، شار را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Phi_B = BA\cos\theta \qquad (۳۴ـ۲)$$

که در آن θ زاویهٔ بین خط عمود بر سطح و جهت میدان است.

یکای SI شار مغناطیسی تسلا · متر مربع است که به آن وبر (با علامت اختصاری Wb) می‌گوییم. به عبارت دیگر

۱ تسلا · متر مربع = ۱ وبر

از وارونه‌سازی این رابطه، در می‌یابیم که تسلا معادل وبر بر متر مربع است، که قبل از پذیرش تسلا به عنوان یکای SI برای میدان مغناطیسی به‌کار می‌رفت.

نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده در مدارکه از قانون القای فاراده به‌دست می‌آید، برحسب شار مغناطیسی چنین بیان می‌شود:

> اندازهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده در مدار برابر است با منفی آهنگ تغییر شار مغناطیسی گذرنده از مدار برحسب زمان.

به زبان ریاضی، قانون فاراده به‌صورت زیر است

$$|\mathscr{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \qquad (۳۴ـ۳)$$

که در آن $\mathscr{E}$ نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی است. اگر یکای آهنگ تغییر شار برحسب وبر بر ثانیه باشد، نیروی محرکهٔ الکتریکی با یکای ولت مشخص می‌شود. جهت (یا علامت) نیروی محرکهٔ الکتریکی را در بخش بعدی بررسی می‌کنیم.

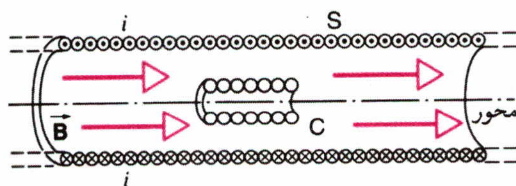
اگر پیچه N دور داشته باشد، در هر دور سیم‌پیچ یک نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی پدید می‌آید و نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی کل در این مدار مجموع مقدارهای مربوط به هر کدام از دورهاست، درست مانند باتریهایی که به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند. اگر پیچه چنان محکم پیچیده شده باشد که هر دور ناحیهٔ یکسانی از فضا را اشغال کند و در نتیجه تغییر شار یکی باشد، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی کل برابر است با

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \qquad (۳۴ـ۴)$$

روشهای بسیاری برای تغییر شار گذرنده از حلقه وجود دارد که عبارت‌اند از: حرکت دادن آهنربا نسبت به حلقه (مانند شکل ۳۴ـ۱)، تغییر جریان در مداری که در نزدیکی آن حلقه قرار گرفته است (مانند شکل ۳۴ـ۲ و نیز مانند مبدل)، حرکت دادن حلقه در میدان نایکنواخت، چرخاندن حلقه در میدان مغناطیسی ثابت به‌طوری که زاویهٔ θ در معادلهٔ (۳۴ـ۲) تغییر کند (مانند مولد، که آن را در بخش ۳۴ـ۵ مطالعه می‌کنیم)، یا تغییر اندازه و شکل حلقه. با هر یک از روشهای بالا می‌توان نیروی محرکهٔ الکتریکی در حلقه القا کرد.

سرانجام، متوجه می‌شویم که گرچه معادلهٔ (۳۴ـ۳) به نام قانون فاراده معروف است، فاراده، که آموزش ریاضی چندانی نداشت، آن را به این صورت ننوشته بود. در واقع، در تمام سه جلد کتاب منتشر شدهٔ فاراده در زمینهٔ الکترومغناطیس که دستاورد بسیار بزرگی در گسترش علم فیزیک و شیمی به حساب می‌آید حتی یک معادله هم وجود ندارد!

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۱ سیملولهٔ بلند S شکل ۳۴ـ۴ دارای ۲۲۰ دور سیم در هر سانتی‌متر و قطر d آن ۳٫۲ cm است. در مرکز این سیملوله پیچهٔ تنگ هم پیچیدهٔ C با ۱۳۰ دور سیم و قطر $d_C =$ ۲٫۱ cm قرار دارد. جریان جاری در سیملوله را با آهنگ ثابت در مدت ۰٫۱۶ ثانیه از صفر به ۱٫۵ A افزایش داده‌ایم. قدر مطلق (یعنی، اندازه بدون



شکل ۳۴ـ۴ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۱. پیچهٔ C در داخل سیملولهٔ S قرار گرفته است. سیملوله حامل جریانی است که از قسمت بالای شکل خارج و در قسمت پایین وارد صفحهٔ شکل می‌شود؛ که این موضوع با نقطه و ضربدر نشان داده شده است. وقتی جریان در داخل سیملوله تغییر می‌کند، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در پیچه پدید می‌آید.

توجه به علامت) نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده در پیچهٔ مرکزی در مدتی که جریان در سیملوله تغییر می‌کند چقدر است؟

حل. در این حالت شارگذرنده از پیچهٔ C تغییر می‌کند چون میدان B در داخل سیملوله با تغییر جریان عبوری از سیملوله تغییر می‌کند. میدان، یکنواخت و عمود است بر سطح هر دور سیم‌پیچ از پیچهٔ C، به‌طوری که $\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = BA$، که در اینجا A مساحت هر دور از سیم‌پیچ پیچهٔ داخلی است. از قانون فاراده داریم

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right| = N\left|\frac{A\Delta B}{\Delta t}\right| = NA\left|\frac{\mu_\circ n\Delta i}{\Delta t}\right|$$

$$= NA\mu_\circ n\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$$

که در این معادله به‌جای میدان مغناطیسی، از $B = \mu_\circ ni$، مربوط به یک سیملولهٔ ایده‌آل استفاده کرده‌ایم (معادلهٔ ۳۳ـ۲۸). سطح مقطع پیچهٔ مرکزی، A، برابر است با $\frac{۱}{۴}\pi d_{\text{C}}^۲ = ۳٫۴۶ \times ۱۰^{-۴}\text{m}^۲$. جریان در مدت $۰٫۱۶\,\text{s}$ به اندازهٔ $۱٫۵\,\text{A}$ تغییر می‌کند. در نتیجه نیروی محرکهٔ الکتریکی برابر است با

$$|\mathscr{E}| = (۱۳۰)(۳٫۴۶ \times ۱۰^{-۴}\text{m}^۲)(۴\pi \times ۱۰^{-۷}\text{T}\cdot\text{m/A})$$

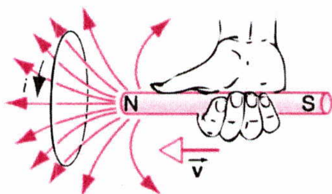
$$\times (۲٫۲ \times ۱۰^۴ \text{ دور}/\text{m})\frac{۱٫۵\,\text{A}}{۰٫۱۶\text{s}}$$

$$= ۱٫۲ \times ۱۰^{-۲}\text{V} = ۱۲\,\text{mV}$$

در بخش بعد خواهیم دید که جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی چگونه به‌دست می‌آید. فعلاً، با بهره‌گیری از استدلال زیر، می‌توانیم این بحث را به‌طور خلاصه مشاهده کنیم. فرض کنید افزایش شار در سیم‌پیچ خارجی، جریانی در پیچهٔ داخلی تولید کرده است که این جریان به نوبهٔ خود میدان مغناطیسیی به‌وجود می‌آورد که با میدان اولیه هم‌جهت است. این میدان سبب می‌شود شار عبوری از سطحی که پیچهٔ خارجی محصور کرده است افزایش یابد، که این خود باعث افزایش جریان و در نتیجه افزایش مجدد جریان در پیچهٔ داخلی می‌شود و این روند ادامه می‌یابد. آیا این نتیجه منطقی است؟

۳۴ـ۳ قانون لنز

تا به اینجا جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را مشخص نکردیم. بعداً، در این فصل ارتباط بین نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی و میدان



شکل ۳۴ـ۵ وقتی آهنربایی را به حلقه نزدیک می‌کنیم، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه افزایش می‌یابد. جریان القاشده در حلقه، میدان مغناطیسیی ایجاد می‌کند که با افزایش شار مخالفت می‌کند. در این شکل میدان ناشی از حلقهٔ جریان نشان داده نشده است.

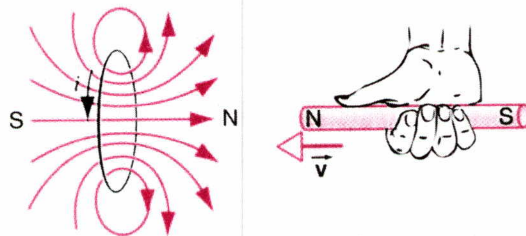
الکتریکی القایی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم، که این امکان را فراهم می‌آورد که قانون فاراده را بدون علامت قدر مطلق بنویسیم. در اینجا، جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را براساس جریان (القاشده‌ای) که ایجاد می‌کند، تعیین می‌کنیم. این کار را با بهره‌گیری از قاعده‌ای که در سال ۱۸۳۴ توسط هاینریش لنز (۱۸۰۴ـ۱۸۶۵) پیشنهاد شد و به نام قانون لنز مشهور است انجام می‌دهیم. قانون لنز:

> شار مغناطیسی ناشی از جریان القایی با تغییر شاری که این جریان القایی را به‌وجود می‌آورد مخالفت می‌کند.

قانون لنز به جریانهای القایی مربوط می‌شود، یعنی این قانون فقط در مورد مدارهای رسانای بسته به‌کار می‌رود. اگر مدار باز باشد، معمولاً می‌توان تصور کرد که اگر مدار بسته بود چه واقعه‌ای رخ می‌داد و به این وسیله جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را مشخص کرد.

اگر "تغییر در شار" افزایشی باشد، در آن صورت قانون لنز ایجاب می‌کند که جهت جریان القایی با افزایش مخالفت کند؛ یعنی، شار میدان مغناطیسی جریان القایی در جهت مخالف شار اصلی که در حال افزایش است از حلقه می‌گذرد. اگر "تغییر در شار" کاهشی باشد، شار میدان مغناطیسی مربوط به جریان القایی با کاهش مخالفت می‌کند؛ یعنی به شار اصلی می‌افزاید تا از کاهش آن جلوگیری کند.

به عنوان مثالی از کاربرد قانون لنز، اولین آزمایشی که فاراده انجام داد (شکل ۳۴ـ۱) در نظر می‌گیریم. وقتی قطب شمال آهنربا به سمت حلقه حرکت می‌کند، شارگذرنده از حلقه افزایش می‌یابد. این افزایش شار همان "تغییر"ی است که قانون لنز به آن اشاره می‌کند. جریان القاشده باید با این تغییر مخالفت کند؛ یعنی، جریان باید میدان مغناطیسیی به‌وجود بیاورد که در داخل حلقه در جهت مخالف باشد. در شکل ۳۴ـ۵ جهت جریان القایی را نشان داده‌ایم. با بهره‌گیری از قاعدهٔ دست راست، می‌توانیم ببینیم که در داخل حلقه، میدان مغناطیسی ایجادشده توسط جریان القایی در جهت مخالف میدان ناشی از آهنرباست.



شکل ۳۴ـ۶ وقتی آهنربایی را به حلقه‌ای نزدیک می‌کنیم، جریان القاشدهٔ i در جهتی است که در شکل نشان داده‌ایم. این جریان میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد که با حرکت آهنربا مخالفت می‌کند. میدان مربوط به آهنربا را در اینجا نشان نداده‌ایم، ولی همانند میدان شکل ۳۴ـ۵ است.

از طرف دیگر، اگر آهنربا را از حلقه دور کنیم، شار کاهش پیدا می‌کند، و جریان القایی باید با این کاهش مخالفت کند. بنابراین، میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی باید به میدان ناشی از آهنربا افزوده شود، در نتیجه جهت جریان برخلاف جهت جریان در شکل ۳۴ـ۵ خواهد بود.

روش دیگری برای تعبیر و توصیف قانون لنز بر اصل پایستگی انرژی استوار است. وقتی آهنربا را به حلقه نزدیک می‌کنیم، میدان ناشی از جریان القاشده در حلقه نیرویی وارد می‌کند که با حرکت آهنربا مخالفت می‌کند. این موضوع در شکل ۳۴ـ۶ نشان داده شده است. حلقه، میدان مغناطیسی شبیه میدان آهنربا ایجاد می‌کند که قطب شمال آن به سمت قطب شمال آهنربایی است که به آن نزدیک می‌شود، و دو قطب شمال یکدیگر را می‌رانند. یعنی، برای اینکه آهنربا را به سمت حلقه ببریم باید آن را با نیروی بیشتری به سمت حلقه هُل بدهیم. فرض کنید که، برعکس، جریان موجود در حلقه در جهت مخالف باشد، در آن صورت یک میدان القایی در جهت مخالف به‌وجود می‌آورد، که به‌جای اینکه آهنربا به‌وسیلهٔ میدان مربوط به جریان القاشده رانده شود، به‌وسیلهٔ این میدان ربوده می‌شود و به سمت حلقه شتاب می‌گیرد. وقتی که آهنربا شتاب می‌گیرد، جریان موجود در حلقه افزوده می‌شود، که سبب افزایش نیروی وارد بر آهنربا شده شتاب آن را افزایش بیشتری می‌دهد. در انجام این عمل هم انرژی جنبشی آهنربا و هم آهنگ انرژی ژول (i^2R) تلف‌شده در حلقه بیشتر می‌شود. به این ترتیب با هُل کوچک اولیهٔ آهنربا به سمت حلقه، افزایش انرژی زیادی به‌دست می‌آوریم ــ که به روشنی ناقض پایستگی انرژی است. چنین رویدادی ممکن نیست رخ دهد و بنابراین نتیجه می‌گیریم که میدان ناشی از جریان القاشده در مدار باید با حرکت آهنربا به سمت حلقه مخالفت کند. به‌صورتی مشابه، اگر می‌خواستیم آهنربا را از حلقه دور کنیم، میدان القاشده با این حرکت مخالفت می‌کرد و آهنربا را به سمت حلقه می‌کشید.

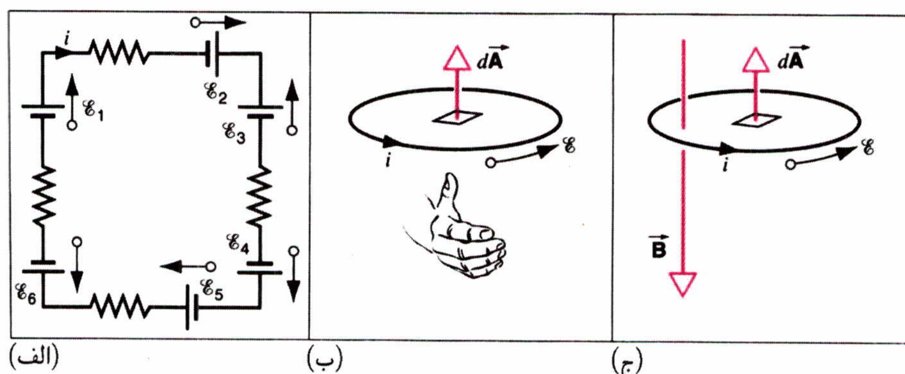
در هیچ یک از موارد بالا مشخص نیست که میدان القاشده با میدان ناشی از آهنربا مخالفت می‌کند، بلکه حاکی از آن است که با تغییر، که افزایش یا کاهش شارگذرنده از حلقه است، مخالفت می‌کند. اگر در شکل ۳۴ـ۵ میدان ناشی از آهنربا به سمت چپ و در حال افزایش باشد (وقتی که آهنربا به حلقه نزدیک می‌شود) میدان القاشده در داخل حلقه باید به طرف راست باشد. اگر میدان آهنربا به سمت چپ و در حال کاهش باشد (وقتی که آهنربا از حلقه دور می‌شود)، میدان القاشده در داخل حلقه باید به طرف چپ باشد. اگر آهنربا را سروته کنیم به‌طوری که قطب جنوب آن به سمت حلقه حرکت کند، میدان به طرف راست و افزایشی خواهد بود، در نتیجه میدان القاشده در داخل حلقه باید به سمت چپ باشد.

اکنون می‌توانیم جهت جریان را در پیچهٔ کوچک C مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۱ معین کنیم. میدان سیملولهٔ S در شکل ۳۴ـ۴ به طرف راست است و افزایش می‌یابد. جریان القاشده در C باید با این افزایش شار عبوری از C مخالفت کند و در نتیجه باید میدانی به‌وجود آورد که با میدان S مقابله کند. بنابراین جریان در پیچهٔ C باید برخلاف جریان در سیملولهٔ S باشد. اگر جریان در سیملولهٔ S به‌جای افزایش کاهش می‌یافت، استدلال مشابهی نشان می‌دهد که جهت جریان القاشده در پیچهٔ C همان جهت جریان در سیملولهٔ S را می‌داشت.

علامتها در قانون فاراده

تا به اینجا قانون فاراده را فقط برحسب اندازه‌ها نوشتیم. جهت و اندازهٔ جریان القاشده در حلقهٔ رسانا را می‌توان با بهره‌گیری از قانون لنز و شکل فقط‌مقداریِ قانون فاراده تعیین کرد.

تمایل داریم که علامتهای قدرمطلق را از قانون فاراده (معادلهٔ ۳۴ـ۳) برداریم. قبل از انجام این کار، باید ابهاماتی را که در علامت هر دو طرف این معادله وجود دارد برطرف کنیم. اگر بخواهیم که به‌جای $|\mathscr{E}|$ بنویسیم $\mathscr{E}$، باید مشخص کنیم که منظورمان از علامت یا جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده چیست. مدار سادهٔ تک‌حلقه‌ای شکل ۳۴ـ۷(الف) را در نظر بگیرید، که ممکن است شامل چندین باتری و مقاومت باشد. برای تحلیل این مدار می‌توانیم از قاعدهٔ حلقه استفاده کنیم. باید مشخص باشد که اگر ساعتگرد گرد مدار بچرخیم تمام نیروهای محرکهٔ الکتریکی را به‌هم بیفزاییم، و یک مقدار خالص مثبت به‌دست آوریم، در آن صورت جریان نیز ساعتگرد خواهد بود. (تنها در آن صورت اختلاف پتانسیل کل دو سر مقاومتها می‌تواند منفی باشد، تا قضیهٔ حلقه را تأیید کند.) در مورد مدارهای واقعی، جهت جریان



شکل ۳۴ـ۷ (الف) نیروهای محرکهٔ الکتریکی در یک حلقه را به‌هم می‌افزاییم تا جهت جریان را مشخص کنیم. (ب) قاعدهٔ دست راست برای قانون فاراده: اگر انگشتان در جهت i باشند، شست در جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ است. (ج) وقتی $\vec{\mathbf{B}}$ به سمت پایین است و مقدارش افزایش می‌یابد، جریان القاشده در مدار را نشان داده‌ایم.

مثبت، همان جهت چرخش به گرد مدار است که در آن یک نیروی محرکهٔ الکتریکی کل مثبت به‌دست می‌آوریم. می‌توانیم همین ارتباط را بین جریانهای القاشده و نیروی محرکهٔ الکتریکی برقرار کنیم: جهت جریان القایی، همان جهتی است که اگر در آن راستا گرد مدار بچرخیم نیروی محرکهٔ الکتریکی مثبت به‌دست می‌آوریم.

علامت طرف راست معادلهٔ (۳۴ـ۳) نیز برای ما مشکل ایجاد می‌کند. وقتی قانون گاؤس را در مورد شارگذرنده از یک سطح بسته بررسی می‌کردیم، جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ را تعریف کردیم که عمود بر سطح بسته و به طرف خارج است. ولی، رویه‌هایی که به‌وسیلهٔ حلقه‌های جریان محدود می‌شوند و در مورد آنها قانون فاراده اعمال می‌شود، رویه‌هایی باز هستند، و در نتیجه به نظر می‌رسد که می‌توانیم جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ را عمود بر سطح و در هر یک از دو جهت اختیار کنیم (مانند سطح محدودشده به‌وسیلهٔ حلقه در شکل ۳۴ـ۵). راه حل این بلاتکلیفی یک قاعدهٔ دست راست دیگر است: انگشتان دست راست خود را در جهتی به گرد حلقه قرار دهید که هنگام محاسبهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی از آن استفاده می‌کردید. (در مورد سیم حلقهٔ جریان واقعی، این همان جهت جریان القایی است.) در این حالت شست شما جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ را برای محاسبهٔ شار (معادلهٔ ۳۴ـ۷(ب)) مشخص می‌کند.

با تعریفهای ارائه‌شده در اینجا برای جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی و جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ برای یافتن شار، قانون فاراده را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

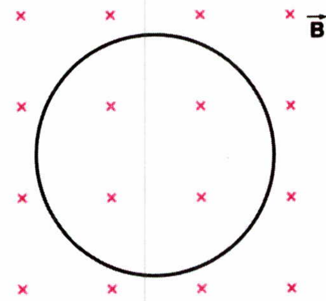
$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (۳۴ـ۵)$$

علامت منفی در این معادله، در واقع بیانی از قانون لنز است، به‌طوری که نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده با تغییر شار مخالفت می‌کند.

شکل ۳۴ـ۷(ج) نشان می‌دهد که چگونه از معادلهٔ (۳۴ـ۵) استفاده کنیم. فرض کنید $\vec{\mathbf{B}}$ در اینجا در موقعیت حلقه به طرف پایین باشد و مقدار آن افزایش یابد. فرض کنید جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ را به سمت بالا اختیار کنیم. (تا وقتی که از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم، اهمیتی ندارد که کدام جهت را اختیار کنیم ــ این ارتباط بین $\mathscr{E}$ و $d\vec{\mathbf{A}}$ است که اهمیت دارد.) برای این گزینه، $\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}$ در همه جا روی رویه منفی است و در نتیجه شار نیز منفی است. اگر $\vec{\mathbf{B}}$ از نظر اندازه در حال افزایش باشد، در آن صورت Φ_B منفی و از نظر اندازه در حال افزایش است، در نتیجه $d\Phi_B/dt < ۰$. آنگاه معادلهٔ (۳۴ـ۵) می‌گوید که $\mathscr{E}$ نسبت به جهتی که برای $d\vec{\mathbf{A}}$ انتخاب کرده‌ایم مثبت است. قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد که نیروی محرکهٔ الکتریکی (و از آن رو جریان القاشده) باید به همان صورت نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۷(ج) باشد. اگر از بالا نگاه کنیم، جریان القاشده در جهت پادساعتگرد خواهد بود، درست به همان ترتیبی که مستقیماً با استفاده از قانون لنز نتیجه می‌گرفتیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۲ یک حلقهٔ سیم دایره‌ای به شعاع $r = ۰٫۳۲\,\mathrm{m}$ و مقاومت $R = ۲٫۵\Omega$ را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت که بر صفحهٔ حلقه عمود و در آغاز همان‌گونه که در شکل ۳۴ـ۸ نشان داده‌ایم به طرف داخل شکل است، قرار داده‌ایم. میدان برحسب زمان به‌صورت $B_z = -۴٫۰\,\mathrm{T} - (۵٫۶\,\mathrm{T/s})t + (۲٫۲\,\mathrm{T/s^۲})t^۲$ تغییر می‌کند، که در اینجا محور مثبت z به طرف بالا و خارج از صفحهٔ شکل است. اندازه و جهت جریان ایجادشده در حلقه را در لحظه‌های $t = ۱\,\mathrm{s}$، $t = ۲\,\mathrm{s}$ مشخص کنید.

حل. فرض کنید $d\vec{\mathbf{A}}$ را به طرف داخل صفحه در نظر بگیریم. در $t = ۱\,\mathrm{s}$، $B_z = -۷٫۴\,\mathrm{T}$ و در $t = ۲\,\mathrm{s}$، $B_z = -۶٫۴\,\mathrm{T}$ است. به این ترتیب برای بازهٔ زمانی مطرح‌شده در این مسئله، $\vec{\mathbf{B}}$ و $d\vec{\mathbf{A}}$ با هم موازی‌اند و $\Phi_B > ۰$ است. چون میدان در تمامی سطح حلقه



شکل ۳۴ـ۸ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۲. یک حلقهٔ سیم در میدان مغناطیسی که جهت آن به طرف داخل صفحهٔ شکل است.

یکنواخت است، $\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = B_z A_z$ (که یک کمیت مثبت است، زیرا $A_z < ۰$). در این صورت قانون فاراده نتیجه می‌دهد

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(B_z A_z)}{dt} = -A_z \frac{dB_z}{dt}$$

جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی به علامت $dB_z/dt = -۵٫۶ + ۴٫۴t$ وابسته است. در $t = ۱\,\mathrm{s}$، $dB_z/dt = -۱٫۲\,\mathrm{T/s}$ است. با درنظرگرفتن اینکه $A = \pi r^۲ = ۰٫۳۲۲\,\mathrm{m}^۲$ است، برای نیروی محرکهٔ الکتریکی داریم،

$$\mathscr{E} = -(-۰٫۳۲۲\,\mathrm{m}^۲)(-۱٫۲\,\mathrm{T/s}) = -۰٫۳۹\,\mathrm{V}$$

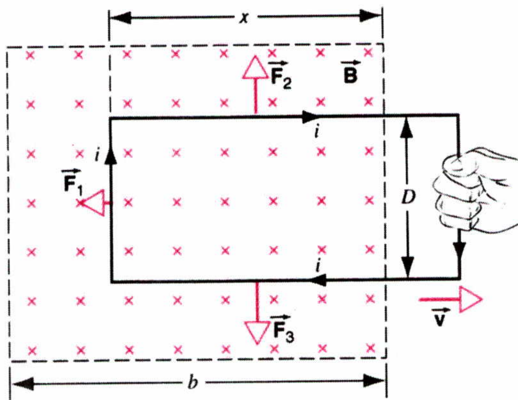
علامت منفی به این معنی است که اگر شست دست راست در جهت $\vec{\mathbf{A}}$ (به طرف داخل صفحهٔ شکل) قرار گیرد، جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی (و از آن رو جهت جریان) پادساعتگرد است. اندازهٔ جریان برابر است با $i = |\mathscr{E}|/R = ۰٫۱۵\,\mathrm{A}$. باید بررسی کنید که آیا همین جهت برای جریان (پادساعتگرد) از قانون لنز به‌دست می‌آید یا خیر.

از تکرار محاسبهٔ بالا برای $t = ۲\,\mathrm{s}$، درمی‌یابیم که $dB_z/dt = +۳٫۲\,\mathrm{T/s}$ و $\mathscr{E} = +۱٫۰۳\,\mathrm{V}$ است. این مقدارها یک جریان ساعتگرد به اندازهٔ $i = |\mathscr{E}|/R = ۰٫۳۷\,\mathrm{A}$ را نتیجه می‌دهند.

توجه کنید که جهت جریان در بازهٔ زمانی بین $t = ۱\,\mathrm{s}$ و $t = ۲\,\mathrm{s}$ تغییر می‌کند، با آنکه جهت میدان ثابت (به طرف داخل صفحهٔ شکل) باقی می‌ماند. این جهت تغییر در میدان است و نه جهت خود میدان که جهت جریان القایی را معین می‌کند.

۳۴ـ۴ نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی

در شکل ۳۴ـ۹ یک حلقهٔ سیم مستطیل‌شکل به پهنای D را نشان



شکل ۳۴ـ۹ وقتی که حلقهٔ رسانای بسته‌ای را از میدان خارج می‌کنیم، در حلقه جریان القایی به‌وجود می‌آید.

داده‌ایم، که یک سر آن در میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت $\vec{\mathbf{B}}$ قرار گرفته است. میدان $\vec{\mathbf{B}}$ عمود بر صفحهٔ شکل و به طرف داخل است. میدان $\vec{\mathbf{B}}$ ممکن است، مثلاً، در فاصلهٔ بین دو قطب آهنربای الکتریکی بزرگی ایجاد شده باشد. خط‌چینها حدود فرضی میدان مغناطیسی را نشان می‌دهند. حلقه را با سرعت ثابت v به طرف راست می‌کشیم.

وضعیت توصیف‌شده در شکل ۳۴ـ۹ اصولاً هیچ تفاوتی با وضعیت شکل ۳۴ـ۵ ندارد. در هر یک از این دو مورد یک حلقهٔ رسانا و یک آهنربا نسبت به‌هم در حرکت‌اند؛ در هرکدام از این دو مورد شار میدان مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد برحسب زمان تغییر می‌کند. تفاوت عمده و مهم بین این دو شکل آن است که وضعیت شکل ۳۴ـ۹ امکان انجام محاسبه‌های آسان‌تری را فراهم می‌آورد.

عامل خارجی (دست نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۹) حلقه را با سرعت ثابت به طرف راست می‌کشد. وقتی حلقه حرکت می‌کند، قسمتی از مساحت حلقه که در میدان قرار گرفته کاهش می‌یابد و از آن رو شار کاهش پیدا می‌کند. این کاهش شار سبب القای نیروی محرکهٔ الکتریکی می‌شود و بر اثر آن جریانی القایی در حلقه پدید می‌آید. این نیروی محرکهٔ الکتریکی را، که از حرکت نسبی بین رسانا و چشمهٔ میدان مغناطیسی حاصل می‌شودگاهی نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی می‌نامند.

شار محصور در حلقهٔ شکل ۳۴ـ۹، یعنی Φ برابر است با

$$\Phi_B = BA = BDx$$

که در این رابطه Dx مساحت آن بخشی از حلقه است که در آن میدان مغناطیسی B صفر نیست. نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ را با

استفاده از قانون فاراده به‌دست می‌آوریم:

$$|\mathscr{E}| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{d}{dt}(BDx) = BD\frac{dx}{dt} = BDv \quad (۶_۳۴)$$

که در آن dx/dt را سرعت v قرار دادیم؛ سرعتی که حلقه با آن از میدان مغناطیسی به بیرون کشیده می‌شود. توجه کنید که تنها بعدی از حلقه که در معادلهٔ (۳۴_۶) وارد می‌شود همان طول D در انتهای طرف چپ رساناست. در بخش ۳۴_۷ خواهیم دید که، می‌توان فرض کرد که نیروی محرکهٔ القایی در شکل ۳۴_۹ در شاخهٔ سمت چپ حلقه جایگزیده شده است.

نیروی محرکهٔ الکتریکی BDv در حلقه، جریانی را برقرار می‌کند که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$i = \frac{|\mathscr{E}|}{R} = \frac{BDv}{R} \quad (۷_۳۴)$$

که در اینجا، R مقاومت حلقه است. با توجه به قانون لنز، این جریان باید در شکل ۳۴_۹ ساعتگرد باشد؛ این جریان با ایجاد میدانی موازی با میدان خارجی در داخل حلقه با "تغییر" (کاهش Φ_B) مخالفت می‌کند.

ضلعهای حلقه، که آنها را به‌صورت رساناهای حامل جریان درنظر می‌گیریم، تحت تأثیر نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$ قرار می‌گیرند (معادلهٔ ۳۲_۲۶ را ببینید)، این نیروها را در شکل ۳۴_۹ نشان داده‌ایم. چون $\vec{\mathbf{F}}_2$ و $\vec{\mathbf{F}}_3$ با هم برابر و در جهت مخالف یکدیگرند، آثار یکدیگر را خنثی می‌کنند. تنها نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه همان نیروی $\vec{\mathbf{F}}_1$ است و برای اینکه حلقه را با سرعت ثابت به‌وسیلهٔ یک عامل خارجی حرکت دهیم باید نیرویی از نظر اندازه برابر و از لحاظ جهت در خلاف جهت $\vec{\mathbf{F}}_1$ بر آن وارد کنیم. می‌خواهیم توان مکانیکی $P = Fv$ را، که عامل خارجی باید هزینه کند، محاسبه کنیم یا به‌طور معادل آهنگ انجام کار بر روی حلقه توسط عامل خارجی را مشخص کنیم.

اندازهٔ نیروی $\vec{\mathbf{F}}_1$ برابر است با $F_1 = iDB$، زیرا جهت جریان همواره بر $\vec{\mathbf{B}}$ عمود است. چون عامل خارجی باید نیرویی برابر با F_1 به حلقه وارد کند، توان هزینه‌شده توسط او چنین است

$$P = F_1 v = iDBv = \frac{B^2D^2v^2}{R} \quad (۸_۳۴)$$

که در اینجا برای جریان القایی i، از معادلهٔ (۳۴_۷) استفاده کردیم.

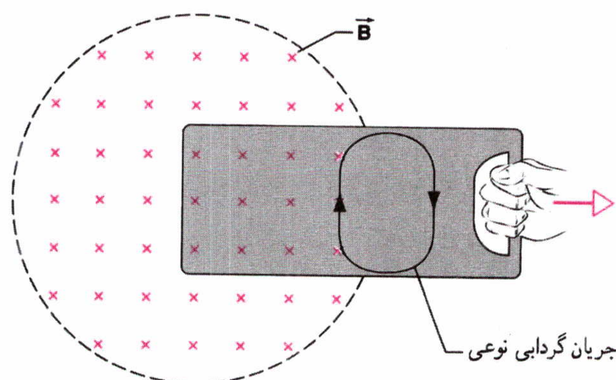
همچنین می‌توانیم آهنگ انرژی تلف‌شده بر اثر گرمایش ژول ناشی از جریان القاشده در حلقه را محاسبه کنیم. توان تلف‌شده چنین است:

$$P = i^2R = \left(\frac{BDv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2D^2v^2}{R} \quad (۹_۳۴)$$

که دقیقاً با معادلهٔ (۳۴_۸) که آهنگ انجام کار مکانیکی روی حلقه را به‌دست می‌دهد سازگار است. کاری که توسط عامل خارجی انجام می‌شود، سرانجام به‌صورت گرمای ژول در حلقه هدر می‌رود.

جریانهای گردابی

وقتی شار مغناطیسی گذرنده از یک قطعهٔ بزرگ رسانا تغییر کند، جریانهای القایی در ماده به‌وجود می‌آیند (شکل ۳۴_۱۰). این جریانها، جریانهای گردابی نامیده می‌شوند. جریانهای گردابی ممکن است در مواردی آثار نامطلوبی را ایجاد کنند. به عنوان مثال، این جریانها انرژی داخلی را زیاد می‌کنند و در نتیجه می‌توانند سبب افزایش دمای ماده بشوند. به همین دلیل، موادی را که در معرض میدانهای مغناطیسی متغیر قرار دارند اغلب به‌صورت ورقه‌ورقه درمی‌آورند یا به‌صورت تعداد زیادی لایه‌های نازک می‌سازند که از یکدیگر عایق‌بندی شده‌اند. بنابراین، جریانهای گردابی به‌جای یک حلقهٔ بزرگ در تعداد زیادی حلقه‌های کوچکتر جاری می‌شوند و در نتیجه طول کل مسیر آنها، و از آن رو مقاومت آنها نیز افزایش می‌یابد؛ گرمایش مقاومتی که به‌صورت $\mathscr{E}^2/R$ است کمتر می‌شود و افزایش انرژی داخلی با آهنگ کندتری صورت می‌گیرد. از طرف دیگر می‌توان از گرمایش جریانهای گردابی بهره‌برداری کرد، مثلاً در کورهٔ القایی می‌توان مادهٔ مورد نظر را با استفاده از یک میدان مغناطیسی که به‌سرعت تغییر می‌کند گرم کرد. کوره‌های القایی در مواردی به‌کار می‌روند که تماس گرمایی با ماده‌ای که قرار است گرم



شکل ۳۴_۱۰ وقتی جسم رسانا از میدان مغناطیسی خارج می‌شود، در آن مطابق شکل جریان القایی (جریان گردابی) پدید می‌آید.

شود امکان‌پذیر نیست، مانند موقعی که نمونه در یک اتاقک خلأ قرار دارد.

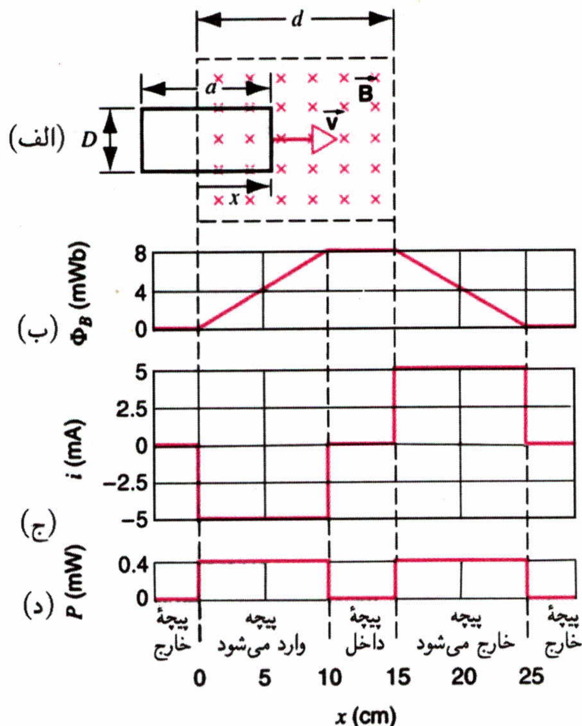
جریانهای گردابی جریانهایی واقعی هستند و همان آثار جریانهای واقعی را به‌وجود می‌آورند. به‌ویژه، نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B = i\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$ بر قسمتی از مسیر جریان گردابی که در داخل میدان شکل ۳۴ـ۱۰ قرار گرفته است اثر می‌کند. این نیرو به ماده منتقل می‌شود و می‌توان با استفاده از قانون لنز نشان داد (پرسش ۲۵) که نیرو با حرکت رسانا مخالفت می‌کند. این مخالفت با حرکت باعث نوعی ترمز مغناطیسی می‌شود، که در آن میدانهای مغناطیسی اعمال‌شده به یک چرخ چرخان یا یک مسیر متحرک نیروهایی را تولید می‌کنند که سبب کندشدن حرکت می‌شوند. این نوع ترمزها هیچ‌گونه اجزای متحرک یا اتصالهای مکانیکی ندارند و در معرض فرسودگی و خوردگی اصطکاکی ترمزهای مکانیکی معمولی قرار نمی‌گیرند. علاوه بر آن، این نوع ترمزها در سرعتهای بالا ازکارآیی بسیار بیشتری برخوردارند (زیرا، نیروی مغناطیسی با افزایش سرعت نسبی بیشتر می‌شود)، که در این سرعتها فرسودگی ترمزهای مکانیکی بیشینه است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۳ در شکل ۳۴ـ۱۱(الف) حلقهٔ مستطیل‌شکلی با مقاومت R، عرض D و طول a را نشان داده‌ایم که با سرعت ثابت v از ناحیه‌ای به عرض d، که در آن یک آهنربا، میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌وجود آورده است، بیرون کشیده می‌شود. کمیتهای زیر را برحسب مکان x لبهٔ سمت راست حلقه، رسم کنید: (الف) شار مغناطیسی Φ_B که از حلقه می‌گذرد، (ب) جریان القایی i، و (ج) آهنگ تولید انرژی داخلی، P، در حلقه. فرض کنید $D = ۴\,\text{cm}$، $a = ۱۰\,\text{cm}$، $d = ۱۵\,\text{cm}$، $R = ۱۶\Omega$، $B = ۲{,}۰\,\text{T}$، و $v = ۱{,}۰\,\text{m/s}$.

حل. (الف) وقتی حلقه در میدان قرار ندارد شار Φ_B صفر است؛ وقتی به‌طور کامل در داخل میدان قرار می‌گیرد شار عبوری از آن BDa است؛ وقتی حلقه وارد میدان می‌شود شار BDx است و وقتی از میدان خارج می‌شود $BD[a-(x-d)]$ است. این نتیجه‌گیریها، که باید درستی آنها را بررسی کنید، به‌صورت نموداری در شکل ۳۴ـ۱۱(ب) رسم شده‌اند.

(ب) اندازهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی $\mathscr{E}$، با رابطهٔ $\mathscr{E} = |d\Phi_B/dt|$ مشخص می‌شود که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathscr{E} = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dx}\frac{dx}{dt}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dx}v\right|$$



شکل ۳۴ـ۱۱ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۳. (الف) حلقهٔ رسانای بسته‌ای با سرعت ثابت، به‌طور کامل از داخل ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ برقرار است، کشیده می‌شود. (ب) شار مغناطیسی گذرنده از حلقه برحسب مختصهٔ x، لبهٔ راست حلقه. (ج) جریان القایی برحسب x، علامت منفی مبین جریان پادساعتگرد است. (د) آهنگ پدیدارشدن انرژی داخلی در حلقه به هنگام حرکت آن.

که در این رابطه $d\Phi_B/dx$ شیب منحنی شکل ۳۴ـ۱۱(ب) است. جریان را در شکل ۳۴ـ۱۱(ج) به‌صورت تابعی از x رسم کرده‌ایم. با بهره‌گیری از همان استدلالی که برای شکل ۳۴ـ۸ به‌کار بردیم، از قانون لنز نتیجه می‌گیریم که وقتی حلقه وارد میدان می‌شود، همان‌طور که معادلهٔ بالا نشان می‌دهد، جریان i پادساعتگرد است. توجه داشته باشید که وقتی حلقه به‌طور کامل در میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد دیگر هیچ جریانی در مدار وجود ندارد زیرا شار Φ_B گذرنده از حلقه، همان‌طور که شکل ۳۴ـ۱۱(ب) نشان می‌دهد، برحسب زمان تغییر نمی‌کند.

(ج) آهنگ تولید انرژی داخلی از رابطهٔ $P = i^۲R$ به‌دست می‌آید. این کمیت را می‌توان از حاصلضرب توان دوم ارتفاع منحنی شکل ۳۴ـ۱۱(ج) در مقاومت R به‌دست آورد. حاصل این کار در شکل ۳۴ـ۱۱(د) رسم شده است.

اگر، آثار لبه‌ای میدان مغناطیسی را، که در عمل نمی‌توان از آنها اجتناب کرد (مسئلهٔ ۱۱ فصل ۳۳ را ببینید)، در نظر بگیریم، گوشه‌های تیز شکل ۳۴ـ۱۱ به منحنیهای هموار تبدیل می‌شوند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۴ یک میلهٔ مسی به طول R در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ مطابق شکل ۳۴ـ۱۲ با بسامد زاویه‌ای ω می‌چرخد. نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی $\mathscr{E}$ بین دو سر میله را تعیین کنید. (این نیروی محرکهٔ الکتریکی را می‌توان با قرار دادن ریل رسانا در امتداد مسیر دایره‌ای خط‌چین در شکل ۳۴ـ۱۲ و اتصال ولت‌سنج بین ریل و نقطهٔ O اندازه گرفت.)

حل. اگر قطعه سیمی به طول dr با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ در راستای عمود بر میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ حرکت کند، نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی $d\mathscr{E}$ در آن به‌وجود می‌آید (معادلهٔ ۳۴ـ۶ را ببینید) که با عبارت زیر مشخص می‌شود

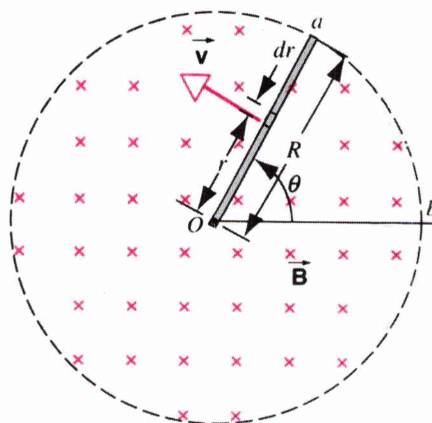
$$d\mathscr{E} = Bv\,dr$$

میلهٔ شکل ۳۴ـ۱۲ را می‌توان به اجزایی به طول dr تقسیم کرد که سرعت خطی v هر یک از آنها برابر با ωr است. هر یک از این اجزا بر میدان $\vec{\mathbf{B}}$ عمودند و عمود بر میدان $\vec{\mathbf{B}}$ نیز حرکت می‌کنند، به‌طوری که، چون همهٔ نیروهای محرکهٔ الکتریکی $d\mathscr{E}$ اجزای تشکیل‌دهندهٔ میله "به‌صورت سری" قرار دارند، می‌توان نوشت

$$\mathscr{E} = \int d\mathscr{E} = \int_0^R Bv dr = \int_0^R B\omega r dr = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

به عنوان یک رهیافت دیگر، فرض کنید که در هر لحظه شاری که قطاع aOb در شکل ۳۴ـ۱۲ محصور می‌کند از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi_B = BA = B\left(\frac{1}{2}R^2\theta\right)$$



شکل ۳۴ـ۱۲ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۴. یک میلهٔ مسی در میدان مغناطیسی یکنواختی می‌چرخد.

که در اینجا $(1/2)R^2\theta$ مساحت قطاع است. با مشتق‌گیری از معادلهٔ بالا می‌رسیم به

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

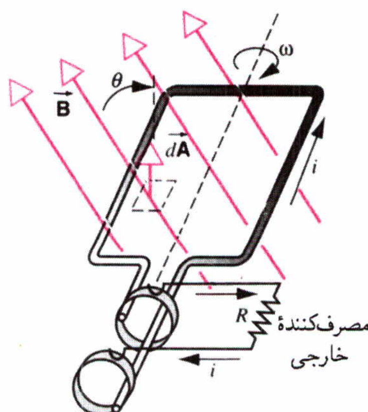
با توجه به قانون فاراده، این عبارت درست اندازهٔ $\mathscr{E}$ را به‌دست می‌دهد و با نتیجه‌ای که قبلاً به‌دست آوردیم سازگار است.

۳۴ـ۵ مولدها و موتورها

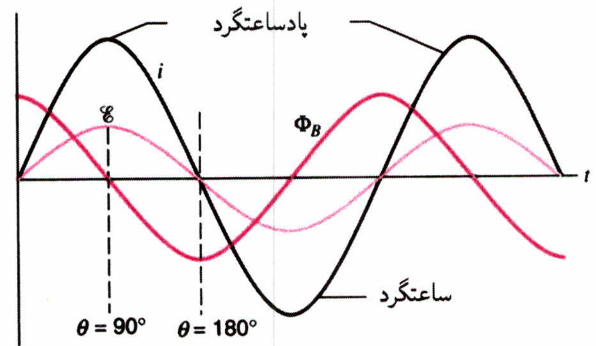
به عنوان نمونه‌هایی از پیامدهای کاربردی قانون فاراده، به کارکرد مولدها و موتورهای ساده می‌پردازیم.

در شکل ۳۴ـ۱۳ اجزای اصلی یک مولد را نشان داده‌ایم. حلقهٔ سیم رسانا با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در میدان مغناطیسی خارجی می‌چرخد (وسیلهٔ دیگری، که در شکل نشان داده نشده، برای به چرخش درآوردن حلقه مورد نیاز است. در نیروگاههای تولید برق، این وسیله دیگر ممکن است آب فروریزان از یک سد باشد یا بخار تولیدشده در دیگ بخار، که پره‌های توربین را می‌چرخاند.) برای سادگی، فرض می‌کنیم میدان مغناطیسی در ناحیه‌ای که حلقه می‌چرخد یکنواخت است.

شار مغناطیسی گذرنده از حلقه به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۳۴ـ۲) مشخص شده است: $\Phi_B = BA\cos\theta$. وقتی که حلقه می‌چرخد، زاویهٔ θ بین جهتهای میدان مغناطیسی و عنصر سطح $d\vec{\mathbf{A}}$ حلقه، برحسب زمان به‌صورت $\theta = \omega t$ تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده



شکل ۳۴ـ۱۳ مولد ساده. چرخش پیچه، جریانی را القا می‌کند که جهت آن متناوباً تغییر می‌کند. جریان به‌وسیلهٔ نقطه تماسهای لغزان روی حلقه‌ها (که به آنها "جارو" گفته می‌شود) به مصرف‌کنندهٔ خارجی انتقال پیدا می‌کند.



شکل ۳۴ـ۱۴ شار مغناطیسی، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی و جریان القایی، مولد شکل ۳۴ـ۱۳.

در حلقه چنین است

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = BA\omega\sin\omega t \qquad (۳۴\text{ـ}۱۰)$$

اگر حلقه یا پیچه شامل N دور باشد، شار کل، N برابر می‌شود، به‌طوری که نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌صورت $\mathscr{E} = NBA\omega\sin\omega t$ درمی‌آید.

نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی به‌صورت سینوسی برحسب زمان تغییر می‌کند که این رفتار را در شکل ۳۴ـ۱۴ نشان داده‌ایم. اگر مولد به یک بار یا مصرف‌کنندهٔ خارجی با مقاومت R متصل شود، در آن صورت جریان القایی $i = \mathscr{E}/R$ در مدار جاری می‌شود، این جریان در حلقهٔ چرخان و سیمهای رابط بین آن و مصرف‌کننده نیز جاری می‌شود.

شکل ۳۴ـ۱۴ نشان می‌دهد که همراه با چرخش حلقه جهت جریان تغییر می‌کند. جریانی که جهتش تغییر می‌کند جریان متناوب می‌گوییم (و با علامت اختصاری AC نشان می‌دهیم). نیروی محرکهٔ الکتریکی تولیدشده توسط این مولد را نیروی محرکهٔ الکتریکی AC یا ولتاژ AC می‌خوانیم.

اکنون می‌خواهیم جهت جریان القایی در حلقه را مورد بررسی قرار دهیم. وقتی حلقه در موقعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۱۳ است، چرخش کوچکی در جهت ω شار را کاهش می‌دهد و (بنابر قانون لنز) جریان القایی در حلقه باید میدانی هم‌جهت با میدان خارجی ایجاد کند (که با کاهش شار گذرنده از حلقه مخالفت کند). بنابراین جریان القاشده در حلقه، همان‌طورکه در شکل نشان داده شده است، باید پادساعتگرد باشد، وقتی که صفحهٔ حلقه موازی با میدان می‌شود ($\theta = ۹۰°$) شار مغناطیسی سریع‌ترین تغییرات را از سر می‌گذراند و جریان پادساعتگرد به بیشترین مقدارش می‌رسد. از $\theta = ۹۰°$ تا $\theta = ۱۸۰°$ با مقدار منفی افزایش می‌یابد، در نتیجه جریان باید همچنان در جهت پادساعتگرد ادامه یابد که با تغییر شار مخالفت کند. سرانجام حلقه با چرخش از $\theta = ۱۸۰°$ می‌گذرد و شار منفی به‌تدریج افزوده می‌شود تا به صفر نزدیک شود. حالا باید جریان القاشده در جهت ساعتگرد باشد، که در داخل حلقه میدانی روبه‌پایین ایجاد کند تا با تغییر شار مخالفت کند. با تداوم این استدلال، نتیجه می‌گیریم که هرگاه حلقه به اندازهٔ $۱۸۰°$ بچرخد جریان القایی در حلقه تغییر جهت می‌دهد.

برای تولید ولتاژ AC که در منازل استفاده می‌کنیم، در نیروگاهها از مولدهایی با طراحی پیچیده‌تری از آنچه در اینجا نشان داده‌ایم، بهره‌برداری می‌شود. در اتومبیلها از وسیلهٔ مشابهی به نام آلترناتور استفاده می‌شود؛ در آلترناتور چشمهٔ میدان مغناطیسی (آهنربای دائمی کوچک) می‌چرخد، در حالی که حلقه‌ای که در آن جریان القا می‌شود ثابت باقی می‌ماند.

تا اینجا چنین به‌نظر می‌رسد که می‌توانیم از مولدمان برق "مجانی" بگیریم. اگر می‌توانستیم یک حلقهٔ چرخان با یاتاقانهای بدون اصطکاک طراحی کنیم، همین‌که آن را با یک سرعت زاویه‌ای معین به چرخش درمی‌آوردیم، جریان القاشده به‌صورتی بی‌انتها در بار خارجی تداوم پیدا می‌کرد. بدون هیچ‌گونه هزینه یا سرمایه‌گذاری در انرژی، در مدار خارجی کاری بدون حدومرز و لایتناهی انجام می‌شد. قطعاً باید در این استدلال چیزی غلط باشد و مشکلی وجود داشته باشد که پایستگی انرژی را نقض می‌کند!

حتی اگر اصطکاک هم وجود نداشته باشد، گشتاور نیرویی وجود دارد که از چرخش حلقه جلوگیری کند. وقتی جریان در حلقه جاری می‌شود، یک گشتاور نیروی مغناطیسی به‌وجود می‌آید که با معادلهٔ (۳۴ـ۳۲) ($\tau = NiAB\sin\theta$) مشخص می‌شود. مهم نیست که این جریان به‌وسیلهٔ باتری برقرار شده است یا به‌وسیلهٔ حرکت در میدان مغناطیسی؛ در هر صورت روی حلقهٔ جریان گشتاور نیرو وارد می‌شود. در وضعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۱۳، گشتاور نیرو وارد می‌شود تا صفحهٔ حلقه را به سمت $\theta = ۰$ هل دهد، و به این ترتیب با چرخش مخالفت می‌کند. در واقع، باید خودتان را متقاعد کنید که گشتاور نیرو در همان راستا باقی می‌ماند حتی وقتی که حلقه از $\theta = ۱۸۰°$ می‌گذرد و جهت جریان تغییر می‌کند. به این ترتیب می‌توان مولد را به‌صورت وسیله‌ای درنظر گرفت که کار مکانیکی (چرخش حلقه) را به‌کار الکتریکی در بار خارجی تبدیل می‌کند. انرژی الکتریکی تولیدشده توسط مولد، در نهایت از انرژیی که عامل تداوم چرخش حلقه فراهم می‌کند تأمین می‌شود.

موتور الکتریکی، به‌طور ساده مولدی است که در جهت وارون کار می‌کند. منبع خارجی که چرخش حلقه را فراهم می‌کند قطع و بار موجود در شکل ۳۴ـ۱۳ را با مولد دیگری جایگزین می‌کنیم، که نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ متناوب (یا AC) را تأمین می‌کند که باعث برقراری جریان $i = \mathscr{E}/R$ در حلقه می‌شود. در این حالت نیز، گشتاور نیروی مغناطیسی بر حلقه‌ای که سبب چرخش آن می‌شود وجود دارد. درست وقتی که حلقه از $\theta = ۱۸۰^\circ$ می‌گذرد، یعنی جایی که گشتاور نیرو برابر صفر است، جریانی که از خارج تأمین شده است تغییر جهت می‌دهد، که سبب می‌شود، همراه با چرخش حلقه، جهت گشتاور نیرو را در همان جهت حفظ کند. با آنکه جریان در هر نیم‌چرخه تغییر جهت می‌دهد، اما گشتاور نیروی مغناطیسی در همان جهت باقی می‌ماند.

یک‌بار دیگر، چنانچه یاتاقانها را بدون اصطکاک درنظر بگیریم، چنین به‌نظر می‌آید که می‌توانیم از موتور مورد نظرمان از هیچ‌چیز، چیزی به‌دست آوریم. اگر مقاومت سیمها را خیلی کم کنیم، در آن صورت جریان و گشتاور نیروی حاصل از آن بسیار بزرگ می‌شود. به‌نظر می‌رسد که با صرف هزینهٔ اندکی در انرژی الکتریکی، دستیابی به مقدار نامحدودی کار مکانیکی امکان‌پذیر باشد. آنچه در اینجا نادیده گرفتیم این است که حلقهٔ چرخان سبب ایجاد نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ می‌شود (که در مورد موتور به آن "نیروی ضد محرکهٔ الکتریکی" می‌گوییم). این نیروی ضد محرکهٔ الکتریکی با معادلهٔ (۳۴ـ۱۰) مشخص شده است. بنابر قانون لنز، نیروی ضد محرکهٔ الکتریکی با آثار ناشی از نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شدهٔ $\mathscr{E}$ مخالفت می‌کند. وقتی موتور در آغاز شروع به حرکت می‌کند، ω کوچک است، نیروی ضد محرکهٔ الکتریکی نیز کوچک است و جریان به‌صورت $i = \mathscr{E}/R$ است. همراه با سرعت‌گرفتن چرخش، نیروی ضد محرکهٔ الکتریکی افزایش پیدا می‌کند و جریان به مقدار $i = (\mathscr{E} - \mathscr{E}_{\text{ind}})/R$ کاهش می‌یابد. همراه با تداوم افزایش سرعت چرخش، نیروی ضد محرکهٔ الکتریکی نیز افزایش می‌یابد؛ وقتی سرانجام $\mathscr{E}_{\text{ind}} = \mathscr{E}$، دیگر جریانی جاری نمی‌شود و موتور چرخان دیگر نمی‌تواند هیچ گشتاور نیرویی ایجاد کند. اگر باری به موتور اعمال کنیم (مثلاً، وزنه‌ای که قرار است بالا برده شود)، در آن صورت چرخش تا حدودی کند می‌شود. به‌طوری که $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ کاهش پیدا می‌کند و i افزوده می‌شود ـــ و مولد چشمه (به‌وجودآورندهٔ حرکت) باید کار الکتریکی مضاعفی فراهم آورد. بنابراین موتور را می‌توانیم به‌صورت وسیله‌ای جهت تبدیل کار الکتریکی (از مولد محرک) به‌کار مکانیکی در نظر بگیریم.

مولدها و موتورهای واقعی تا حدودی پیچیده‌تر از آنهایی هستند که در اینجا مورد بررسی قرار دادیم. در بعضی از مولدها از آرایش هندسی هوشمندانه‌ای از پیچه‌ها و سازوکار گردآوری جریان برای تولید جریانهای DC استفاده می‌شود (که ممکن است از نظر مقداری برحسب زمان تغییر کند ولی جریان تغییر جهت نمی‌دهد). به‌صورتی مشابه، موتورهای DCای وجود دارند که با جریان یا ولتاژ DC کار می‌کنند. با این همه، اصول عملکرد پایهٔ آنها مشابه نمونه‌هایی است که در اینجا مورد بررسی قرار دادیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۵ یک مولد الکتریکی از حلقه‌ای مستطیل‌شکل به اضلاع ۸٫۴ cm در ۱۵٫۴ cm تشکیل شده است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به‌شدت ۰٫۱۲۶ T با بسامد ۶۰٫۰ Hz حول محوری عمود بر جهت میدان می‌چرخد. بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی تولیدشده توسط حلقه چقدر است؟

حل. بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی با معادلهٔ (۳۴ـ۱۰) مشخص شده است وقتی در آن $\sin\omega t = ۱$:

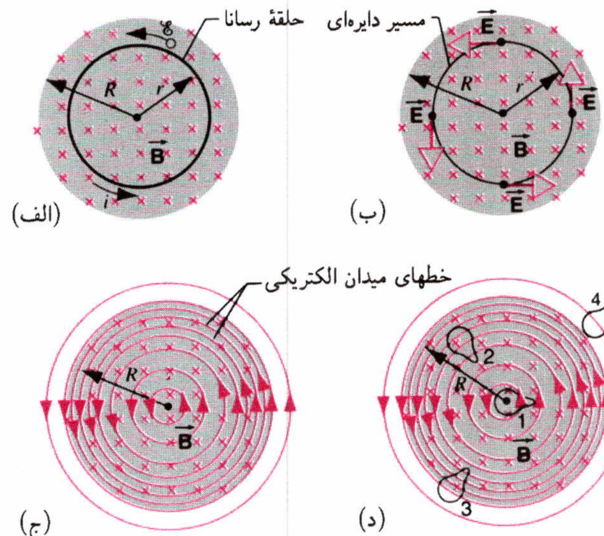
$$\mathscr{E}_{\text{max}} = BA\omega$$
$$= (۰٫۱۲۶\,\text{T})(۰٫۰۸۴\,\text{m} \times ۰٫۱۵۴\,\text{m})(۲\pi \times ۶۰\,\text{s}^{-۱})$$
$$= ۰٫۶۱\,\text{V}$$

۳۴ـ۶ میدانهای الکتریکی القایی

فرض کنید حلقهٔ رسانایی را در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار داده‌ایم (مانند شکل ۳۴ـ۱۵(الف))، و این میدان، که می‌توان آن را به‌وسیلهٔ یک آهنربای الکتریکی تولید کرد، در تمام سطح حلقه شدت یکنواختی داشته باشد. می‌توان با تغییر شدت جریان در آهنربای الکتریکی شدت میدان مغناطیسی را تغییر داد.

با تغییر $\vec{\mathbf{B}}$، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه تغییر می‌کند و با استفاده از قانونهای فاراده و لنز می‌توان اندازه و جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی و جریان القایی در حلقه را محاسبه کرد، قبل از اینکه میدان شروع به تغییر کند، جریانی در حلقه وجود ندارد؛ وقتی میدان تغییر می‌کند، بارها در حلقه جریان پیدا می‌کنند. برای اینکه بارها شروع به حرکت کنند، باید آنها را به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی شتاب داد. بنابر قانون فاراده، این میدان الکتریکی القایی را میدان مغناطیسی متغیر تولید می‌کند.

میدان الکتریکی القایی همان‌قدر واقعی است که هر میدان حاصل



شکل ۳۴ـ۱۵ (الف) همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، اگر میدان مغناطیسی (که به طرف داخل صفحه است) با آهنگ ثابتی افزایش پیدا کند، جریان ثابتی در حلقهٔ رسانا به شعاع r به‌وجود می‌آید. (ب) حتی اگر حلقه را از این ناحیه خارج کنیم، میدانهای الکتریکی القایی در آنجا وجود دارند. (ج) تصویر کامل میدانهای الکتریکی القایی، که به‌صورت خطهای میدان نمایش داده شده‌اند. (د) چهار مسیر بستهٔ مشابه که می‌توان نیروی محرکهٔ الکتریکی را گرداگرد آنها محاسبه کرد.

از بارهای ساکن؛ مثلاً، این میدان، نیروی $q_0\vec{\mathbf{E}}$ را بر بار آزمون وارد می‌کند. علاوه بر آن، حضور میدان الکتریکی هیچ ربطی به حضور حلقهٔ رسانا ندارد؛ اگر حلقه را به‌طورکامل از محدودهٔ میدان مغناطیسی متغیر خارج کنیم باز هم میدان الکتریکی وجود خواهد داشت. می‌توان این فضا را با گاز الکترونی یا اتمهای یونیده پر کرد؛ در این صورت این ذرات تحت تأثیر همان میدان الکتریکی القایی $\vec{\mathbf{E}}$ قرار خواهند گرفت.

بنابراین می‌توان حلقهٔ رسانا را با مسیر دایره‌ای به شعاع اختیاری r (شکل ۳۴ـ۱۵(ب)) جایگزین کرد. این مسیر، که آن را در صفحه‌ای عمود بر میدان $\vec{\mathbf{B}}$ اختیار می‌کنیم، ناحیه‌ای از فضا را محصور می‌کند که در آن میدان مغناطیسی با آهنگ $d\vec{\mathbf{B}}/dt$ تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم که آهنگ $d\vec{\mathbf{B}}/dt$ در تمام نقطه‌های سطحی که مسیر محصور کرده است یکسان باشد. مسیر دایره‌ای شار Φ_B را در بر می‌گیرد که به علت تغییر میدان مغناطیسی با آهنگ $d\Phi_B/dt$ تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ القایی پیرامون مسیر ایجاد می‌شود و در نتیجه میدان الکتریکی القایی در تمام نقطه‌های گرد این مسیر دایره‌ای وجود دارد. از تقارن موجود در مسئله نتیجه می‌گیریم که $\vec{\mathbf{E}}$ باید در تمام نقطه‌های گرداگرد دایره اندازهٔ یکسانی داشته باشد، در این فضا هیچ جهت مرجحی وجود ندارد. به علاوه، $\vec{\mathbf{E}}$ نمی‌تواند هیچ مؤلفهٔ شعاعی داشته باشد که پیامد قانون گاؤس است: یک سطح گاؤسی استوانه‌ای فرضی عمود بر صفحهٔ شکل ۳۴ـ۱۵(ب) در نظر بگیرید. اگر $\vec{\mathbf{E}}$ مؤلفهٔ شعاعی داشته باشد، یک شار الکتریکی خالص به داخل یا خارج از این سطح وجود دارد، که ایجاب می‌کند سطح حاوی بار الکتریکی خالص باشد. چون چنین باری وجود ندارد، شار الکتریکی باید برابر صفر باشد و مؤلفهٔ شعاعی $\vec{\mathbf{E}}$ هم باید برابر صفر باشد. بنابراین، میدان الکتریکی القایی یک میدان مماسی است و خطهای میدان الکتریکی دایره‌هایی هم‌مرکزند (شکل ۳۴ـ۱۵(ج)).

بار آزمون q_0 را در نظر بگیرید که در مسیر دایره‌ای شکل ۳۴ـ۱۵(ب) حرکت می‌کند. کار W که میدان الکتریکی القایی در یک دور روی بار انجام می‌دهد برابر $\mathscr{E}q_0$ است. به‌صورت هم‌ارز، می‌توان کار را به‌صورت حاصلضرب نیروی الکتریکی q_0E در جابه‌جایی در یک دور، یعنی $2\pi r$ بیان کرد. از برابر قرار دادن این دو عبارت مربوط به کار W و حذف عامل مشترک q_0 از طرفین، می‌رسیم به:

$$\mathscr{E} = E(2\pi r) \qquad (۳۴ـ۱۱)$$

طرف راست معادلهٔ (۳۴ـ۱۱) را می‌توان به‌صورت انتگرال خطی $\vec{\mathbf{E}}$ در پیرامون دایره بیان کرد، که در موارد عمومی‌تر (مانند وقتی که $\vec{\mathbf{E}}$ ثابت نیست یا وقتی که مسیر برگزیده دایره نیست) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathscr{E} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (۳۴ـ۱۲)$$

توجه داشته باشید که معادلهٔ (۳۴ـ۱۲) برای مورد خاص مسیر دایره‌ای با میدان مماسی ثابت $\vec{\mathbf{E}}$ به معادلهٔ (۳۴ـ۱۱) تبدیل می‌شود.

با جایگزین کردن نیروی محرکهٔ الکتریکی با معادلهٔ (۳۴ـ۱۲)، می‌توان قانون القای فاراده ($\mathscr{E} = -d\Phi_B/dt$) را به‌صورت زیر نوشت

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (۳۴ـ۱۳)$$

این صورت از قانون فاراده به عنوان یکی از چهار معادلهٔ بنیادی ماکسول در الکترومغناطیس مورد استفاده قرار می‌گیرد. از این صورت معادله، واضح است که قانون فاراده ایجاب می‌کند که میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی به‌وجود آورد. جهت انتگرال خطی با همان قاعدهٔ دست راست موصوف در پایان بخش ۳۴ـ۳ با جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ بستگی پیدا می‌کند: چنانچه انگشتان نشان‌دهندهٔ جهت $d\vec{\mathbf{s}}$ در امتداد مسیر بستهٔ انتگرال‌گیری باشد، شست جهت $d\vec{\mathbf{A}}$ را مشخص می‌کند.

در شکل ۳۴ـ۱۵ فرض کردیم که میدان مغناطیسی افزایش پیدا می‌کند؛ یعنی هم dB/dt و هم $d\Phi_B/dt$ مثبت‌اند. از قانون لنز،

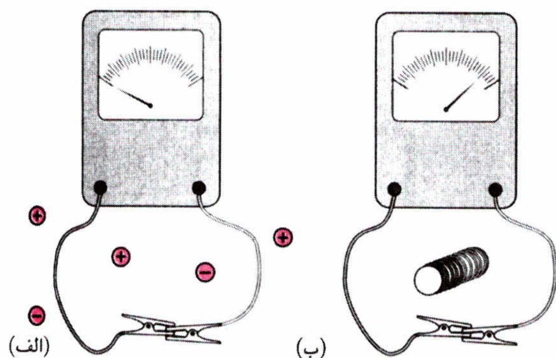
می‌دانیم که نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی با این تغییر مخالفت می‌کند و در نتیجه جریان القایی میدان مغناطیسی تولید می‌کند که جهت آن به طرف خارج از صفحهٔ شکل است. چون جریانهای القایی باید پادساعتگرد باشند، خطوط میدان الکتریکی القایی $\vec{\mathbf{E}}$ (که عامل تولید جریان است) نیز باید پادساعتگرد باشند. از طرف دیگر، اگر میدان مغناطیسی کاهش پیدا کند ($dB/dt < ۰$)، خطهای میدان الکتریکی القایی باید ساعتگرد باشند، به‌طوری که در این مورد بازهم جریان القاشده با تغییر مخالفت کند.

قانون فاراده را به‌صورتی که در معادلهٔ (۳۴ـ۱۳) آمده است می‌توان برای هر مسیری با هر شکل هندسی به‌کار برد، و نه فقط برای مسیرهای دایره‌ای که در شکل ۳۴ـ۱۵(ب) برگزیدیم. شکل ۳۴ـ۱۵(د) چهار مسیر از این نوع را نشان می‌دهد، که تمام آنها دارای شکل و مساحت یکسان‌اند ولی در مکانهای متفاوتی در یک میدان متغیر قرار گرفته‌اند. برای مسیرهای ۱ و ۲، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی یکی است زیرا این مسیرها کاملاً در میدان مغناطیسی متغیر قرار گرفته‌اند و در نتیجه هر دو دارای مقدار یکسان $d\Phi_B/dt$ هستند. ولی، با آنکه نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ (مساوی با $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$) برای هر دو مسیر یکسان است، توزیع بردارهای میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ در گرداگرد این مسیرها، چنانکه خطهای میدان الکتریکی نشان می‌دهند، متفاوت است. برای مسیر ۳ نیروی محرکهٔ الکتریکی کمتر است زیرا هم Φ_B و هم $d\Phi_B/dt$ کمترند، و برای مسیر ۴ نیروی محرکهٔ الکتریکی صفر است، با آنکه میدان الکتریکی در هیچ نقطه‌ای از مسیر صفر نیست.

نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی و اختلاف پتانسیل

در فصل ۲۶ میدانهای الکتریکی ایجادشده توسط بارهای الکتریکی را مورد بحث و بررسی قرار دادیم. میدانهای الکتریکی القایی به‌وسیلهٔ بارهای الکتریکی ایجاد نشده‌اند بلکه به‌وسیلهٔ شار مغناطیسی متغیر پدید آمده‌اند. هر دو نوع میدان الکتریکی را می‌توان به‌وسیلهٔ نیروهایی که بر بارهای الکتریکی وارد می‌آورند شناسایی کرد، ولی بین آنها یک اختلاف مهم وجود دارد: خطهای میدان $\vec{\mathbf{E}}$ وابسته به شار مغناطیسی متغیر مسیرهای بسته‌ای تشکیل می‌دهند، ولی خطهای میدان $\vec{\mathbf{E}}$ وابسته به بارهای الکتریکی همواره از یک بار مثبت شروع و به یک بار منفی ختم می‌شوند.

اختلاف دیگری هم بین دو نوع میدان الکتریکی وجود دارد: میدانهای الکتریکی ایجادشده توسط بارها را می‌توان به‌وسیلهٔ پتانسیل نمایش داد، ولی پتانسیل برای میدانهای الکتریکی ناشی



شکل ۳۴ـ۱۶ (الف) سیمهای ولت‌سنجی به‌هم متصل شده‌اند. در ناحیه‌ای که سیمها به‌هم متصل شده‌اند میدان الکتریکی ناشی از بارهای الکتریکی وجود دارد. انتگرال $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ گرداگرد مسیر بسته‌ای متشکل از سیمها و ولت‌سنج مقدار صفر را به‌دست می‌دهد، در نتیجه ولت‌سنج عدد صفر را نشان می‌دهد. (ب) در این حالت سیمها سیملوله‌ای را در برمی‌گیرند که در آن جریان تغییر می‌کند. با آنکه سیمها به‌هم متصل‌اند، ولت‌سنج دیگر عدد صفر را نشان نمی‌دهد.

از شار مغناطیسی متغیر معنایی ندارد. در فصل ۲۸ نشان دادیم که اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در میدان الکتریکی برابر است با (معادلهٔ ۲۸ـ۱۵ را ببینید):

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (۳۴\text{ـ}۱۴)$$

چون میدان الکتروستاتیکی وابسته به بارهای الکتریکی پایستار است، اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ a و b مستقل از مسیری است که بین این دو نقطه پیموده می‌شود. اگر a و b دو نقطهٔ یکسان باشند و در آن صورت مسیری که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند حلقهٔ بسته است و معادلهٔ (۳۴ـ۱۴) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = ۰ \qquad (۳۴\text{ـ}۱۵)$$

در شکل ۳۴ـ۱۶(الف) این مفهوم را به تصویر کشیده‌ایم. اگر دو سیم ولت‌سنجی را در میدان ناشی از بارهای الکتریکی به‌هم متصل کنیم، ولت‌سنج مقدار صفر را نشان می‌دهد.

مورد متضاد مربوط به میدان الکتریکی ایجادشده به‌وسیلهٔ میدان مغناطیسی متغیر را در نظر بگیرید. در این حالت انتگرال $\vec{\mathbf{E}}$ حول مسیر بسته صفر نیست ــ اکنون، بنابر قانون فاراده، $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ برابر $-d\Phi_B/dt$ است. در شکل ۳۴ـ۱۶(ب)، دو سیم ولت‌سنج را به‌هم وصل کرده‌ایم، که حلقهٔ بسته‌ای را تشکیل دهد. این حلقه سیملوله‌ای را در بر می‌گیرد که جریان در آن تغییر می‌کند. در این حالت ولت‌سنج دیگر مقدار صفر را نشان نمی‌دهد و نمی‌توان برای توصیف این وضعیت از مفهوم پتانسیل استفاده کرد. میدان الکتریکی القایی ناشی از میدان

مغناطیسی متغیر ناپایستار است و نمی‌توان آن را با پتانسیل نمایش داد. (میدان مغناطیسی ناشی از جریان نیز ناپایستار است. خطهای میدان مغناطیسی حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند و میدان مغناطیسی را نیز نمی‌توان با پتانسیل توصیف کرد.)

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۶ در شکل ۳۴ـ۱۵(ب)، فرض کنید $R = ۸٫۵\,\mathrm{cm}$ و $dB/dt = ۰٫۱۳\,\mathrm{T/s}$ است. (الف) اندازهٔ میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ برای $r = ۵٫۲\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟ (ب) اندازهٔ میدان الکتریکی القایی برای $r = ۱۲٫۵\,\mathrm{cm}$ چقدر است؟

حل. (الف) شارگذرندهٔ Φ_B برای مسیر دایره‌ای بسته به شعاع r (با شرط $r < R$) عبارت است از

$$\Phi_B = B(\pi r^۲)$$

به‌طوری که از قانون فاراده (معادلهٔ ۳۴ـ۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$E(۲\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi r^۲)\frac{dB}{dt}$$

از حل این معادله برای E و محاسبهٔ اندازهٔ آن، می‌رسیم به

$$E = \frac{۱}{۲}\left|\frac{dB}{dt}\right| r \qquad (۳۴\text{ـ}۱۶)$$

توجه کنید که میدان الکتریکی القایی به dB/dt بستگی دارد و نه به B. اندازهٔ میدان $\vec{\mathbf{E}}$ به‌ازای $r = ۵٫۲\,\mathrm{cm}$ برابر است با

$$E = \frac{۱}{۲}\left|\frac{dB}{dt}\right| r = \frac{۱}{۲}(۰٫۱۳\,\mathrm{T/s})(۵٫۲ \times ۱۰^{-۲}\mathrm{m})$$
$$= ۰٫۰۰۳۴\,\mathrm{V/m} = ۳٫۴\,\mathrm{mV/m}$$

(ب) در این حالت می‌دانیم $r > R$ و در نتیجه همهٔ شار مغناطیسی از مسیر دایره‌ای می‌گذرد، در نتیجه

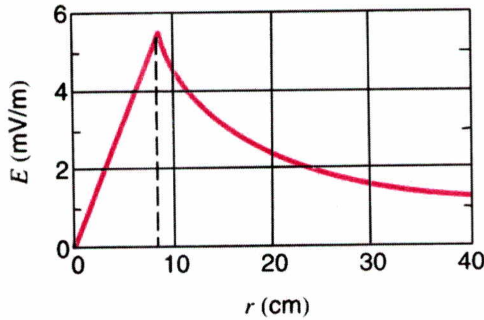
$$\Phi_B = B(\pi R^۲)$$

از قانون فاراده (معادلهٔ ۳۴ـ۱۳)، در این مورد، می‌رسیم به

$$E(۲\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi R^۲)\frac{dB}{dt}$$

از حل این معادله برای E و محاسبهٔ اندازهٔ آن داریم

$$E = \frac{۱}{۲}\left|\frac{dB}{dt}\right| \frac{R^۲}{r} \qquad (۳۴\text{ـ}۱۷)$$



شکل ۳۴ـ۱۷ میدان الکتریکی القایی مشخص‌شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۶.

در این حالت، حتی در نقطه‌هایی که کاملاً خارج از محدودهٔ میدان مغناطیسی (متغیر) قرار دارند، میدان الکتریکی القا می‌شود، نتیجهٔ مهمی که ساخت مبدلها (بخش ۳۷ـ۵) را امکان‌پذیر می‌کند. به‌ازای $r = ۱۲٫۵\,\mathrm{cm}$، از معادلهٔ (۳۴ـ۱۷) می‌رسیم به

$$E = \frac{۱}{۲}(۰٫۱۳\,\mathrm{T/s})\frac{(۸٫۵ \times ۱۰^{-۲}\mathrm{m})^۲}{۱۲٫۵ \times ۱۰^{-۲}\mathrm{m}}$$
$$= ۳٫۸ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{V/m} = ۳٫۸\mathrm{mV/m}$$

معادله‌های (۳۴ـ۱۶) و (۳۴ـ۱۷)، همان‌طور که باید، به‌ازای $r = R$ نتیجه‌های یکسانی به‌دست می‌دهند. در شکل ۳۴ـ۱۷ نمودار تغییرات میدان را براساس این دو معادله نشان داده‌ایم.

بتاترون*

بتاترون وسیله‌ای است برای شتاب‌دادن الکترونها (که به ذرات بتا نیز مشهورند) تا سرعتهای زیاد با استفاده از میدانهای الکتریکی القایی توسط میدانهای مغناطیسی متغیر. انرژیهای الکترونهای نوعی شتاب‌یافته در بتاترونها در محدودهٔ $۵۰\,\mathrm{MeV}$ تا $۱۰۰\,\mathrm{MeV}$ هستند. از این‌گونه الکترونهای پرانرژی می‌توان برای تحقیقات بنیادی در فیزیک و نیز تولید پرتوهای x برای تحقیقات کاربردی در صنعت و مقاصد پزشکی مانند درمان سرطان استفاده کرد.

شکل ۳۴ـ۱۸ سطح مقطع ساختار داخلی یک بتاترون را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی را، که شکل آن به‌وسیلهٔ قطبهای M

* برای مروری بر روند پیشرفتها و کاربردهای بتاترونها و وسایل و ابزارهای مشابه، مقالهٔ:
"Ultra-high-current Electron Induction Accelerators," by Chris A. Kapetanakos and Phillip Sprangle, *Physics Today*, February 1985, p. 58.
را ببینید.

شکل ۳۴ـ۱۸ (الف) سطح مقطع یک بتاترون، که مدار الکترونهای در حال شتاب‌گیری و "تصویری" از میدان مغناطیسی متغیر برحسب زمان را در یک لحظهٔ مشخص در خلال یک چرخه، نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی را پیچه‌های C تولید کرده‌اند و قطبهای مغناطیسی M شکل داده‌اند. الکترونها در داخل فضای تخلیه‌شدهٔ لولهٔ سرامیکی چنبره‌ای‌شکل "D" می‌چرخند. آنها در صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ شکل چرخش دارند، از طرف راست وارد D و از طرف چپ خارج می‌شوند. (ب) تغییرات زمانی میدان مغناطیسی B بتاترون در خلال یک چرخه.

مادهٔ مغناطیسی معین می‌شود، می‌توان با تغییر جریان پیچه‌ها تغییر داد. الکترونها در فضای تخلیه‌شدهٔ لولهٔ سرامیکی چنبره‌ای‌شکل می‌چرخند.

پیچه‌ها حامل جریان متناوبی هستند و یک میدان مغناطیسی مطابق شکل ۳۴ـ۱۸(ب) به‌وجود می‌آورند. برای اینکه الکترونها در جهت نشان داده‌شده در شکل بچرخند (اگر از بالا نگاه کنیم پادساعتگرد) میدان مغناطیسی باید به طرف بالا باشد (که آن را مثبت اختیار کرده‌ایم). اگر بخواهیم الکترونها در خلال چرخه شتاب بگیرند (و نه اینکه از شتاب بازداشته شوند) باید شیب میدان مغناطیسی متغیر مثبت باشد، یعنی باید $dB/dt > ۰$ باشد، به‌طوری که $d\Phi_B/dt > ۰$. به این ترتیب، فقط اولین ربع چرخهٔ شکل ۳۴ـ۱۸(ب) در کارکرد بتاترون مفید است. الکترونها در لحظهٔ $t = ۰$ به داخل بتاترون تزریق و در $t = T/۴$ از آن بیرون کشیده می‌شوند؛ در سه ربع چرخهٔ باقی‌مانده بتاترون هیچ باریکه‌ای تولید نمی‌کند. بتاترون تپ باریکه تولید می‌کند، نه باریکهٔ پیوسته و تپها نوعاً هر ۰٫۰۱ s پدید می‌آیند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۷ در یک بتاترون ۱۰۰ MeV، شعاع مدار R برابر ۸۴ cm است. میدان مغناطیسی که مدار را دربرگرفته است به تناوب (۶۰ بار در ثانیه) از صفر تا مقدار میانگین بیشینهٔ $B_{\rm av,m} = ۰٫۸۰\ \rm T$ در بازهٔ شتاب‌دهی ربع دورهٔ تناوب، یعنی ۴٫۲ ms افزایش می‌یابد. (الف) الکترون به‌طور میانگین در هر بار چرخش به دور این مدار در این شار متغیر چه مقدار انرژی به‌دست می‌آورد؟ (ب) سرعت متوسط الکترون در طول چرخهٔ شتاب‌گیری چقدر است؟

حل. (الف) شار مرکزی در خلال بازهٔ شتاب‌گیری از صفر تا مقدار بیشینهٔ زیر افزایش می‌یابد

$$\Phi_B = (B_{\rm av,m})(\pi R^۲) = (۰٫۸۰\ \rm T)(\pi)(۰٫۸۴\ \rm m)^۲ = ۱٫۸\ \rm Wb$$

مقدار میانگین $d\Phi_B/dt$ در خلال بازهٔ شتاب‌دهی برابر است با

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\rm av} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{۱٫۸\ \rm Wb}{۴٫۲\times ۱۰^{-۳}\rm s} = ۴۳۰\ \rm Wb/s$$

از قانون فاراده (معادلهٔ ۳۴ـ۳) می‌دانیم که این نیروی محرکهٔ الکتریکی میانگین برحسب ولت است. به این ترتیب، انرژی الکترون در هر بار چرخش در این شار متغیر به‌طور میانگین ۴۳۰ eV افزایش می‌یابد. برای رسیدن به انرژی نهایی ۱۰۰ MeV، الکترون باید در حدود ۲۳۰۰۰۰ دور در مدار بچرخد، که طول کل مسیر پیموده‌شده در حدود ۱۲۰۰ km می‌شود.

(ب) مدت زمان شتاب‌دهی را ۴٫۲ ms در نظر گرفته‌ایم و طول مسیر را در حدود ۱۲۰۰ km محاسبه کردیم. در نتیجه سرعت متوسط عبارت است از

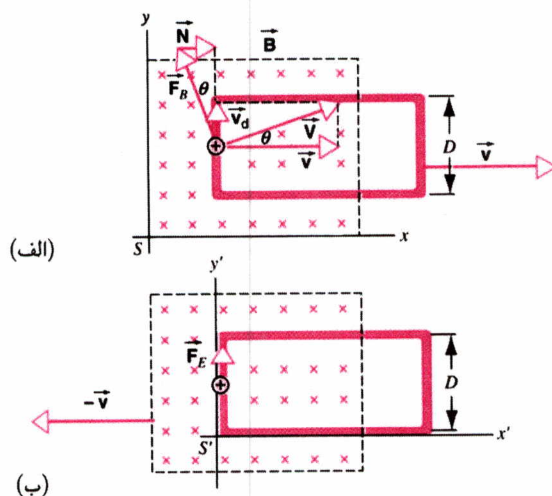
$$v_{\rm av} = \frac{۱۲۰۰\times ۱۰^۳\rm m}{۴٫۲\times ۱۰^{-۳}\rm s} = ۲٫۸۶\times ۱۰^۸\rm m/s$$

که ۹۵٪ سرعت سیر نور است. سرعت واقعی الکترونی که کاملاً شتاب گرفته است تا به انرژی نهایی ۱۰۰ MeV برسد، ۹۹٫۹۹۸۷٪ سرعت سیر نور است.

۷ـ۳۴ القایش و حرکت نسبی (اختیاری)

در بخش ۳۳ـ۶، دیدیم که طبقه‌بندی آثار الکترومغناطیسی به الکتریکی محض یا به مغناطیسی محض به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد. یعنی، آنچه در یک چارچوب مرجع به‌صورت میدان مغناطیسی جلوه می‌کند ممکن است در چارچوب دیگر به‌صورت مخلوطی از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نمایان شود. چون نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی را سرعت جسم متحرک در میدان مغناطیسی مشخص می‌کند، بدیهی است که این نیروی محرکه به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد. ناظران دیگر در چارچوبهای لخت دیگر سرعتهای متفاوت و شدتهای میدان مغناطیسی گوناگونی را اندازه خواهند گرفت. بنابراین، ضرورت دارد که در محاسبهٔ نیروهای محرکهٔ الکتریکی و جریانهای القایی چارچوب مرجع ناظر مشخص باشد.

در شکل ۳۴ـ۱۹(الف) حلقهٔ بسته‌ای را نشان داده‌ایم که یک عامل خارجی (که در شکل مشخص نشده است) آن را با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ نسبت به آهنربایی، که میدان یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ را در ناحیه‌ای تولید می‌کند، به حرکت در آورده است. ناظر S، که نسبت به آهنربا ساکن است، میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را اندازه‌گیری می‌کند. در این حالت نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی همان نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی است، زیرا حلقهٔ رسانا نسبت به ناظر حرکت می‌کند.



شکل ۳۴ـ۱۹ حلقهٔ رسانای بسته‌ای نسبت به آهنربایی که میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را ایجاد می‌کند در حرکت است. (الف) ناظر S، که نسبت به آهنربا ساکن است می‌بیند که حلقه به طرف راست در حرکت است و نیروی مغناطیسی $F_B \cos\theta$ به طرف بالا بر حاملهای بار مثبت اثر می‌کند. (ب) ناظر S' که نسبت به حلقه ساکن است، مشاهده می‌کند که آهنربا به طرف چپ در حرکت است و یک نیروی الکتریکی روی حاملهای بار مثبت به طرف بالا وارد می‌آید. در هر دوی این شکلها نیروهای داخلی برخورد وجود دارد (که نشان داده نشده‌اند) و مانع از شتاب‌گرفتن حاملهای بار می‌شوند.

یک حامل بار مثبت را در مرکز لبهٔ سمت چپ حلقه در نظر بگیرید. برای ناظر S، این بار الکتریکی q مقید است که با سرعت $\vec{\mathbf{v}}$ در میدان $\vec{\mathbf{B}}$ همراه با حلقه به طرف راست حرکت کند و تحت‌تأثیر نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (که در شکل ۳۴ـ۱۹(الف) نشان داده نشده است) قرار گیرد. این نیرو باعث می‌شود که حاملهای بار در رسانا به طرف بالا (در امتداد محور y) حرکت کنند؛ سرانجام، این حاملهای بار، مطابق شکل ۳۴ـ۱۹(الف)، به سرعت سوق $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$ می‌رسند.

اکنون سرعت برایند تعادلی حاملهای بار برابر با $\vec{\mathbf{V}}$، یعنی جمع برداری سرعتهای $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$ است. در این شرایط نیروی مغناطیسی $\vec{\mathbf{F}}_B$ به‌صورت زیر است

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۴\text{ـ}۱۸)$$

این نیرو (طبق معمول)، همان‌طور که در شکل ۳۴ـ۱۹(الف) نشان داده‌ایم، عمود بر سرعت برایند $\vec{\mathbf{V}}$ اثر می‌کند.

نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ به تنهایی، می‌خواهد حاملهای بار را از دیوارهٔ طرف چپ رسانا به خارج براند. چون این واقعه رخ نمی‌دهد دیوارهٔ رسانا باید نیروی قائم $\vec{\mathbf{N}}$ را بر حاملهای بار (شکل ۳۴ـ۱۹(الف)) وارد کند. اندازهٔ نیروی $\vec{\mathbf{N}}$ باید چنان باشد که $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$ درست به موازات محور سیم قرار بگیرد؛ به عبارت دیگر، $\vec{\mathbf{N}}$ دقیقاً مؤلفهٔ افقی $\vec{\mathbf{F}}_B$ را خنثی می‌کند و فقط مؤلفهٔ $F_B \cos\theta$ را به‌جای می‌گذارد که در امتداد رسانا قرار دارد. مؤلفهٔ اخیر نیروی وارد بر حامل بار نیز با نیروی ضربه‌ای متوسط F_{i}، که به برخوردهای داخلی حامل بار بستگی دارد، خنثی می‌شود. این برخوردهای داخلی هنگامی صورت می‌گیرند که حاملهای بار با سرعت سوق (ثابت) v_{d} در رسانا حرکت کنند.

انرژی جنبشی حامل بار در سیم ثابت می‌ماند. نتیجه‌ای که با واقعیت صفربودن برایند نیروهای وارد بر ذرهٔ حامل بار (مساوی $\vec{\mathbf{F}}_B + \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}} + \vec{\mathbf{N}}$) سازگاری دارد. کار نیروی $\vec{\mathbf{F}}_B$ صفر است زیرا نیروهای مغناطیسی، که عمود بر جهت سرعت بار متحرک اثر می‌کنند، نمی‌توانند کاری روی بار انجام دهند. به این ترتیب کار (منفی) که متوسط نیروی برخورد داخلی یعنی $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}}$ روی حامل بار الکتریکی انجام می‌دهد باید دقیقاً با کار (مثبت) نیروی $\vec{\mathbf{N}}$ روی حامل بار خنثی شود. سرانجام، $\vec{\mathbf{N}}$ را عاملی که حلقه را در داخل میدان مغناطیسی می‌کشد فراهم می‌آورد و انرژی مکانیکی که این عامل مصرف می‌کند، چنانکه در بخش ۳۴ـ۴ دیدیم، به‌صورت انرژی داخلی در حلقه ظاهر می‌شود.

اکنون می‌خواهیم کار dW را که نیروی $\vec{\mathbf{N}}$ در زمان dt روی حامل بار انجام می‌دهد محاسبه کنیم؛ این کار برابر است با

$$dW = N(vdt) \qquad (۳۴\text{-}۱۹)$$

که در آن vdt مسافتی است که حلقه (و حامل بار) در شکل ۳۴ـ۱۹(الف) در مدت زمان dt به سمت راست پیموده است. برای نیروی N می‌توان نوشت (نگاه کنید به معادلهٔ (۳۴ـ۱۸) و شکل ۳۴ـ۱۹(الف))

$$N = F_B \sin\theta = (qVB)(v_{\rm d}/V) = qBv_{\rm d} \qquad (۳۴\text{-}۲۰)$$

از جانشانی معادلهٔ (۳۴ـ۲۰) در معادلهٔ (۳۴ـ۱۹) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} dW &= (qBv_{\rm d})(v\,dt) \\ &= (qBv)(v_{\rm d}dt) = qBv\,ds \end{aligned} \qquad (۳۴\text{-}۲۱)$$

که در آن ds (مساوی $v_{\rm d}dt$) مسافتی است که حامل بار در زمان dt در رسانا می‌پیماید.

کار انجام‌شده روی حامل بار، در خلال پیمودن یک دور کامل حلقه، را با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۳۴ـ۲۱) گرد حلقه به‌دست می‌آوریم که برابر است با

$$W = \oint dW = qBvD \qquad (۳۴\text{-}۲۲)$$

این نتیجه به این ترتیب به‌دست می‌آید که کار انجام‌شده روی شاخه‌های بالایی و پایینی حلقه در جهت مخالف یکدیگرند و همدیگر را خنثی می‌کنند و روی قسمتهایی از حلقه که خارج از میدان مغناطیسی قرار دارند کاری صورت نمی‌گیرد.

عاملی که روی حاملهای بار کار انجام می‌دهد جریانی را در حلقهٔ رسانای بسته برقرار می‌کند، که می‌توان آن را به عنوان نیروی محرکهٔ الکتریکی در نظر گرفت. با استفاده از معادلهٔ (۳۴ـ۲۲)، درمی‌یابیم که

$$\mathscr{E} = \frac{W}{q} = \frac{qBvD}{q} = BDv \qquad (۳۴\text{-}۲۳)$$

که همان نتیجه‌ای است که از قانون القای فاراده به‌دست آوردیم؛ معادلهٔ (۳۴ـ۶) را ببینید. به این ترتیب نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی ارتباط نزدیکی با انحراف جانبی یک ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی دارد.

اکنون ببینیم ناظر S' که نسبت به حلقه ساکن است وضعیت شکل ۳۴ـ۱۹(الف) را چگونه مشاهده می‌کند. از دیدگاه این ناظر آهنربا با سرعت $-\vec{\mathbf{v}}$ در شکل ۳۴ـ۱۹(ب) به طرف چپ در حرکت است و بار q همراه با حلقه در امتداد x' حرکت نمی‌کند، بلکه در جهت ساعتگرد در امتداد حلقه رانده می‌شود. ناظر S' نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}'$ را اندازه می‌گیرد، که می‌توان آن را در سطح میکروسکوپی، با توجه به اینکه آهنربای متحرک در حلقهٔ رسانا میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}'$ القا می‌کند، توجیه کرد. نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}'$ و میدان $\vec{\mathbf{E}}'$ با معادلهٔ (۳۴ـ۱۲) به یکدیگر مربوط می‌شوند،

$$\mathscr{E}' = \oint \vec{\mathbf{E}}' \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (۳۴\text{-}۲۴)$$

میدان القایی $\vec{\mathbf{E}}'$، که همان منشأ میدانهای القاشدهٔ مورد بحث در بخش ۳۴ـ۶ را دارد، نیروی $q\vec{\mathbf{E}}'$ را بر حامل بار الکتریکی وارد می‌کند.

میدان القایی $\vec{\mathbf{E}}'$ که جریان را تولید می‌کند فقط در لبهٔ چپ حلقه وجود دارد. (وقتی از معادلهٔ (۳۴ـ۱۲) گرد حلقه انتگرال می‌گیریم، سهم مؤلفه‌های x' میدان $\vec{\mathbf{E}}'$ روی شاخه‌های بالا و پایین حلقه یکدیگر را خنثی می‌کنند، در حالی که قسمتهایی از حلقه که در میدان مغناطیسی قرار ندارند سهمی در نیروی محرکه ندارند.) در نتیجه با استفاده از معادلهٔ (۳۴ـ۱۲) می‌رسیم به

$$\mathscr{E}' = E'D \qquad (۳۴\text{-}۲۵)$$

برای حرکت با سرعتهایی که در مقایسه با سرعت نور کوچک‌اند، نیروی محرکهٔ الکتریکی در معادله‌های (۳۴ـ۲۳) و (۳۴ـ۲۵) باید یکسان باشند، زیرا حرکت نسبی حلقه و آهنربا در هر دو مورد نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۱۹ یکسان‌اند. از برابر قرار دادن این روابط نتیجه می‌گیریم

$$E'D = BDv$$

یا

$$E' = vB \qquad (۳۴\text{-}۲۶)$$

در شکل ۳۴ـ۱۹(ب)، جهت بردار $\vec{\mathbf{E}}'$ در امتداد محور لبهٔ طرف چپ حلقهٔ رسانا به طرف بالاست زیرا این جهتی است که بارهای مثبت در امتداد آن رانده می‌شوند. جهت بردارهای $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ به روشنی در این شکل مشخص شده است. می‌بینیم که معادلهٔ (۳۴ـ۲۶) با رابطهٔ برداری کلی‌تر زیر سازگار است:

$$\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۴\text{-}۲۷)$$

البته معادلهٔ (۳۴ـ۲۷) را بجز در حالت خاص شکل ۳۴ـ۱۹ اثبات نکرده‌ایم؛ با وجود این، این معادله بدون توجه به زاویهٔ بین $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ به‌طور کلی صادق است.

معادلهٔ (۳۴ـ۲۷) را به‌صورت زیر تفسیر می‌کنیم. ناظر S که نسبت به آهنربا ساکن است تنها از وجود میدان مغناطیسی آگاه است. از دیدگاه این ناظر، نیرو از حرکت بارها در میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ سرچشمه می‌گیرد. ناظر S' که بر حامل بار الکتریکی قرار دارد نیز از وجود میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}'$ آگاه است و نیروی وارد بر بار را (که در آغاز نسبت به S' در حال سکون بود) به این میدان الکتریکی نسبت می‌دهد. S می‌گوید که نیرو صرفاً منشأ مغناطیسی دارد، درحالی که S' گویای آن است که این نیرو صرفاً منشأ الکتریکی دارد. از دیدگاه ناظر S نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی از معادلهٔ $\oint(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}})\cdot d\vec{\mathbf{s}}$ به‌دست می‌آید. از دیدگاه ناظر S'، همین نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی از رابطهٔ $\oint \vec{\mathbf{E}}'\cdot d\vec{\mathbf{s}}$ به‌دست می‌آید، که در آن $\vec{\mathbf{E}}'$ بردار میدان الکتریکی (القایی) است که ناظر S' در تمام نقطه‌های مدار مشاهده می‌کند.

برای ناظر سوم S'' که هم آهنربا و هم حلقه نسبت به او در حرکت‌اند، نیرویی که می‌خواهد بارها را در حلقهٔ رسانا به حرکت در آورد نه صرفاً الکتریکی است و نه صرفاً مغناطیسی، بلکه ترکیبی از هر دو است. به‌طور خلاصه، در معادلهٔ

$$\vec{\mathbf{F}}/q=\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}$$

ناظران مختلف ارزیابیهای متفاوتی از $\vec{\mathbf{E}}$، $\vec{\mathbf{B}}$، و $\vec{\mathbf{v}}$ دارند ولی وقتی آنها را با هم ترکیب می‌کنند، تمام ناظران ارزیابی واحدی از $\vec{\mathbf{F}}/q$ دارند و همهٔ ناظران مقدار یکسانی برای نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در حلقه به‌دست می‌آورند (که فقط به حرکت نسبی بستگی دارد). یعنی، نیروی کل (و در نتیجه، شتاب کل) برای تمام ناظران یکسان است، ولی هر ناظری برآورد متفاوتی از نیروهای الکتریکی و مغناطیسی سهیم در نیروی کل یکسان را به‌دست می‌دهد.

نکتهٔ اساسی آن است که آنچه از نظر ناظر میدان مغناطیسی به نظر می‌آید، ممکن است برای ناظری در چارچوب مرجع لخت دیگر مخلوطی از میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی ظاهر شود. با این همه، هر دو ناظر در مورد نتیجهٔ قابل اندازه‌گیری کلی، در مورد شکل ۳۴ـ۱۹ جریان جاری‌شده در حلقه، توافق دارند. در حقیقت وادار به این نتیجه‌گیری می‌شویم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مستقل از یکدیگر نیستند و موجودیت یکتای جداگانه‌ای ندارند؛ این میدانها به چارچوب مرجع لخت ناظر بستگی دارند؛ که در بخش ۳۳ـ۶ نیز به همین نتیجه رسیدیم.

در تمام نتیجه‌های به‌دست‌آمده در این بخش فرض کردیم که سرعت نسبی S و S' در مقایسه با سرعت سیر نور c کوچک‌اند. اگر سرعت v قابل مقایسه با c باشد، باید از مجموعهٔ مناسبی از تبدیلهای نسبیتی استفاده کنیم. در این مورد، در خواهیم یافت که نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی که ناظران S و S' اندازه می‌گیرند دیگر با هم برابر نیستند و همچنین میدان الکتریکی القایی دیگر با معادلهٔ (۳۴ـ۲۷) مشخص نمی‌شود. با این همه، اگر تمام کمیتها را به‌صورت نسبیتی مناسب تعریف کنیم، باز هم درمی‌یابیم که قانونهای بنیادی الکترومغناطیس از جمله قانون فاراده، در تمام چارچوب مرجعهای لخت معتبرند.* در واقع، همین ملاحظه‌ها راهنمای اینشتین به نظریهٔ نسبیت خاص بود؛ به زبان نسبیت خاص، می‌گوییم که معادله‌های ماکسول نسبت به تبدیل لورنتس ناوردا هستند.

چندگزینه‌ای

۳۴ـ۱ آزمایشهای فاراده

۳۴ـ۲ قانون القای فاراده

۱. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ عمود بر صفحهٔ یک حلقه سیم، برحسب زمان، مطابق شکل ۳۴ـ۲۰(الف) تغییر می‌کند. کدام‌یک از نمودارهای شکل ۳۴ـ۲۰(ب) به بهترین وجه جریان القاشده در حلقه را به‌صورت تابعی از زمان نمایش می‌دهد؟

۲. یک حلقهٔ رسانای انعطاف‌پذیر به شکل دایره و با شعاع متغیر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد که عمود بر صفحهٔ آن است. برای برقراری نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت $\mathscr{E}$ در حلقه، شعاع r حلقه برحسب زمان باید به‌صورت زیر تغییر کند:

(الف) $r(t)\propto\sqrt{t}$ (ب) $r(t)\propto t$ (ج) $r(t)\propto t^2$

(د) r باید ثابت باشد.

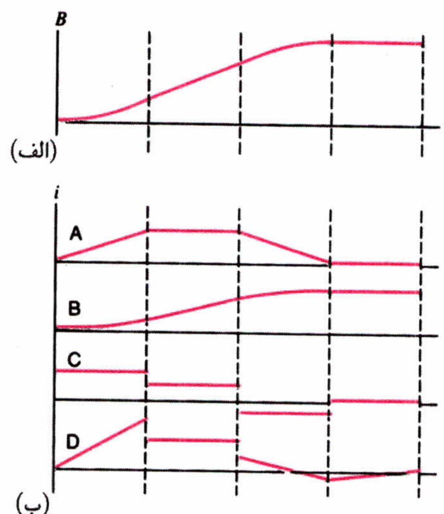
---

* برای بررسی دقیق نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی در مواردی که سرعتها الزاماً نسبت به c کوچک نیستند، رجوع کنید به:

"Application of Special Relativity to a Simple System in which a Motional emf Exists," by Murray D. Sirkis, *American Journal of Physics*, June 1986, p. 538.

مطالب گسترده‌تری دربارهٔ تبدیل نسبیتی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان در مرجع زیر مشاهده کرد:

Introduction to Special Relativity, by Robert Resnick (Wiley, 1968), Chapter 4.



شکل ۳۴ـ۲۰ پرسش چندگزینه‌ای ۱.

۳. یک حلقهٔ رسانای انعطاف‌پذیر به شکل دایره با شعاعی است که برحسب زمان به‌صورت خطی تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه وجود دارد که اندازهٔ آن متناسب معکوس با فاصلهٔ آن از مرکز حلقه است، یعنی: $B(r) \propto 1/r$. نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ چگونه برحسب زمان تغییر می‌کند؟

(الف) $\mathscr{E} \propto t^2$ (ب) $\mathscr{E} \propto t$ (ج) $\mathscr{E} \propto \sqrt{t}$

(د) $\mathscr{E}$ ثابت است.

۴. شارگذرنده از یک حلقهٔ سیم در مدت Δt به اندازهٔ $\Delta\Phi_B$ تغییر می‌کند. تغییر در شار $\Delta\Phi_B$ متناسب است با

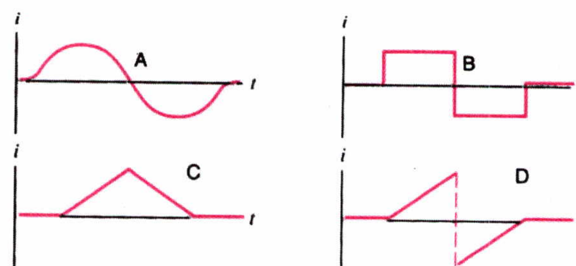
(الف) جریان جاری در سیم. (ب) مقاومت سیم.

(ج) مقدار بار خالصی که از هر مقطع سیم می‌گذرد.

(د) اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطهٔ ثابتی در حلقه.

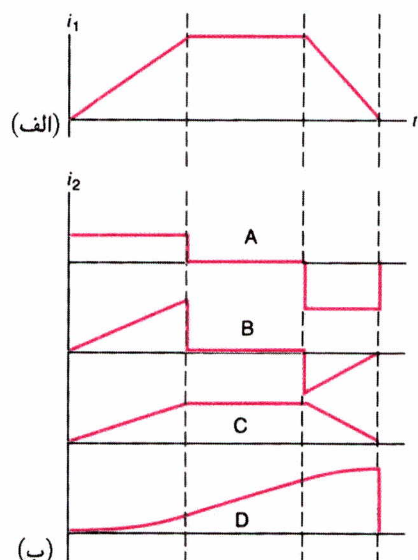
۳۴ـ۳ قانون لنز

۵. یک آهنربای میله‌ای از داخل یک حلقه سیم می‌گذرد. کدام‌یک از نمودارهای شکل ۳۴ـ۲۱ به بهترین وجه تغییر جریان در حلقه را برحسب زمان نشان می‌دهد؟ فرض کنید که جریان منفی، جریان در جهت مخالف را نشان می‌دهد.



شکل ۳۴ـ۲۱ پرسش چندگزینه‌ای ۵.

۶. جریان جاری در حلقهٔ سمت راست شکل ۳۴ـ۲، مطابق شکل ۳۴ـ۲۲ (الف) تغییر می‌کند. کدام یک از نمودارهای شکل ۳۴ـ۲۲ (ب) به بهترین وجه تغییرات عقربهٔ آمپرسنج را برحسب زمان نشان می‌دهد؟

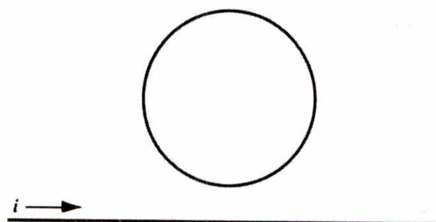


شکل ۳۴ـ۲۲ پرسش چندگزینه‌ای ۶.

۷. سیم بلند و مستقیم شکل ۳۴ـ۲۳ حامل جریان ثابت i به سمت راست است. جهت جریان القایی در داخل حلقهٔ سیم کدام است؟

(الف) ساعتگرد (ب) پادساعتگرد

(ج) هیچ جریان القایی وجود ندارد.



شکل ۳۴ـ۲۳ پرسشهای چندگزینه‌ای ۷، ۸، ۹، و ۱۱.

۸. سیم بلند و مستقیم شکل ۳۴ـ۲۳ حامل جریان i به سمت راست است که بر حسب زمان افزایش می‌یابد. جهت جریان القایی در داخل حلقهٔ سیم کدام است؟

(الف) ساعتگرد (ب) پادساعتگرد

(ج) هیچ جریان القایی وجود ندارد.

۹. سیم بلند و مستقیم شکل ۳۴ـ۲۳ حامل جریان i به سمت راست است که برحسب زمان به‌صورت خطی کاهش پیدا می‌کند. در زمان t_r جریان صفر می‌شود، و سپس در جهت دیگر به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. جهت جریان القایی در حلقهٔ سیم کدام است؟

(الف) ساعتگرد (ب) پادساعتگرد

(ج) جریان القایی در یک جهت برقرار می‌شود، ولی در زمان t_r متوقف می‌شود و سپس در جهت مخالف جریان پیدا می‌کند.

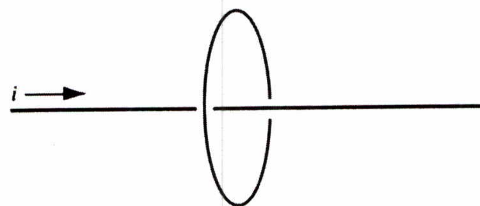
(د) هیچ جریان القایی وجود ندارد.

۱۰. سیم بلند و مستقیم شکل ۳۴ـ۲۴ حامل جریان i به سمت راست است که برحسب زمان افزایش پیدا می‌کند. جهت جریان القایی در حلقهٔ سیم دایره‌ای کدام است؟ این حلقهٔ سیم در صفحه‌ای عمود بر سیم قرار دارد.

(الف) اگر از طرف راست نگاه کنیم، جریان القایی ساعتگرد است.

(ب) اگر از طرف راست نگاه کنیم، جریان القایی پادساعتگرد است.

(ج) هیچ جریان القایی وجود ندارد.



شکل ۳۴ـ۲۴ پرسش چندگزینه‌ای ۱۰.

۳۴ـ۴ نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی

۱۱. باز هم سیم بلند و مستقیم و حلقه‌ای شکل ۳۴ـ۲۳ را درنظر بگیرید. سیم حامل جریان ثابت i به سمت راست است.

(۱) حلقه مستقیماً به‌وسیلهٔ یک عامل خارجی به سمت بالا کشیده می‌شود. جهت جریان القایی در حلقه (اگر جریانی وجود دارد) کدام است؟

(الف) ساعتگرد (ب) پادساعتگرد

(ج) هیچ جریان القایی وجود ندارد.

(۲) وقتی که حلقه توسط عامل خارجی به سمت بالا کشیده می‌شود، جهت نیروی مغناطیسی (اگر چنین نیرویی وجود دارد) وارد بر حلقه کدام است؟

(الف) بالا (ب) پایین (ج) چپ

(د) هیچ نیروی مغناطیسی وجود ندارد.

(۳) اگر عامل خارجی حلقه را به موازات سیم به سمت چپ بکشد، جهت جریان القایی در حلقه (اگر چنین جریانی وجود دارد) کدام است؟

(الف) ساعتگرد (ب) پادساعتگرد

(ج) هیچ جریان القایی وجود ندارد.

۳۴ـ۵ مولدها و موتورها

۱۲. شخصی برای روشن‌کردن یک لامپ با مقاومت ثابت از یک مولد با هندل دستی استفاده می‌کند. وقتی که آهنگ هندل‌زدن شخص کم می‌شود، کدام‌یک از کمیتهای زیر کاهش می‌یابد؟

(الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی (ب) جریان (ج) بسامد

(د) دو مورد از موارد بالا (هـ) هر سه مورد بالا

۱۳. دینام دوچرخه‌ای را در نظر بگیرید که به یک چرخ چسبیده و به یک لامپ با مقاومت ثابت متصل شده است. اگر سرعت رکاب‌زدن دو برابر شود، توان خروجی لامپ به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

(الف) ثابت می‌ماند. (ب) دو برابر می‌شود.

(ج) با مضرب چهار افزایش پیدا می‌کند.

(د) با مضرب هشت افزایش می‌یابد.

۱۴. موتورالکتریکی، هنگامی که متوقف می‌شود مقاومت مؤثر بیشتری دارد یا زمانی که می‌چرخد؟

(الف) وقتی می‌چرخد. (ب) وقتی متوقف می‌شود.

(ج) مقاومت مؤثر در هر دو حالت یکسان است.

۱۵. اگر همهٔ عاملهای دیگر یکسان باشند، احتمال سوختن استارت اتومبیل شما به هنگامی که باتری زیادتر از حد باردار شده بیشتر است یا وقتی که باتری بار کمتری دارد؟

(الف) باتری بیش از حد باردار شده باشد.

(ب) باتری به اندازهٔ کافی باردار نشده باشد.

(ج) بار باتری در اینجا تفاوتی به‌وجود نمی‌آورد.

۳۴ـ۶ میدانهای الکتریکی القایی

۱۶. میدان مغناطیسی در ناحیه‌ای از فضا با عبارت $\overrightarrow{\mathrm{B}} = (۰٫۰۰۱\,\mathrm{T/s^۲})t^۲\hat{\mathrm{i}}$ در بازهٔ زمانی $-۲\,\mathrm{s} \leq t \leq ۲\,\mathrm{s}$ مشخص شده است. در زمان $t = ۰\,\mathrm{s}$ جهت میدان الکتریکی القایی کدام است؟

(الف) موازی با محور x (ب) موازی با محور y

(ج) میدان الکتریکی به‌صورت دایره‌هایی است که مرکز آنها روی محور x است.

(د) در زمان $t = ۰$ هیچ میدان الکتریکی وجود ندارد.

۱۷. جریان در یک سیملولهٔ بینهایت بلند، برحسب زمان، به‌صورت خطی افزایش می‌یابد.

(۱) میدان الکتریکی در داخل سیملوله به‌صورت زیر است:

(الف) دایره‌هایی که مرکز آنها روی محور سیملوله است.

(ب) موازی با محور سیملوله.

(ج) به‌صورت شعاعی برونسو از محور استوانه.

(د) صفر.

(۲) اندازهٔ میدان الکتریکی در خارج از سیملوله چنین است.

(الف) یکنواخت و غیرصفر.

(ب) متقارن شعاعی، که با دور شدن از سیملوله کاهش می‌یابد.

(ج) متقارن شعاعی، که با دور شدن از سیملوله افزایش می‌یابد.

(د) صفر.

۱۸. یک سیم بلند و مستقیم حامل جریانی است که برحسب زمان به‌صورت خطی کاهش پیدا می‌کند. جهت میدان الکتریکی القایی در خارج سیم کدام است؟

(الف) موازی با جریان

(ب) در جهت مخالف جریان

(ج) شعاعی و برونسو از سیم

(د) شعاعی و درونسو به سیم

(هـ) در خارج از سیم هیچ‌گونه میدان الکتریکی القایی وجود ندارد.

۳۴ـ۷ القایش و حرکت نسبی

پرسشها

۱. نشان دهید که: ثانیه / وبر ۱ = ولت ۱.

۲. آیا نیروهای محرکهٔ الکتریکی القایی و جریانهای القایی در حلقهٔ رسانا با نیروهای محرکهٔ الکتریکی و جریانهایی که توسط باتری در آن حلقه به‌وجود می‌آید هیچ‌گونه تفاوتی دارند؟

۳. آیا اندازهٔ ولتاژ القاشده در پیچه‌ای که در آن آهنربایی حرکت می‌کند تحت تأثیر شدت میدان آهنربا قرار می‌گیرد؟ اگر پاسخ شما مثبت است، در این‌باره توضیح دهید.

۴. به زبان ساده تفاوت بین میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ و شار میدان مغناطیسی، یعنی Φ_B، را تشریح کنید. آیا این کمیتها برداری‌اند یا نرده‌ای؟ هر یک از این کمیتها را برحسب چه یکاهایی می‌توان بیان کرد؟ این یکاها چه ارتباطی با هم دارند؟ آیا یکی از یا هر دوی (یا هیچ‌کدام) این کمیتها ویژگی نقطهٔ معینی از فضا هستند؟

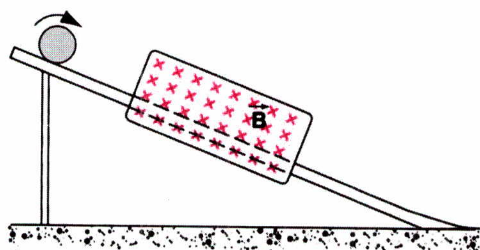
۵. آیا با اعمال میدان مغناطیسی می‌توان یک ذرهٔ باردار ساکن را به حرکت درآورد؟ اگر پاسخ منفی است، توضیح دهید که چرا نه؟ اگر پاسخ مثبت است، توضیح دهید چگونه؟ در این خصوص هم میدانهای پایا و هم میدانهای متغیر برحسب زمان را بررسی کنید.

۶. در قانون القای فاراده، آیا نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی به مقاومت مدار بستگی دارد؟ اگر پاسخ مثبت است، توضیح دهید چگونه؟

۷. یک آهنربای میله‌ای را در امتداد محور یک لولهٔ مسی دراز رها می‌کنید. حرکت آهنربا و تبادل انرژی بین این دو را توصیف کنید. مقاومت هوا را نادیده بگیرید.

۸. با یک حلقهٔ فلزی بازی می‌کنید و آن را، مطابق شکل ۳۴ـ۹، در یک میدان مغناطیسی جلو و عقب می‌برید. چگونه بدون بازرسی دقیق می‌توان گفت که این حلقه کامل است یا یک بریدگی ریز دارد، که سبب نارسانایی آن می‌شود؟

۹. در شکل ۳۴ـ۲۵ سطح شیبداری را نشان داده‌ایم که در بخشی از طول آن یک میدان مغناطیسی قوی وجود دارد. یک قرص مسی را در این مسیر می‌غلتانیم. حرکت این قرص را وقتی از بالای سطح به پایین آن می‌غلتد توصیف کنید.



شکل ۳۴ـ۲۵ پرسش ۹.

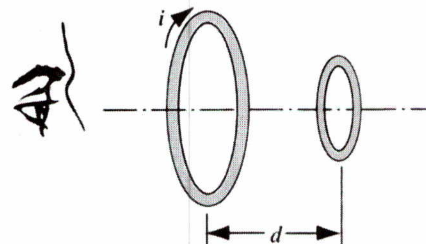
۱۰. در شکل ۳۴ـ۲۶ یک حلقهٔ مسی را نشان داده‌ایم که به‌وسیلهٔ دو رشته نخ از سقف آویخته شده است. به دقت بگویید که چگونه می‌توان به‌طور مؤثر از یک آهنربای میله‌ای برای به حرکت درآوردن این حلقه و تاب‌خوردن آن استفاده کرد.



شکل ۳۴ـ۲۶ پرسش ۱۰.

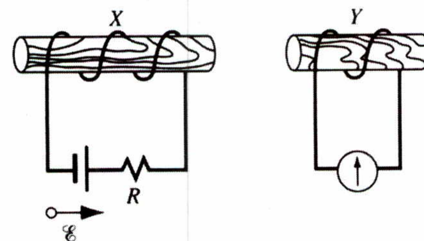
۱۱. آیا وقتی یک آهنربای میله‌ای در داخل یک سیملولهٔ بلند در امتداد محور آن حرکت می‌کند نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در آن به‌وجود می‌آورد؟ دربارهٔ پاسخ خود توضیح دهید.

۱۲. دو حلقهٔ رسانا راکه در برابر هم و به فاصلهٔ d از یکدیگر قرارگرفته در شکل ۳۴ـ۲۷ نشان داده‌ایم. ناظری در امتداد محور مشترک آنها از چپ به راست نگاه می‌کند. ناگهان جریان ساعتگرد i به‌وسیلهٔ باتریی که در شکل نشان نداده‌ایم در حلقهٔ بزرگتر برقرار می‌شود. (الف) جهت جریان القایی در حلقهٔ کوچکتر کدام است؟ (ب) جهت نیرویی که (اگر چنین نیرویی وجود داشته باشد) به حلقهٔ کوچکتر وارد می‌شود کدام است؟



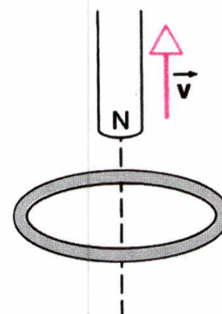
شکل ۳۴ـ۲۷ پرسش ۱۲.

۱۳. جهت جریان القایی در پیچهٔ y شکل ۳۴ـ۲۸ وقتی (الف) پیچهٔ Y به پیچهٔ X نزدیک می‌شود و (ب) جریان در پیچهٔ X کاهش می‌یابد، ولی موقعیت نسبی پیچه‌ها تغییر نمی‌کند، کدام است؟



شکل ۳۴ـ۲۸ پرسش ۱۳.

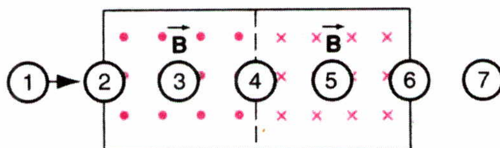
۱۴. قطب شمال یک آهنربا، مطابق شکل ۳۴ـ۲۹، از یک حلقهٔ



شکل ۳۴ـ۲۹ پرسش ۱۴.

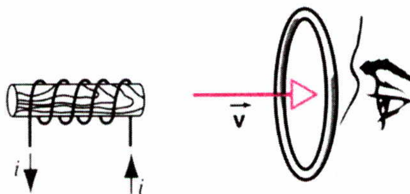
مسی دور می‌شود. در بخشی از حلقه که نسبت به خواننده در دورترین فاصله قرار دارد، جهت جریان کدام است؟

۱۵. یک حلقهٔ دایره‌ای با سرعتی ثابت از دو ناحیه عبور می‌کند که در آنها، مطابق شکل ۳۴ـ۳۰، میدانهای مغناطیسی یکنواخت با اندازهٔ یکسان ولی در جهتهای مخالف یکدیگر برقرار است. در کدام‌یک از هفت موقعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۴ـ۳۰، جریان القایی (الف) ساعتگرد، (ب) پادساعتگرد، و (ج) صفر خواهد بود؟



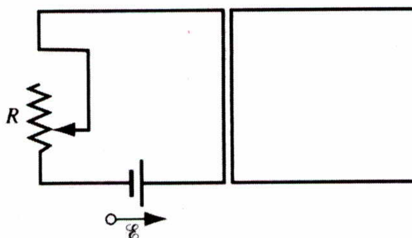
شکل ۳۴ـ۳۰ پرسش ۱۵.

۱۶. سیملولهٔ کوتاهی که حامل جریانی پایاست را، مطابق شکل ۳۴ـ۳۱، به حلقهٔ رسانایی نزدیک می‌کنیم. اگر شخصی، مطابق شکل، به حلقه نگاه کند جهت جریان القایی را چگونه می‌بیند؟



شکل ۳۴ـ۳۱ پرسش ۱۶.

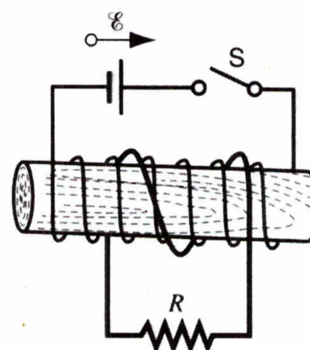
۱۷. در مدار سمت چپ شکل ۳۴ـ۳۲ مقاومت R را با آهنگ ثابتی افزایش می‌دهیم. جهت جریان القایی در مدار سمت راست کدام است؟



شکل ۳۴ـ۳۲ پرسش ۱۷.

۱۸. جهت جریان القایی در مقاومت R شکل ۳۴ـ۳۳ در حالتهای (الف) بلافاصله پس از بسته شدن کلید S، (ب) مدتی پس از آنکه کلید S بسته شد، و (ج) بلافاصله پس از آنکه کلید S باز شد، کدام است؟ (د) وقتی کلید S برای مدتی بسته باقی ماند، خطهای میدان

از کدام سر پیچهٔ بلندتر خارج می‌شوند؟ در واقع این سر عملاً قطب شمال پیچه است. (هـ) چگونه الکترونهای رسانش موجود در پیچه‌ای که شامل مقاومت R است از وجود شار در داخل پیچهٔ بلندتر با خبر می‌شوند؟ چه چیزی واقعاً باعث حرکت آنها می‌شود؟

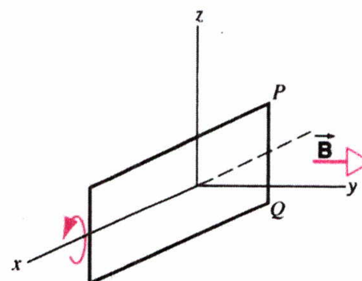


شکل ۳۴ـ۳۳ پرسش ۱۸.

۱۹. آیا جریان القایی هرگز می‌تواند یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ایجاد کند که هم‌جهت با میدانی باشد که جریان را القا کرده است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

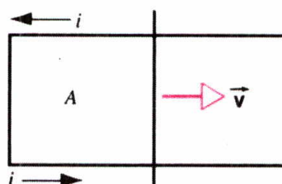
۲۰. چگونه می‌شود تمام روشهای تعیین جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را در یک گزاره خلاصه کرد؟

۲۱. حلقهٔ سیم شکل ۳۴ـ۳۴ با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور x می‌چرخد. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در جهت y مثبت برقرار است. برای چه بخشهایی از چرخش، جریان القایی در حلقه (الف) در جهت از P به Q، (ب) در جهت از Q به P، و (ج) صفر است؟ این محورها را برای وقتی که جهت چرخش برخلاف جهتی است که در شکل نشان داده‌شده، تکرار کنید.



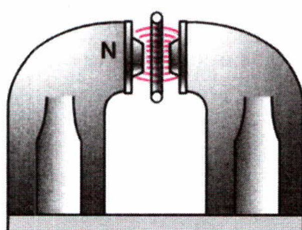
شکل ۳۴ـ۳۴ پرسش ۲۱.

۲۲. در شکل ۳۴ـ۳۵، قطعه سیم مستقیم متحرک با سرعت ثابت $\vec{v}$ به طرف راست در حرکت است. یک جریان القایی در جهت نشان داده‌شده در شکل پدیدار می‌شود. جهت میدان مغناطیسی یکنواخت (که فرض می‌شود ثابت و عمود بر صفحهٔ شکل باشد) در ناحیهٔ A کدام است؟



شکل ۳۴ـ۳۵ پرسش ۲۲.

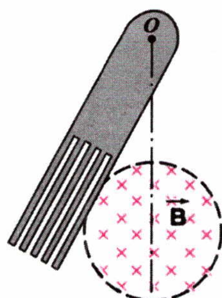
۲۳. حلقهٔ رسانای شکل ۳۴ـ۳۶ را با بالا کشیدن از یک آهنربای دائمی خارج می‌کنیم. (الف) جهت جریان القایی کدام است؟ (ب) آیا برای بالاکشیدن حلقه، نیرویی مورد نیاز است؟ (وزن حلقه را نادیده بگیرید.) (ج) آیا کل انرژی داخلی تولیدشده به مدت زمانی که طول می‌کشد تا حلقه را از آهنربا خارج کنیم بستگی دارد؟



شکل ۳۴ـ۳۶ پرسش ۲۳.

۲۴. یک حلقهٔ بستهٔ تخت در میدان مغناطیسی یکنواخت قرارگرفته است. به چه طریق می‌توان حلقه را بدون القا کردن نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکت داد؟ هر دو نوع حرکت انتقالی و دورانی را در نظر بگیرید.

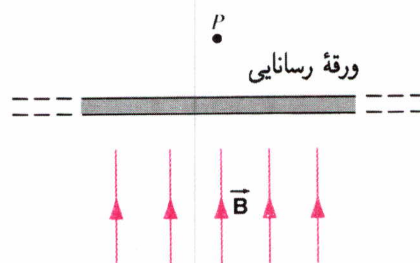
۲۵. در شکل ۳۴ـ۳۷ یک نوار مسی را به‌صورت یک آونگ، از نقطهٔ O آویخته‌ایم. این آونگ می‌تواند آزادانه در داخل یک میدان مغناطیسی که عمود بر صفحهٔ شکل است تاب بخورد. اگر این نوار،



شکل ۳۴ـ۳۷ پرسش ۲۵.

مطابق شکل، شیارهایی داشته باشد، می‌تواند در میدان مغناطیسی تاب بخورد. اگر یک نوار بدون شیار را جایگزین کنیم، حرکت به‌سرعت میرا می‌شود (میرایی مغناطیسی). مشاهدات خودتان را تشریح کنید. (راهنمایی: از قانون لنز استفاده کنید؛ مسیرهایی را که حاملهای بار در نوار برای مقابله با حرکت باید بپیمایند، در نظر بگیرید.)

۲۶. ورقهٔ رسانایی در نظر بگیرید که، مطابق شکل ۳۴ـ۳۸، عمود بر میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ قرارگرفته است. (الف) اگر $\vec{\mathbf{B}}$ ناگهان تغییر کند، تغییرات کامل $\vec{\mathbf{B}}$ فوراً در نقطه‌های نزدیک به نقطهٔ P آشکار نمی‌شود (حفاظ یا سپر الکترومغناطیسی). در این‌باره توضیح دهید. (ب) اگر مقاومت ویژهٔ این صفحه صفر باشد، هرگز در نقطهٔ P به تغییر میدان پی نمی‌بریم. در این باره توضیح دهید. (ج) اگر میدان $\vec{\mathbf{B}}$ به‌صورت دوره‌ای با بسامد زیاد تغییر کند و رسانا از ماده‌ای با مقاومت ویژهٔ کم ساخته شده باشد، ناحیهٔ مجاور P تقریباً به‌طورکامل در برابر تغییرهای شار محافظت شده است. در این باره توضیح دهید. (د) چرا این رسانا برای میدانهای مغناطیسی استاتیکی حفاظ مؤثری نیست؟



شکل ۳۴ـ۳۸ پرسش ۲۶.

۲۷. (الف) آیا در شکل ۳۴ـ۱۵(ب)، لازم است که دایرهٔ به شعاع r یک حلقهٔ رسانا باشد تا $\vec{\mathbf{E}}$ و $\mathscr{E}$ وجود داشته باشند؟ (ب) اگر دایرهٔ به شعاع r هم‌مرکز نبود (مثلاً، اندکی به طرف چپ جابه‌جا شده بود) آیا $\mathscr{E}$ تغییر می‌کرد؟ آیا شکل $\vec{\mathbf{E}}$ در گرداگرد دایره تغییر می‌کرد؟ (ج) آیا برای یک دایرهٔ هم‌مرکز با شعاع r و شرط $r > R$، نیروی محرکهٔ الکتریکی وجود دارد؟ آیا میدانهای الکتریکی وجود دارند؟

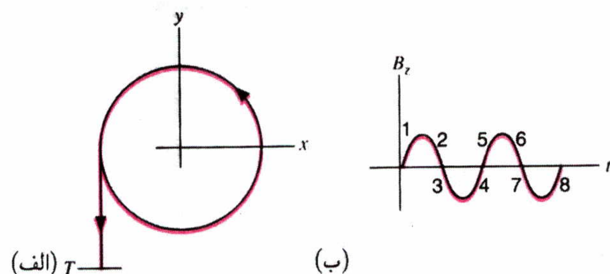
۲۸. یک حلقهٔ مسی و یک حلقهٔ چوبی با ابعاد یکسان را چنان قرار داده‌ایم که شار مغناطیسی متغیر یکسانی از داخل آنها می‌گذرد. میدانهای الکتریکی القاشده در دو حلقه را با هم مقایسه کنید.

۲۹. یک هواپیما بر فراز آلاسکا، جایی که میدان مغناطیسی زمین یک مؤلفهٔ بزرگ روبه پایین دارد، هم‌تراز با زمین در پرواز است. نوک کدام‌یک از بالهای این هواپیما (راست یا چپ) الکترون بیشتری دارد؟

۳۰. در شکل ۳۴ـ۱۵(د)، چگونه نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در مسیرهای ۱ و ۲ می‌تواند یکسان باشد؟ میدانهای الکتریکی القایی در حوالی مسیر ۱ بسیار ضعیف‌تر از این میدانها در نزدیکی مسیر ۲ هستند؛ که این مطلب را فاصلهٔ بین خطهای میدان نشان می‌دهد. به شکل ۳۴ـ۱۷ نیز نگاه کنید.

۳۱. نشان دهید که در بتاترون شکل ۳۴ـ۱۸، جهت خطوط $\vec{\mathbf{B}}$ به‌درستی ترسیم شده است تا با جهت چرخش الکترونها سازگار باشد.

۳۲. در شکل ۳۴ـ۳۹(الف)، نمای از بالای مدار یک الکترون را در بتاترونی نشان داده‌ایم. الکترونها در یک مدار دایره‌ای در صفحهٔ xy شتاب داده می‌شوند و سپس از بتاترون بیرون کشیده می‌شوند تا با هدف T برخورد کنند. میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ در امتداد محور z قرار دارد (جهت مثبت محور z به سمت بیرون از صفحهٔ شکل است). میدان مغناطیسی B_z، مطابق شکل ۳۴ـ۳۹(ب)، برحسب زمان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند. به خاطر داشته باشید که میدان مغناطیسی باید (۱) الکترونها را در مسیر دایره‌ای آنها هدایت کند و (۲) میدان الکتریکی به‌وجود آورد که الکترونها را شتاب دهد. کدام ربع چرخه(ها) در شکل ۳۴ـ۳۹(ب)، (الف) برای حالت (۱)، (ب) برای حالت (۲)، و (ج) برای عملکرد بتاترون مناسب است؟



شکل ۳۴ـ۳۹ پرسش ۳۲.

۳۳. در بتاترون شکل ۳۴ـ۱۸، چرا هستهٔ آهنی آهنربا ورقه‌ورقه ساخته می‌شود و نه به‌صورت یک قطعه فلز یکپارچه، مانند آنچه برای سیکلوترون بخش ۳۲ـ۳ مورد استفاده قرار گرفت؟

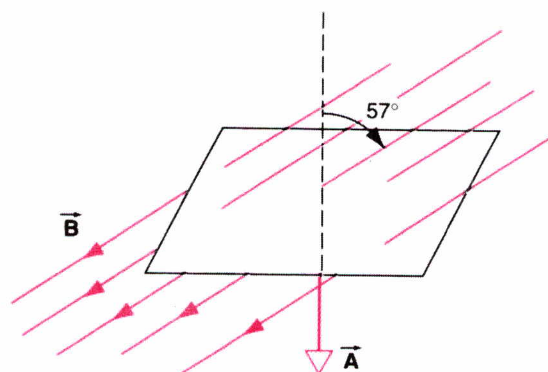
۳۴. در شکل ۳۴ـ۱۹(الف) می‌بینیم که نیروی $(F_B \cos\theta)$ بر حاملهای بار موجود در شاخهٔ سمت چپ حلقه وارد می‌شود. ولی، اگر قرار است که جریان پیوسته‌ای در حلقه برقرار باشد، که هست، باید نوعی نیرو در سه شاخهٔ دیگر حلقه بر حاملهای بار اثر کند تا همان سرعت سوق v_d را در این شاخه‌ها حفظ کند. منشأ این نیرو کدام است؟ (راهنمایی: فرض کنید که تنها شاخهٔ سمت چپ حلقه رسانا باشد و سه شاخهٔ دیگر نارسانا باشند. آیا در این صورت بار مثبت در نیمهٔ بالایی شاخهٔ چپ و بار منفی در نیمهٔ پایینی آن انباشته نخواهد شد؟)

تمرینها

۳۴ـ۱ آزمایشهای فاراده

۳۴ـ۲ قانون القای فاراده

۱. در نقطه‌ای واقع در نیمکرهٔ شمالی، شدت میدان مغناطیسی زمینی $۴۲\mu T$ و جهت آن به طرف پایین با زاویهٔ °۵۷ نسبت به امتداد قائم است. شاری که از یک سطح افقی به مساحت $۲٫۵\,\mathrm{m}^۲$ می‌گذرد محاسبه کنید؛ نگاه کنید به شکل ۳۴ـ۴۰.



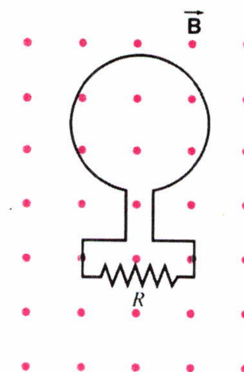
شکل ۳۴ـ۴۰ تمرین ۱.

۲. قطر یک آنتن دایره‌ای UHF تلویزیون برابر ۱۱٫۲ cm است. میدان مغناطیسی یک سیگنال TV بر سطح حلقه عمود است و در لحظه‌ای از زمان اندازهٔ آن با آهنگ ۱۵۷ mT/s تغییر می‌کند. میدان مغناطیسی یکنواخت است. نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده در آنتن را بیابید.

۳۴ـ۳ قانون لنز

۳. در شکل ۳۴ـ۴۱، شار مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ شکل، به‌صورت زیر افزایش می‌یابد:

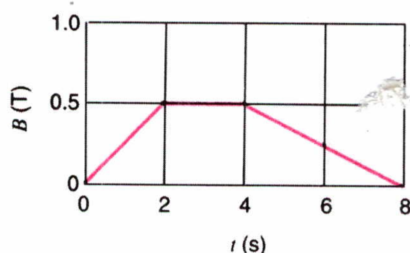
$$\Phi_B = (۶\,\mathrm{mWb/s^۲})t^۲ + (۷\,\mathrm{mWb/s})t$$



شکل ۳۴ـ۴۱ تمرین ۳ و ۱۱.

(الف) در لحظهٔ $t = ۲٫۰\,\mathrm{s}$ قدر مطلق نیروی محرکهٔ الکتریکی القاشده در حلقه چقدر است؟ (ب) جهت جریان در مقاومت کدام است؟

۴. میدان مغناطیسی در یک تک‌حلقه سیم به شعاع ۱۶ cm و مقاومت $۸٫۵\Omega$ برحسب زمان مطابق شکل ۳۴ـ۴۲ تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ الکتریکی حلقه را برحسب زمان محاسبه کنید. بازه‌های زمانی (الف) $t = ۰$ تا $t = ۲\mathrm{s}$؛ (ب) $t = ۲\mathrm{s}$ تا $t = ۴\mathrm{s}$؛ (ج) $t = ۴\mathrm{s}$ تا $t = ۸\mathrm{s}$ را در نظر بگیرید. جهت میدان مغناطیسی (یکنواخت) عمود بر صفحهٔ حلقه است.



شکل ۳۴ـ۴۲ تمرین ۴.

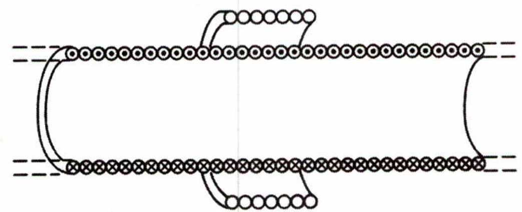
۵. میدان مغناطیسی یکنواختی بر صفحهٔ حلقه‌ای دایره‌ای به قطر ۱۰٫۴ cm از سیم مسی (قطر سیم = ۲٫۵۰ میلی‌متر) عمود است. (الف) مقاومت سیم را محاسبه کنید. (جدول ۲۹ـ۱ را ببینید.) (ب) اگر بخواهیم جریان القایی ۹٫۶۶ A را در حلقه برقرار کنیم، میدان مغناطیسی را باید با چه آهنگی برحسب زمان تغییر دهیم؟

۶. آنتنی حلقه‌ای، به مساحت A و مقاومت R، بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود است. این میدان در بازهٔ زمانی Δt به‌طور خطی به صفر افت می‌کند. رابطه‌ای بیابید که ناپدید شدن انرژی داخلی کل حلقه را نشان دهد.

۷. فرض کنید جریان در سیملولهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۱ تغییر کند، البته نه به‌صورتی که در مثال تغییر می‌کرد بلکه به‌صورت $i = (۳٫۰\,\mathrm{A/s})t + (۱٫۰\,\mathrm{A/s^۲})t^۲$. (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در پیچه را از $t = ۰$ تا $t = ۴\,\mathrm{s}$ رسم کنید. (ب) مقاومت پیچه $۰٫۱۵\Omega$ است. جریان در پیچه در $t = ۲٫۰\,\mathrm{s}$ چقدر است؟

۸. در شکل ۳۴ـ۴۳، یک پیچهٔ ۱۲۰ دور به شعاع ۱٫۸ cm و مقاومت $۵٫۳\Omega$ را بیرون سیملوله‌ای مشابه سیملولهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۱ قرار داده‌ایم. اگر جریان در سیملوله را مطابق مثال ۱ تغییر دهیم، (الف) به هنگام تغییر جریان در سیملوله، چه جریانی در پیچه پدید می‌آید؟ (ب) چگونه

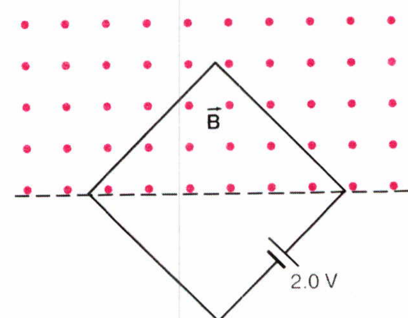
الکترونهای رسانش موجود در پیچه از سیملوله "این پیام را دریافت می‌کنند" که برای برقراری جریان باید به حرکت درآیند؟ به هر حال، شار مغناطیسی کاملاً در قسمت داخلی سیملوله محصور شده است.



شکل ۳۴_۴۳ تمرین ۸.

۹. یک قطعه سیم مسی به طول ۵۲٫۵ cm (قطر ۱٫۱۰ میلی‌متر) در اختیار دارید. آن را به‌صورت حلقهٔ دایره‌ای در می‌آورید و عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت قرار می‌دهید. این میدان برحسب زمان با آهنگ ثابت ۹٫۸۲ mT/s افزایش می‌یابد. انرژی داخلی با چه آهنگی در حلقه تولید می‌شود؟

۱۰. یک حلقهٔ مربعی که طول هر ضلع آن ۲٫۳ m است عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرارگرفته است، به‌طوری که، مطابق شکل ۳۴_۴۴، نصف مساحت آن در داخل میدان است. این حلقه شامل یک باتری ۲٫۰ V با مقاومت داخلی ناچیز است. اگر مقدار میدان برحسب زمان به‌صورت $B = (۰٫۰۴۲\,\mathrm{T}) - (۰٫۸۷\,\mathrm{T/s})t$ تغییر کند، نیروی محرکهٔ الکتریکی کل این مدار چقدر است؟



شکل ۳۴_۴۴ تمرین ۱۰.

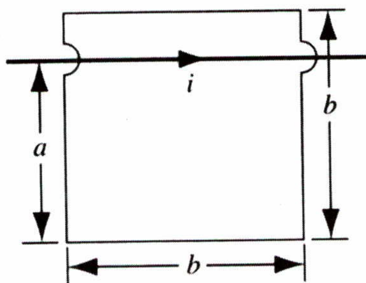
۱۱. در شکل ۳۴_۴۱، فرض کنید شار عبوری از حلقه در لحظهٔ $t = ۰$ برابر $\Phi_B(۰)$ باشد. سپس میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌طور پیوسته ولی نامشخص، هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت، تغییر دهید، به‌طوری که شار عبوری از حلقه در لحظهٔ t برابر با $\Phi_B(t)$ شود. (الف) نشان دهید بار خالص $q(t)$ که در مدت زمان t از مقاومت R می‌گذرد برابر است با

$$q(t) = \frac{۱}{R}[\Phi_B(۰) - \Phi_B(t)]$$

که مستقل از چگونگی تغییر $\vec{\mathbf{B}}$ است. (ب) اگر در حالت خاصی داشته باشیم $\Phi_B(t) = \Phi_B(۰)$، در آن صورت $q(t) = ۰$ است. آیا در این مورد جریان القایی در تمام بازهٔ زمانی از ۰ تا t الزاماً صفر است؟

۱۲. ۱۲۵ دور سیم عایق‌پوش مسی را روی یک هستهٔ استوانه‌ای به سطح مقطع $۱۲٫۲\,\mathrm{cm}^۲$ پیچیده‌ایم. دو سر این سیم را به مقاومتی متصل کرده‌ایم. مقاومت کل مدار $۱۳٫۳\Omega$ است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت و طولی از خارج بر این هسته اعمال می‌شود که در مدت ۲٫۸۸ ms از مقدار ۱٫۵۷ T در یک جهت به ۱٫۵۷ T در جهت مخالف تغییر می‌کند. در این مدت چقدر بار در مدار جریان می‌یابد؟ (راهنمایی: تمرین ۱۱ را ببینید.)

۱۳. برای وضعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۴_۴۵، می‌دانیم $a = ۱۲\,\mathrm{cm}$ و $b = ۱۶\,\mathrm{cm}$ است. جریان در سیم دراز مستقیم از رابطهٔ $i = (۴٫۵\,\mathrm{A/s}^۲)t^۲ - (۱۰\,\mathrm{A/s})t$ به‌دست می‌آید. نیروی محرکهٔ الکتریکی در حلقهٔ مربعی را در $t = ۳٫۰\,\mathrm{s}$ تعیین کنید.



شکل ۳۴_۴۵ تمرین ۱۳.

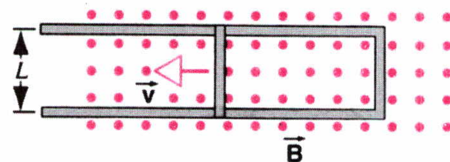
۳۴_۴ نیروی محرکهٔ الکتریکی حرکتی

۱۴. اتومبیلی که طول آنتن رادیوی آن ۱۱۰ cm است با سرعت ۹۰ km/h در ناحیه‌ای سفر می‌کند که در آن شدت میدان مغناطیسی زمین $۵۵\mu T$ است. بیشینهٔ مقدار ممکن نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را تعیین کنید.

۱۵. یک حلقهٔ سیم دایره‌ای به قطر ۱۰ cm را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۰٫۵۰ T طوری قرار داده‌ایم که عمود بر سطح آن با جهت میدان زاویهٔ °۳۰ می‌سازد. این حلقه "طوری کج شده است" که عمود بر سطح آن روی مخروطی حول جهت میدان با بسامد

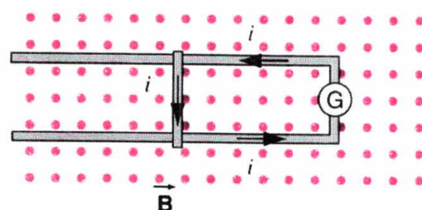
زاویه‌ای ثابت ۱۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد؛ در این فرایند زاویهٔ بین عمود برسطح حلقه و جهت میدان (مساوی ۳۰°) تغییر نمی‌کند. چه نیروی محرکهٔ الکتریکیی در حلقه پدید می‌آید؟

۱۶. شکل ۳۴ـ۴۶ میلهٔ رسانایی به طول L را نشان می‌دهد که روی ریلهای افقی، بدون اصطکاک یک رسانا با سرعت ثابت $\vec{\mathbf{v}}$ کشیده می‌شود. در ناحیه‌ای که میله در آن حرکت می‌کند میدان مغناطیسی قائم یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ برقرار است. فرض کنید $L = ۱۰{,}۸\,\mathrm{cm}$، $v = ۴{,}۸۶\,\mathrm{m/s}$، و $B = ۱{,}۱۸\,\mathrm{T}$ است. (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در میله را معین کنید. (ب) جریان القایی در حلقهٔ رسانا را محاسبه کنید. فرض کنید مقاومت میله برابر $۴۱۵\,\mathrm{m\Omega}$ و مقاومت ریلها ناچیز باشد. (ج) انرژی داخلی میله با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟ (د) نیرویی را مشخص کنید که برای حفظ حرکت میله، باید یک عامل خارجی به آن وارد کند. (هـ) این نیرو با چه آهنگی روی میله کار انجام می‌دهد؟ این پاسخ را با پاسخ قسمت (ج) مقایسه کنید.



شکل ۳۴ـ۴۶ تمرین ۱۶.

۱۷. در شکل ۳۴ـ۴۷، میلهٔ رسانایی به جرم m و طول L بدون اصطکاک روی دو ریل افقی می‌لغزد. در ناحیه‌ای که میله می‌تواند حرکت کند میدان مغناطیسی یکنواخت قائم B برقرار است. مولد G جریان i را در مدار برقرار می‌کند که از یک ریل، میلهٔ رسانا، و ریل دیگر می‌گذرد و به مولد باز می‌گردد. دانشجویی از این مولد مراقبت می‌کند و به‌طور پیوسته آن را تنظیم می‌کند به‌طوری که صرف‌نظر از اینکه بار مدار چقدر است، جریان همواره ثابت است. با فرض اینکه میله در $t = ۰$ ساکن باشد، سرعت آن را برحسب زمان به‌دست آورید.



شکل ۳۴ـ۴۷ تمرین ۱۷ و ۱۸.

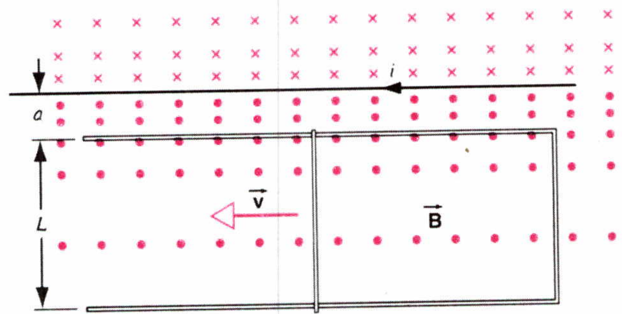
۱۸. در تمرین ۱۷ (شکل ۳۴ـ۴۷ را ببینید) به‌جای مولد G یک باتری می‌گذاریم که نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ را تأمین می‌کند. (الف) نشان دهید که اکنون سرعت میله به یک سرعت حدی ثابت $\vec{\mathbf{v}}$ میل می‌کند. اندازه و جهت این سرعت حدی را معین کنید. (ب) در هنگام رسیدن به این سرعت حدی، چه جریانی از میله می‌گذرد؟ (ج) این وضعیت و وضعیت مطرح‌شده در تمرین ۱۷ را از دیدگاه تبادل انرژی بررسی کنید.

۱۹. یک آهنربای میله‌ای کوچک را به سرعت از یک حلقه، در امتداد محور آن می‌گذرانیم. مقدارهای زیر را به‌طور کیفی ترسیم کنید: (الف) جریان القایی و (ب) آهنگ تولید انرژی داخلی برحسب فاصله از مرکز آهنربا. فرض کنید ابتدا قطب شمال آهنربا وارد حلقه می‌شود و آهنربا با سرعت ثابتی حرکت می‌کند. در رسم نمودار مربوط به جریان القاشده توجه کنید که اگر در امتداد مسیر حرکت آهنربا به حلقه نگاه کنیم، چنانچه جریان ساعتگرد باشد، آن را مثبت درنظر می‌گیریم.

۲۰. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴ـ۴ فرض کنید $B = ۱{,}۲\,\mathrm{T}$ و $R = ۵{,}۳\,\mathrm{cm}$ است. اگر داشته باشیم $\mathscr{E} = ۱{,}۴\,\mathrm{V}$، نقطهٔ واقع در انتهای میلهٔ چرخان چه شتابی خواهد گرفت؟

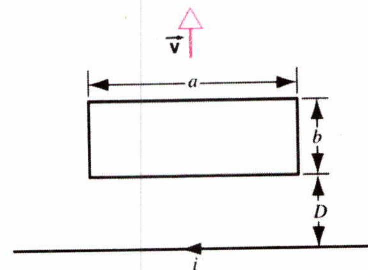
۲۱. در محل معینی از زمین، شدت میدان مغناطیسی زمین $B = ۵۹\mu\mathrm{T}$، جهت آن به طرف پایین است و با افق زاویهٔ ۷۰° می‌سازد. یک پیچهٔ دایره‌ای تخت افقی به شعاع $۱۳\,\mathrm{cm}$ شامل ۹۵۰ دور سیم‌پیچ و مقاومت کل ۸۵Ω است. پیچه را حول یک قطرش نیم‌دور می‌چرخانیم به‌طوری که مجدداً در حالت افقی قرار بگیرد. در این چرخش چه مقدار بار در پیچه جاری می‌شود؟ (راهنمایی: تمرین ۱۱ را ببینید.)

۲۲. در شکل ۳۴ـ۴۸ میله‌ای به طول L را نشان داده‌ایم که با سرعت ثابت v روی ریلهای رسانای افقی به حرکت درآمده است. در این مورد میدان مغناطیسی که میله در آن حرکت می‌کند یکنواخت نیست بلکه جریان i در یک سیم دراز موازی با ریلها آن را تولید کرده است. فرض کنید $v = ۴{,}۸۶\,\mathrm{m/s}$، $a = ۱۰{,}۲\,\mathrm{mm}$، $L = ۹{,}۸۳\,\mathrm{cm}$، و $i = ۱۱۰\,\mathrm{A}$ است. (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در میله را محاسبه کنید. (ب) جریان در حلقهٔ رسانا چقدر است؟ فرض کنید مقاومت میله $۴۱۵\,\mathrm{m\Omega}$ و مقاومت ریلها ناچیز است. (ج) انرژی داخلی با چه آهنگی در میله افزایش می‌یابد؟ (د) برای تداوم حرکت میله، عامل خارجی باید چه نیرویی به آن وارد کند؟ (هـ) این عامل خارجی با چه آهنگی روی میله کار انجام می‌دهد؟ این پاسخ را با پاسخ قسمت (ج) مقایسه کنید.



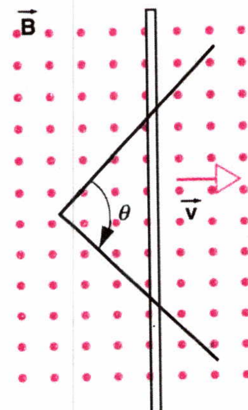
شکل ۳۴ـ۴۸ تمرین ۲۲.

۲۳. یک حلقه سیم مستطیل‌شکل به طول a، عرض b، و مقاومت R، مطابق شکل ۳۴ـ۴۹، در نزدیکی یک رشته سیم بینهایت بلند، حامل جریان i قرار دارد. فاصلهٔ رشته سیم از حلقه برابر D است. (الف) اندازهٔ شار مغناطیسی که از حلقه می‌گذرد و (ب) جریان تولیدشده در حلقه را وقتی که با سرعت v از حلقه دور می‌شود، معین کنید.



شکل ۳۴ـ۴۹ تمرین ۲۳.

۲۴. دو ریل مستقیم رسانا را از یک انتها به‌هم وصل می‌کنیم، به‌طوری که با هم زاویهٔ θ تشکیل دهند. یک میلهٔ رسانا با این دو ریل در تماس است و مثلث متساوی‌الساقینی را به‌وجود می‌آورد. این میله در لحظهٔ $t = ۰$ از رأس مثلث شروع به حرکت می‌کند و با سرعت ثابت $\vec{v}$، مطابق شکل ۳۴ـ۵۰، به طرف راست حرکت می‌کند. میدان



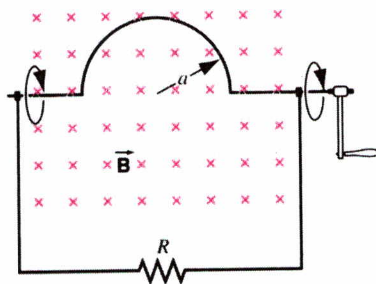
شکل ۳۴ـ۵۰ تمرین ۲۴.

مغناطیسی $\vec{B}$ به طرف خارج از صفحهٔ شکل برقرار است. (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را برحسب زمان مشخص کنید. (ب) اگر داشته باشیم $\theta = ۱۱۰^\circ$، $B = ۳۵۲\,\text{mT}$، و $v = ۵٫۲۱\,\text{m/s}$، چه موقع نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی برابر ۵۶٫۸V می‌شود؟

۳۴ـ۵ مولدها و موتورها

۲۵. آرمیچر یک موتور شامل ۹۷ دور سیم است. سطح مقطع این آرمیچر $۱۹۰\,\text{cm}^۲$ است و در میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت ۰٫۳۳T می‌چرخد. به این موتور اختلاف پتانسیل ۲۴V اعمال شده است. اگر هیچ باری به آن متصل نباشد و اصطکاک را هم نادیده بگیریم، سرعت چرخش آن را در حالت تعادل معین کنید.

۲۶. قطعه سیم سفتی به‌صورت نیمدایره به شعاع a خم شده است و ما آن را با بسامد f در میدان مغناطیسی یکنواختی، مطابق شکل ۳۴ـ۵۱ می‌چرخانیم. (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در حلقه چقدر است؟



شکل ۳۴ـ۵۱ تمرین ۲۶.

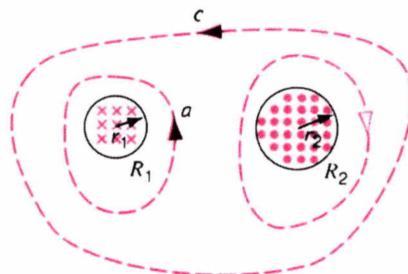
۲۷. مولدی از ۱۰۰ دور سیم تشکیل شده است که به شکل مستطیل به ابعاد ۵۰ cm در ۳۰ cm درآمده و به‌طورکامل در میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت $B = ۳٫۵\,\text{T}$ قرار گرفته است. اگر این قاب را با سرعت ۱۰۰۰ دور در دقیقه حول محوری عمود بر جهت $\vec{B}$ بچرخانیم، بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌دست‌آمده چقدر است؟

۲۸. طراحی مولدی به شما واگذار شده است، که وقتی با سرعت ۶۰ دور بر ثانیه در میدان مغناطیسی به شدت ۰٫۵۰T می‌چرخد، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی با دامنهٔ ۱۵۰ V تولید کند. (الف) اگر شما از یک حلقهٔ تک‌دور استفاده کنید، به چه مساحتی نیاز خواهید داشت؟ (ب) اگر یک پیچه شامل ۱۰۰ دور را مورد استفاده قرار دهید، به چه مساحتی نیاز دارید؟

۳۴ـ۶ میدانهای الکتریکی القایی

۲۹. در شکل ۳۴ـ۵۲ دو ناحیهٔ دایره‌ای $R_۱$ و $R_۲$ را به‌ترتیب با

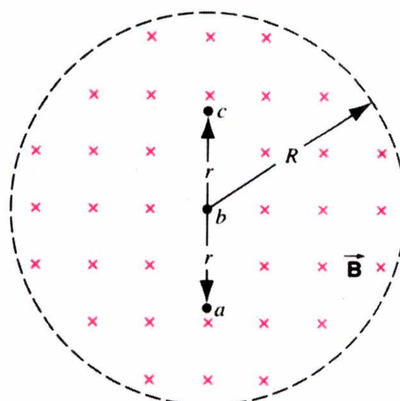
شعاعهای $r_۱ = ۲۱{,}۲\,\text{cm}$ و $r_۲ = ۳۲{,}۳\,\text{cm}$ نشان داده‌ایم. در ناحیهٔ $R_۱$ میدان مغناطیسی یکنواخت $B_۱ = ۴۸{,}۶\,\text{mT}$ به طرف داخل صفحهٔ شکل و در ناحیهٔ $R_۲$ میدان مغناطیسی یکنواخت $B_۲ = ۷۷{,}۲\,\text{mT}$ به طرف خارج از صفحهٔ شکل وجود دارد (کلیهٔ آثار لبه‌ای این میدانها را نادیده می‌گیریم). هر دو میدان با آهنگ $۸{,}۵۰\,\text{mT/s}$ کاهش می‌یابند. انتگرال $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ را برای هر یک از سه مسیر نشان داده‌شده در شکل محاسبه کنید.



شکل ۳۴ـ۵۲ تمرین ۲۹.

۳۰. قطر یک سیملولهٔ بلند $۱۲{,}۶\,\text{cm}$ است. اگر جریان i از سیم‌پیچهای آن بگذرد، میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۲۸{,}۶\,\text{mT}$ در داخل سیملوله به‌وجود می‌آید. با کاهش i، میدان را با آهنگ $۶{,}۵۱\,\text{mT/s}$ کاهش می‌دهیم. اندازهٔ میدان الکتریکی القایی را در (الف) $۲{,}۲۰\,\text{cm}$ و (ب) $۸{,}۲۰\,\text{cm}$ از محور سیملوله محاسبه کنید.

۳۱. در شکل ۳۴ـ۵۳ میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ را نشان داده‌ایم که به فضای استوانه‌ای به شعاع R محدود است. اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ با آهنگ ثابت $۱۰{,}۷\,\text{mT/s}$ کاهش می‌یابد. شتاب لحظه‌ای (اندازه و جهت) الکترونی که در هر یک از نقطه‌های a، b و c قرار دارد چقدر است؟ در این محاسبه‌ها فرض کنید $r = ۴{,}۸۲\,\text{cm}$ باشد. (آثار لبه‌ای میدان



شکل ۳۴ـ۵۳ تمرین ۳۱.

موجود در فراسوی R تا زمانی که تقارن محوری، حول محور قائم بر سطحی که از b می‌گذرد برقرار باشد، تأثیری در پاسخ شما نخواهد داشت.)

۳۲. دراوایل سال ۱۹۸۱ میلادی، آزمایشگاه ملی مغناطیس فرانسیس بیتر در .M.I.T کار با یک آهنربای استوانه‌ای به قطر $۳{,}۳\,\text{cm}$ را آغاز کرد که میدانی به شدت $۳۰\,\text{T}$ تولید می‌کرد. این میدان در آن زمان قوی‌ترین میدان حالت پایای جهان بود. این میدان را می‌توان به‌طور سینوسی با بسامد ۱۵ هرتز بین $۲۹{,}۶\,\text{T}$ و $۳۰{,}۰\,\text{T}$ تغییر داد. در این عمل، بیشینهٔ مقدار میدان الکتریکی القایی در فاصلهٔ شعاعی $۱{,}۶\,\text{cm}$ از محور چقدر است؟ این آهنربا در شمارهٔ اوت سال ۱۹۸۴ مجلهٔ فیزیکس تودی* توصیف شده است.

۳۴ـ۷ القایش و حرکت نسبی

۳۳. (الف) زاویهٔ θ را در شکل ۳۴ـ۱۹ برآورد کنید. به خاطر داشته باشید که معمولاً $v_{\text{d}} = ۴ \times ۱۰^{-۲}\,\text{cm/s}$ است. فرض کنید $v = ۱۵\,\text{cm/s}$ است. (ب) بدیهی است که θ زاویهٔ کوچکی خواهد بود. با این وصف، آیا برای اعتبار استدلالی که در رابطه با این شکل ارائه شد، باید داشته باشیم $\theta \neq ۰$؟

مسئله‌ها

۱. اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ با آهنگ ثابت dB/dt تغییر می‌کند. مقداری مس به جرم m در اختیار دارید که آن را به‌صورت سیمی به شعاع r در می‌آورید و سپس با آن حلقه‌ای به شعاع R می‌سازید. نشان دهید که جریان القایی در حلقه به ابعاد سیم و حلقه بستگی ندارد و اگر فرض کنیم $\vec{\mathbf{B}}$ عمود بر سطح حلقه باشد، این جریان از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

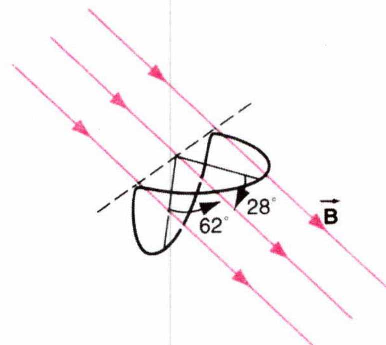
$$i = \frac{m}{۴\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt}$$

که در آن ρ مقاومت ویژه و σ چگالی مس است.

۲. یک حلقهٔ بستهٔ سیمی، متشکل از دو نیمدایرهٔ کاملاً یکسان به شعاع $۳{,}۷\,\text{cm}$ است، که در دو صفحهٔ عمود برهم قرار گرفته‌اند. این حلقه را با تا کردن یک حلقهٔ دایره‌ای در امتداد یکی از قطرهایش طوری درست کرده‌ایم که دو نیمهٔ آن بر هم عمود شوند. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ به شدت $۷۶\,\text{mT}$ عمود بر قطری است که تاشدگی در امتداد آن صورت گرفته است و، مطابق شکل ۳۴ـ۵۴، با صفحه‌های

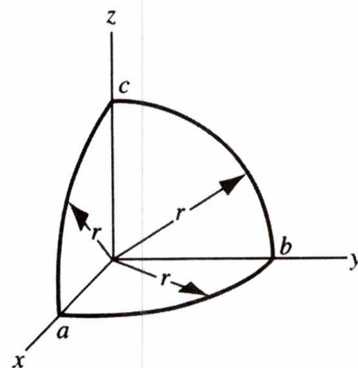
---
* Physics Today

نیمدایره‌ها زاویه‌های ۶۲° و ۲۸° می‌سازد. این میدان مغناطیسی را در بازهٔ ۴٫۵ ms با آهنگ ثابت به صفر کاهش می‌دهیم. نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را معین کنید.



شکل ۳۴ـ۵۴ مسئلهٔ ۲.

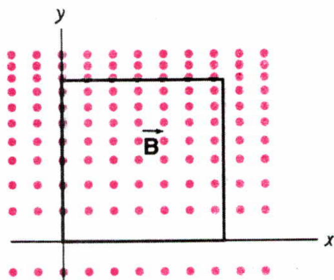
۳. قطعه سیمی را به سه بخش دایره‌ای به شعاع $r =$ ۱۰٫۴ cm، مطابق شکل ۳۴ـ۵۵، خم کرده‌ایم. هر بخش از این سیم یک‌چهارم دایره است، که بخش ab در صفحهٔ xy قرار می‌گیرد، بخش bc در صفحهٔ yz، و بخش ca در صفحهٔ zx. (الف) اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در جهت مثبت x وجود داشته باشد و با آهنگ ثابت ۳٫۳۲ mT/s افزایش یابد، نیروی محرکهٔ الکتریکی تولیدشده در سیم را پیدا کنید. (ب) جهت جریان در شاخهٔ bc کدام است؟



شکل ۳۴ـ۵۵ مسئلهٔ ۳.

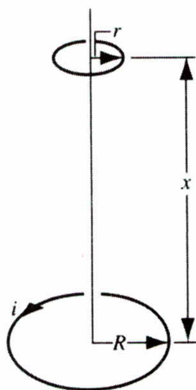
۴. یک رشته سیم رسانا با طول ثابت L را می‌توان به‌صورت N حلقهٔ دایره‌ای پیچید و به عنوان آرمیچر مولد مورد استفاده قرار داد. برای دستیابی به بیشترین مقدار نیروی محرکهٔ الکتریکی، تعداد دور N را چقدر اختیار می‌کنید؟

۵. طول هر ضلع مربع در شکل ۳۴ـ۵۶ برابر ۲٫۰ cm است. در این ناحیه یک میدان مغناطیسی وجود دارد که جهت آن به طرف خارج از صفحهٔ شکل است و اندازهٔ آن از رابطهٔ $B = (۴\,\mathrm{T/m\cdot s^۲})t^۲y$ به‌دست می‌آید. مقدار نیروی محرکهٔ الکتریکی در مربع را در لحظهٔ $t =$ ۲٫۵ s معین کنید و جهت آن را بیابید.



شکل ۳۴ـ۵۶ مسئلهٔ ۵.

۶. در شکل ۳۴ـ۵۷ دو حلقهٔ سیم موازی را که محور مشترک دارند نشان داده‌ایم. حلقهٔ کوچکتر (به شعاع r) در بالای حلقهٔ بزرگتر (به شعاع R)، در فاصلهٔ $x \gg R$ قرار گرفته است. در نتیجه میدان مغناطیسی ناشی از جریان i در حلقهٔ بزرگتر، تقریباً در همه جای حلقهٔ کوچکتر ثابت و مقدار آن با مقدار میدان روی محور برابر است. فرض کنید فاصلهٔ x با آهنگ ثابت $dx/dt = v$ افزایش پیدا می‌کند. (الف) شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور توسط حلقهٔ کوچکتر را برحسب x تعیین کنید. (ب) نیروی محرکهٔ الکتریکیِ ایجادشده در حلقهٔ کوچکتر را محاسبه کنید. (ج) جهت جریان القایی در حلقهٔ کوچکتر را معین کنید.



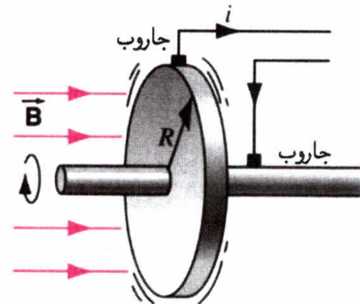
شکل ۳۴ـ۵۷ مسئلهٔ ۶.

۷. شعاع حلقهٔ دایره‌ای که از مادهٔ کشسان رسانای کشیده‌شده‌ای ساخته شده ۱٫۲۳ m است. این حلقه را طوری قرار می‌دهیم که صفحهٔ آن بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت ۷۸۵ mT عمود باشد. وقتی این حلقه رها می‌شود، شعاعش با آهنگ لحظه‌ای ۷٫۵۰ cm/s کاهش پیدا می‌کند. نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در حلقه را در آن لحظه محاسبه کنید.

۸. در شکل ۳۴ـ۵۸ یک "مولد هم‌قطب" را نشان داده‌ایم که چرخانهٔ آن یک قرص توپر رساناست. این ماشین می‌تواند نیروی محرکهٔ الکتریکی بیشتری را نسبت به چرخانه‌های متشکل از حلقه‌های سیمی تولید کند، زیرا می‌تواند، قبل از اینکه نیروهای مرکزگریز باعث گسیختگی آن بشوند، با سرعت زاویه‌ای خیلی زیادی بچرخد. (الف) نشان دهید که نیروی محرکهٔ الکتریکی تولیدشده به‌وسیلهٔ این مولد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

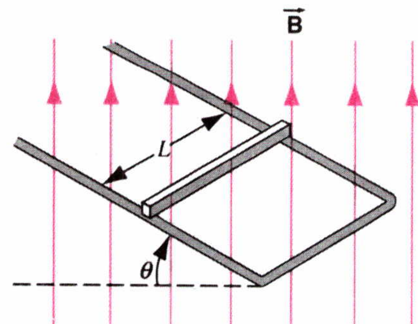
$$\mathscr{E} = \pi f B R^{۲}$$

که در این رابطه، f بسامد چرخش، R شعاع چرخانه، و B میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر سطح چرخانه است. (ب) وقتی جریان خروجی برابر i است، گشتاور نیرویی را که باید موتور گردانندهٔ چرخانه اعمال کند، به‌دست آورید.



شکل ۳۴ـ۵۸ مسئلهٔ ۸.

۹. میله‌ای به طول L، جرم m، و مقاومت R بدون اصطکاک روی دو ریل موازی شیبدار رسانا با مقاومت ناچیز، مطابق شکل ۳۴ـ۵۹، به پایین می‌لغزد. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد دو ریل در قسمت پایین به‌هم متصل شده‌اند و همراه با میله، به عنوان عضو بالایی، حلقهٔ رسانایی را به‌وجود می‌آورند. صفحهٔ ریلها با افق زاویهٔ θ می‌سازد و در آن ناحیه میدان مغناطیسی یکنواخت قائم $\vec{\mathbf{B}}$ برقرار است. (الف)



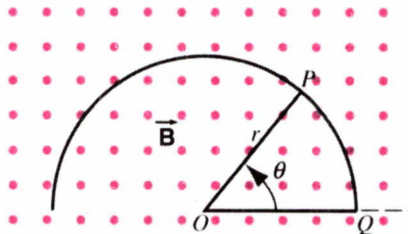
شکل ۳۴ـ۵۹ مسئلهٔ ۹.

نشان دهید که اندازهٔ سرعت حد حالت پایای میله برابر است با

$$v = \frac{mgR}{B^{۲}L^{۲}}\frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}$$

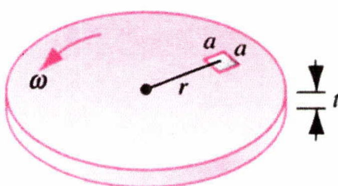
(ب) نشان دهید که آهنگ افزایش انرژی داخلی میله برابر است با آهنگ کاهش انرژی پتانسیل گرانشی آن. (ج) وضعیتی را بررسی کنید که در آن جهت $\vec{\mathbf{B}}$ به طرف پایین است و نه بالا.

۱۰. رشته سیمی با سطح مقطع $۱٫۲\,\text{mm}^{۲}$ و مقاومت ویژهٔ $۱٫۷ \times ۱۰^{-۸}\,\Omega\text{m}$ را مطابق شکل ۳۴ـ۶۰ خم می‌کنیم و به‌صورت کمانی از دایره‌ای به شعاع $r = ۲۴\,\text{cm}$ درمی‌آوریم. یک قطعهٔ مستقیم دیگر از همین سیم، OP، می‌تواند آزادانه حول نقطهٔ O بچرخد و در نقطهٔ P با کمان، یک اتصال لغزان برقرار کند. سرانجام قطعهٔ مستقیم سومی از همین سیم، OQ، مدار را کامل می‌کند. این مجموعه در یک میدان مغناطیسی به شدت $B = ۰٫۱۵\,\text{T}$ قرار دارد که جهت آن به طرف خارج از صفحهٔ شکل است. رشته سیم مستقیم OP از حال سکون از $\theta = ۰$ با شتاب اولیهٔ ثابت $۱۲\,\text{rad/s}^{۲}$ شروع به حرکت می‌کند. (الف) مقاومت حلقهٔ $OPQO$ را برحسب θ تعیین کنید. (ب) شار مغناطیسی گذرنده از حلقه را برحسب θ به‌دست آورید. (ج) به‌ازای چه زاویهٔ θ جریان القایی در حلقه بیشینه است؟ (د) بیشینهٔ جریان القایی در حلقه چقدر است؟



شکل ۳۴ـ۶۰ مسئلهٔ ۱۰.

۱۱. ترمز الکترومغناطیسی "جریان گردابی" از یک قرص با رسانش σ و ضخامت t تشکیل شده است که حول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌چرخد و میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ عمود بر صفحهٔ قرص بر ناحیهٔ کوچکی به مساحت $a^{۲}$ اعمال می‌شود (شکل ۳۴ـ۶۱ را



شکل ۳۴ـ۶۱ مسئلهٔ ۱۱.

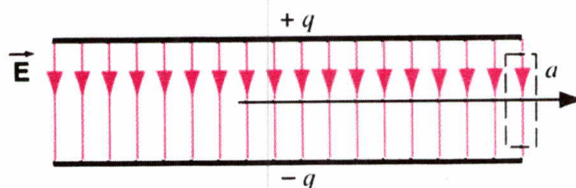
ببینید). اگر مساحت $a^۲$ در فاصلهٔ r از محور قرار داشته باشد، یک رابطهٔ تقریبی برای گشتاور نیرویی به‌دست آورید که حرکت قرص را در لحظه‌ای که سرعت زاویه‌ای آن برابر با ω است بخواهد کُند سازد.

۱۲. یک قطعه سیم ابررسانا به‌صورت حلقه‌ای به شعاع R درآمده است که در آغاز حامل هیچ جریانی نیست. آهنربایی در امتداد محور این حلقه حرکت می‌کند، و شارگذرنده از حلقه به مقدار $\Delta\Phi_B$ تغییر می‌کند. نشان دهید که جریان در حلقه با عبارت زیر مشخص می‌شود:

$$i = \frac{ne^۲a^۲}{۲Rm_e}\Delta\Phi_B$$

که در اینجا $R \gg a$ شعاع سیم است، n چگالی الکترونهای رسانش، و e و m_e، به‌ترتیب، بار الکتریکی و جرم الکترون‌اند.

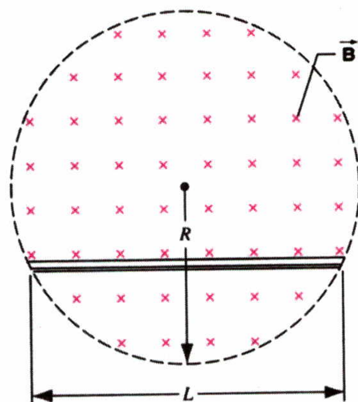
۱۳. ثابت کنید که میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ در خازن باردار با صفحات موازی، وقتی در راستای عمود بر میدان و در امتداد مسیر نشان داده‌شده با پیکان شکل ۳۴ـ۶۲ حرکت کنیم، نمی‌تواند ناگهان به صفر فرو افتد (نقطهٔ a را ببینید). در خازنهای واقعی آثار لبه‌ای خطهای نیرو همواره وجود دارد، یعنی میدان $\vec{\mathbf{E}}$ به‌طور پیوسته و به‌تدریج به صفر نزدیک می‌شود؛ این نتیجه را با مسئلهٔ ۱۱ فصل ۳۳ مقایسه کنید. (راهنمایی: قانون فاراده را برای مسیر مستطیل‌شکل نشان داده‌شده با خط‌چین به‌کار بگیرید.)



شکل ۳۴ـ۶۲ مسئلهٔ ۱۳.

۱۴. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ فضای داخل استوانه‌ای به شعاع R را پر می‌کند. میله‌ای فلزی به طول L را مطابق شکل ۳۴ـ۶۳ در داخل این میدان قرار داده‌ایم. اگر B با آهنگ dB/dt تغییر کند، نشان دهید که نیروی محرکهٔ الکتریکی که به‌وسیلهٔ میدان مغناطیسی متغیر تولید می‌شود و بین دو سر میله اثر می‌کند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathscr{E} = \frac{dB}{dt}\frac{L}{۲}\sqrt{R^۲ - \left(\frac{L}{۲}\right)^۲}$$



شکل ۳۴ـ۶۳ مسئلهٔ ۱۴.

۱۵. در بتاترونی شعاع مدار الکترون ۳۲ cm است و میدان مغناطیسی در محل مدار از رابطهٔ $B_{\text{مدار}} = (۰٫۲۸\,\text{T})\sin(۱۲۰\pi\text{s}^{-۱})t$ به‌دست می‌آید. در بتاترون، مقدار میانگین میدانی که مدار الکترون دربرمی‌گیرد، $B_{\text{میانگین}}$، دوبرابر مقدار میدان در محل مدار الکترون، یعنی $B_{\text{مدار}}$ است. (الف) میدان الکتریکی القایی را که در لحظهٔ $t = ۰$ بر الکترونها اعمال می‌شود محاسبه کنید. (ب) شتاب الکترونها را در این لحظه تعیین کنید. آثار نسبیتی را نادیده بگیرید.

مسئلهٔ کامپیوتری

۱. نتیجهٔ چندین اندازه‌گیری از بیشینهٔ میدان مغناطیسی برحسب شعاع در بتاترون به شرح زیر است:

B (تسلا)	r(cm)	B (تسلا)	r(cm)
۰٫۴۰۹	۸۱٫۲	۰٫۹۵۰	۰
۰٫۴۰۰	۸۳٫۷	۰٫۹۵۰	۱۰٫۲
۰٫۳۸۱	۸۸٫۹	۰٫۹۵۰	۶۸٫۲
۰٫۳۷۲	۹۱٫۴	۰٫۵۲۸	۷۳٫۲
۰٫۳۶۰	۹۳٫۵	۰٫۴۵۱	۷۵٫۲
۰٫۳۴۰	۹۵٫۵	۰٫۴۲۸	۷۷٫۳

با تحلیل نموداری نشان دهید که شرط لازم برای کار بتاترون، که در مسئلهٔ ۱۵ به آن اشاره شد، یعنی $B_{\text{میانگین}} = ۲B_{\text{مدار}}$، در مداری به شعاع $R = ۸۴\,\text{cm}$ برقرار است. (راهنمایی: توجه کنید که

$$B_{\text{میانگین}} = \frac{۱}{\pi R^۲}\int_۰^R B(r)۲\pi r dr$$

و این انتگرال را به‌صورت عددی محاسبه کنید.)

۳۵

خواص مغناطیسی ماده

مواد مغناطیسی در زندگی روزمرهٔ ما هر روز نقش مهم‌تری ایفا می‌کنند. موادی چون آهن، که ممکن است در دماهای معمولی آهنرباهای دائمی باشند، معمولاً در موتورها و مولدهای الکتریکی و نیز برخی از انواع بلندگوها به‌کار می‌روند. برخی مواد دیگر را می‌توان به راحتی "مغناطیده" و "وامغناطیده" کرد؛ این مواد، کاربردهای بسیار گسترده‌ای در ذخیرهٔ اطلاعات در کاربردهایی نظیر نوارهای ضبط مغناطیسی (نوارهای ضبط‌صوت و ویدئو)، دیسکهای کامپیوتری و کارتهای اعتباری (بانکی و تلفنی) یافته‌اند. با این همه، مواد دیگری وجود دارند که شبیه مواد دی‌الکتریک‌اند، به این معنی که در پاسخ به میدان مغناطیسی خارجی، دارای میدان مغناطیسی القایی می‌شوند؛ با حذف میدان خارجی این میدان القایی از بین می‌رود.

در این فصل ساختار داخلی مواد را بررسی می‌کنیم که پدیدآورندهٔ خواص مغناطیسی ماده هستند. نشان خواهیم داد که می‌توان رفتار مواد مغناطیسی مختلف را برحسب گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتمهای منفرد درک کرد. شناخت دقیق خواص مغناطیسی به روشهای مکانیک کوانتومی نیاز دارد که فراتر از سطح این کتاب است، ولی بر پایهٔ اصول مورد بحث در این فصل می‌توان شناختی کیفی از موضوع به‌دست آورد. سرانجام، صورت مغناطیسی قانون گاؤس را بررسی می‌کنیم، که نبود ظاهری قطبهای مغناطیسی منزوی را توجیه می‌کند.

۳۵ـ۱ دوقطبی مغناطیسی

تک‌بار منزوی، کمیت بنیادی میدانهای الکتریکی ایستاست. بارهای منفرد میدان الکتریکی ایجاد می‌کنند، و میدان الکتریکی برقرارشده به‌وسیله یک دسته از بارها، به‌نوبهٔ خود، می‌تواند در رفتار سایر بارها تأثیر بگذارد. بر پایهٔ این برهم‌کنش بنیادی بین بارهای الکتریکی، می‌توانیم بسیاری از پدیده‌های متداول را توضیح دهیم: نیرویی که هسته بر الکترونها وارد می‌آورد، که اتم را به‌صورت یکپارچه نگه می‌دارد؛ نیرویی که به‌وسیلهٔ یک اتم در مولکولهای یونی یا جامدات بر اتم دیگر وارد می‌شود؛ نیروهای کشسانی یا اصطکاکی؛ و الی آخر....

در برخی از مولکولهای خنثی از لحاظ الکتریکی، سودمند است که برهم‌کنش بنیادی را برهم‌کنش بین دوقطبیها (که آنها را می‌توان بعداً به برهم‌کنش بین دو بار نقطه‌ای تحلیل کرد) در نظر بگیریم. دیدیم که چگونه دوقطبی می‌تواند میدان الکتریکی به‌وجود آورد (بخش ۲۶ـ۳) و نیز دیدیم که چگونه دوقطبی تحت تأثیر میدانهای الکتریکی دیگر قرار می‌گیرد (بخش ۲۶ـ۷).

در مورد میدانهای مغناطیسی پایا، کمیت بنیادی بارهای الکتریکی متحرک در عنصر جریان هستند، که می‌توانند میدان مغناطیسی ایجاد کنند و نیز می‌توانند تحت تأثیر میدان مغناطیسی ناشی از سایر عنصرهای

جریان قرار گیرند. با این همه، در تلاش برای ارائهٔ توضیح در مورد خواص مغناطیسی مواد، این ارائهٔ توضیح برحسب عنصرهای جریان به اندازهٔ تشریح برحسب دوقطبی مغناطیسی مناسب نیستند. سرانجام، دوقطبی مغناطیسی را می‌توان چنین تصور کرد که از بارهای متحرک به‌وجود آمده است، درست همان‌طور که دوقطبی الکتریکی را می‌توان چنین پنداشت که از بارهای ساکن ایجاد شده است. گرچه، وقتی خواص مغناطیسی مواد را مورد بحث قرار می‌دهیم، اگر مواد را به‌صورت مجموعه‌ای از اتمها با گشتاورهای دوقطبی منفرد در نظر بگیریم، بصیرت عمیق‌تری نسبت به موضوع پیدا می‌کنیم.

برای شروع، میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ جریان دایره‌ای (بخش ۳۳ـ۲) را در نقطه‌ای روی محور z در نظر می‌گیریم:

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (۳۵\text{ـ}۱)$$

اگر در فاصلهٔ خیلی زیادی از حلقه قرار داشته باشیم ($z \gg R$)، معادلهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i\pi R^2}{z^3} \qquad (۳۵\text{ـ}۲)$$

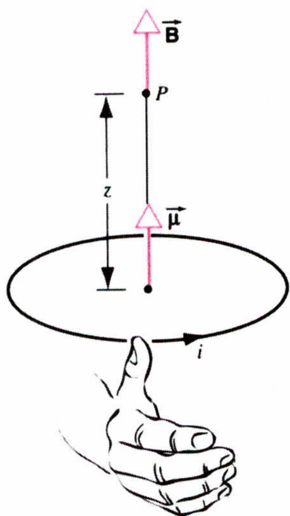
کمیت $i\pi R^2$ در معادلهٔ (۳۵ـ۲) را می‌توان به‌صورت iA نوشت، که در آن $A = \pi R^2$ مساحت حلقهٔ دایره‌ای است. این کمیت را به‌صورت اندازهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی μ حلقه تعریف می‌کنیم:

$$\mu = iA \qquad (۳۵\text{ـ}۳)$$

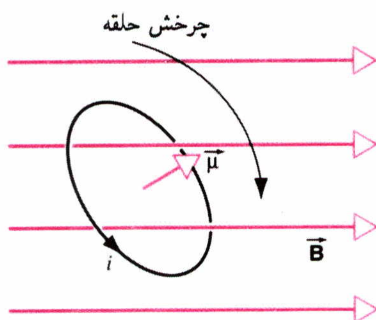
گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقهٔ جریان عبارت است از حاصلضرب جریان در مساحت حلقه. گرچه، معادلهٔ (۳۵ـ۳) را برای حلقهٔ دایره‌ای به‌دست آوردیم، این نتیجه برای هر حلقه‌ای با هر شکلی معتبر است. اگر حلقه شامل N دور باشد، در آن‌صورت $\mu = NiA$ است.

معادلهٔ (۳۵ـ۳) حاکی از آن است که یکای μ برابر $\mathrm{A \cdot m^2}$ (آمپر-مترمربع) است. بعداً در همین بخش خواهیم دید که یکای معادل آن $\mathrm{J/T}$ (ژول بر تسلا) است.

مانند گشتاور دوقطبی الکتریکی، گشتاور دوقطبی مغناطیسی کمیت برداری است. جهت بردار $\vec{\mu}$ عمود است بر صفحهٔ حلقهٔ جریان، که با استفاده از قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود، اگر انگشتان دست راست در جهت جریان قرار بگیرند، آنگاه شست دست راست نشان‌دهندهٔ جهت $\vec{\mu}$ است (شکل ۳۵ـ۱). با این تعریف، می‌توانیم



شکل ۳۵ـ۱ گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقهٔ جریان و میدان مغناطیسی در نقطهٔ P روی محور حلقه و در فاصلهٔ z از آن.



شکل ۳۵ـ۲ در میدان مغناطیسی خارجی، گشتاور دوقطبی مغناطیسی متحمل گشتاوری می‌شود، که $\vec{\mu}$ را می‌چرخاند تا آن را با $\vec{\mathbf{B}}$ همسو کند.

معادلهٔ (۳۵ـ۲) را به‌صورت معادلهٔ برداری بنویسیم:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi z^3} \qquad (۳۵\text{ـ}۴)$$

توجه کنید که همان‌طور که در شکل ۳۵ـ۱ نشان می‌دهد، بردارهای $\vec{\mathbf{B}}$ و $\vec{\mu}$ هم‌جهت هستند. میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ توسط گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu}$ به‌وجود آمده است.

حالا می‌خواهیم اثر میدان مغناطیسی را روی دوقطبی مغناطیسی بررسی کنیم. در شکل ۳۵ـ۲، یک حلقهٔ جریان را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ نشان داده‌ایم. ($\vec{\mathbf{B}}$ میدانی است که توسط عاملی که در شکل نشان داده‌نشده، شاید سیملوله‌ای بزرگ، به‌وجود آمده است.) در بخش ۳۲ـ۶ مسئلهٔ مشابهی را مورد توجه قرار دادیم (شکل ۳۲ـ۲۶ را ببینید) و نتیجه گرفتیم که در میدان یکنواخت حلقهٔ جریان تحت تأثیر هیچ نیروی خالصی قرار نمی‌گیرد، ولی گشتاور نیروی خالصی

به آن وارد می‌شود که با عبارت $\vec{\tau} = iA\hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (معادلهٔ ۳۲ـ۳۵) مشخص شده است، که در این عبارت $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکهٔ عمود بر حلقهٔ جریان است که جهت آن از قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود. چون جهت بردارهای $\vec{\mu}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ را دقیقاً به روش یکسانی تعریف کردیم، می‌توانیم بنویسیم $\vec{\mu} = iA\hat{\mathbf{n}}$، و در نتیجه معادلهٔ (۳۲ـ۳۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۵\text{ـ}۵)$$

یعنی، گشتاور در جهت چرخاندن حلقه عمل می‌کند، به‌طوری که $\vec{\mu}$ همسوی با $\vec{\mathbf{B}}$ شود. شباهت میان معادلهٔ (۳۵ـ۵) را با نتیجهٔ متناظر، برای گشتاوری که دوقطبی الکتریکی را در میدان الکتریکی می‌چرخاند، یعنی $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$ (معادلهٔ ۲۶ـ۲۷) مورد توجه قرار دهید. معادلهٔ (۳۵ـ۵) بدون توجه به شکل حلقهٔ جریان و یا سمتگیری آن نسبت به میدان مغناطیسی همواره معتبر است.

معادله‌های (۳۵ـ۴) و (۳۵ـ۵) دو منظور ما را برآورده می‌کنند: معادلهٔ (۳۵ـ۴) تشریح می‌کند که چگونه میدان مغناطیسی به‌وسیلهٔ دوقطبی مغناطیسی ایجاد می‌شود، و معادلهٔ (۳۵ـ۵) نشان می‌دهد که چگونه دوقطبی مغناطیسی تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد. به یاد داشتن این دو مفهوم به ما کمک می‌کند که رفتار مغناطیسی مواد را درک کنیم.

می‌توانیم شباهت بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را با درنظرگرفتن کار انجام‌شده برای تغییر سمتگیری دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی و برقراری ارتباط بین این کار با انرژی پتانسیل دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی ادامه دهیم. انرژی پتانسیل یک دوقطبی مغناطیسی را، که گشتاور آن $\vec{\mu}$ است و با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ زاویهٔ θ می‌سازد، می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۵\text{ـ}۶)$$

این معادله شبیه عبارت متناظر آن برای دوقطبی الکتریکی است، $U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ (معادلهٔ ۲۶ـ۳۲). در معادلهٔ (۳۵ـ۶) وقتی $\theta = ۹۰^\circ$ (یعنی $\vec{\mu}$ عمود بر $\vec{\mathbf{B}}$ است یا به‌صورت معادل و هم‌ارز $\vec{\mathbf{B}}$ موازی با صفحهٔ حلقه است)، $U = ۰$ است. U کمترین مقدارش (مساوی $-\mu B$) را وقتی اختیار می‌کند که $\vec{\mu}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ موازی باشند، و بیشترین مقدارش (مساوی $+\mu B$) را وقتی اختیار می‌کند که $\vec{\mu}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ پادموازی باشند.

نیروی مغناطیسی، مانند تمامی نیروهایی که به سرعت بستگی

جدول ۳۵ـ۱ مقدارهای برگزیده‌ای از گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی

سیستم	μ(J/T)
هستهٔ اتم نیتروژن	$۲٫۰۴ \times ۱۰^{-۲۸}$
پروتون	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۲۶}$
نوترون	$۹٫۶۵ \times ۱۰^{-۲۷}$
الکترون	$۹٫۲۸ \times ۱۰^{-۲۴}$
اتم نیتروژن	$۲٫۸ \times ۱۰^{-۲۳}$
پیچهٔ کوچک نوعی [الف]	$۵٫۴ \times ۱۰^{-۶}$
آهنربای میله‌ای کوچک	۵
پیچهٔ ابررسانا	۴۰۰
زمین	$۸٫۰ \times ۱۰^{۲۲}$

(الف) به‌عنوان نمونه، پیچهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۱.

دارند، در حالت کلی پایستار نیست و بنابراین در حالت کلی نمی‌توان آن را با انرژی پتانسیل نمایش داد. در این حالت خاص، که گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی به موقعیت مکانی آن نسبت به میدان وابسته است، این امکان وجود دارد که برای سیستمی متشکل از دوقطبی در میدان، انرژی پتانسیلی تعریف کنیم. توجه کنید که در اینجا انرژی پتانسیل ویژگی میدان به تنهایی نیست، بلکه ویژگی دوقطبی در میدان است. در حالت کلی، نمی‌توانیم کمیت اسکالر "انرژی پتانسیل مغناطیسی" بار نقطه‌ای یا "پتانسیل مغناطیسی" خود میدان بنویسیم، درست مانند کاری که در مورد میدانهای الکتریکی در فصل ۲۸ انجام دادیم.

تعداد زیادی از سیستمهای فیزیکی دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی هستند: مانند زمین، آهنربای میله‌ای، حلقه‌های جریان، اتمها، هسته‌ها، و ذرات بنیادی. در جدول ۳۵ـ۱ برخی از مقدارهای نوعی را ارائه داده‌ایم.

توجه کنید که معادلهٔ (۳۵ـ۶) حاکی از آن است که یکای μ عبارت است از انرژی تقسیم بر شدت میدان مغناطیسی یا J/T. معادلهٔ (۳۵ـ۳) حاکی از آن است که این یکا برابر است با جریان ضرب‌در مساحت، یا $\mathrm{A \cdot m^2}$. می‌توانیم نشان دهیم که این دو یکا هم‌ارز و معادل هستند و انتخاب هر یک از آنها برحسب تناسب انجام می‌شود.

همان‌طور که در مثالهای ارائه‌شده در جدول ۳۵ـ۱ در ارتباط با پروتون و اتم نیتروژن مشاهده می‌شود گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌ای نوعاً سه تا ۶ مرتبهٔ بزرگیِ کوچکتر از گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتمی است. از این مشاهدات بلافاصله چندین نتیجه‌گیری حاصل می‌شود. (۱) الکترونها نمی‌توانند از اجزای تشکیل‌دهندهٔ هسته

باشند؛ زیرا در غیر این‌صورت گشتاور دوقطبی مغناطیسی هسته‌ای باید نوعاً دارای مقادیری از مرتبهٔ بزرگی مربوط به الکترون باشد. (۲) آثار معمولی مغناطیسی مواد به‌وسیلهٔ خواص مغناطیسی اتمی مشخص می‌شود و نه با خواص مغناطیسی بسیار ضعیف‌تر هسته‌ای. (۳) به‌منظور وارد آوردن گشتاور نیروی خاص برای همسوکردن دوقطبیهای هسته‌ای، به میدانهای مغناطیسی نیاز داریم که سه تا شش مرتبه بزرگتر از میدانهای مورد نیاز برای همسویی دوقطبیهای اتمی هستند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۱ (الف) یک پیچهٔ ۲۵۰ دوری مستطیل‌شکل به‌طول ۲٫۱۰ cm و عرض ۱٫۲۵ cm حامل جریانی به شدت $85\mu A$ است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی این پیچه چقدر است؟ (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی پیچه، همسو با یک میدان مغناطیسی خارجی به شدت ۰٫۸۵ T قرار دارد. برای چرخاندن پیچه به اندازهٔ 180° یک عامل خارجی چقدر کار باید انجام دهد؟

حل. (الف) اندازهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی پیچه، با مساحت A، $(0.0210\ \mathrm{m})(0.0125\ \mathrm{m}) = 2.52\times10^{-4}\mathrm{m}^2$، چنین است

$$\mu = NiA = (250)(85\times10^{-6}\mathrm{A})(2.52\times10^{-4}\mathrm{m}^2)$$
$$= 5.36\times10^{-6}\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2 = 5.36\times10^{-6}\mathrm{J/T}$$

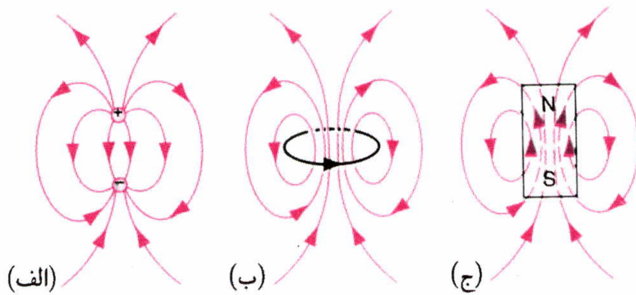
(ب) کار نیروی خارجی برابر است با افزایش انرژی پتانسیل سیستم، که چنین است

$$W = \Delta U = -\mu B\cos 180^\circ - (-\mu B\cos 0^\circ) = 2\mu B$$
$$= 2(5.36\times10^{-6}\mathrm{J/T})(0.85\mathrm{T}) = 9.1\times10^{-6}\mathrm{J} = 9.1\mu\mathrm{J}$$

این کار تقریباً برابر است با کار مورد نیاز برای بالا بردن قرص آسپیرین در ارتفاع قائمی در حدود ۳ mm.

میدان دوقطبی

تا اینجا میدان دوقطبی مغناطیسی (حلقهٔ جریان) را فقط در نقطه‌های واقع بر محور آن مورد بحث و بررسی قرار دادیم. اکنون میدان کامل دوقطبی مغناطیسی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در مورد دوقطبی الکتریکی، طرح کامل خطهای میدان را در شکل ۲۶ـ۱۲ نشان دادیم. در شکل ۳۵ـ۳(الف) چند خط میدان دوقطبی الکتریکی را نشان داده‌ایم که می‌توان آن را با خطهای میدان مربوط به یک حلقهٔ جریان



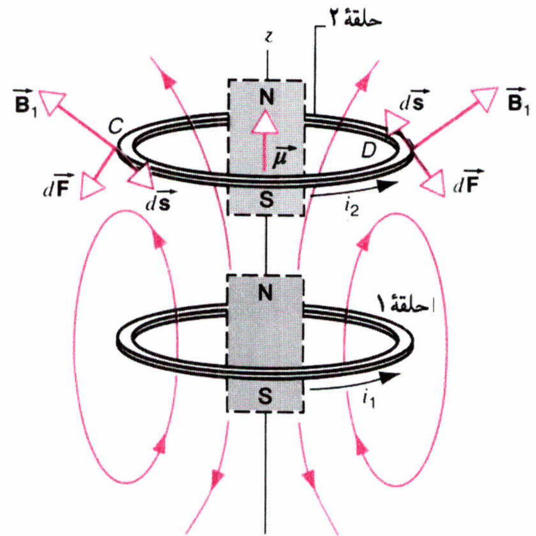
شکل ۳۵ـ۳ (الف) میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی. (ب) میدان دوقطبی مغناطیسی حلقهٔ جریان. (ج) میدان دوقطبی مغناطیسی آهنربای میله‌ای. خط‌چینها خطهای میدان را در داخل آهنربا نشان می‌دهند.

که در شکل ۳۵ـ۳(ب) نشان داده شده است مقایسه کرد. می‌بینیم که در خارج از حلقه شباهت بسیار زیادی بین طرح خطهای میدان وجود دارد. شباهت دیگری که بین میدانهای مربوط به دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی وجود دارد آن است که در فاصله‌های دور از دوقطبی هر دو به‌صورت r^{-3} تغییر می‌کنند. اختلاف اساسی و چشمگیر بین خطهای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی آن است که میدانهای الکتریکی از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می‌شوند، در حالی‌که خطهای میدان مغناطیسی همواره به‌صورت حلقهٔ بسته در می‌آیند.

در شکل ۳۵ـ۳(ج) خطهای میدان یک آهنربای میله‌ای را نشان داده‌ایم. این شکل همان طرح خطهای میدان حلقهٔ جریان را نشان می‌دهد، در نتیجه آهنربای میله‌ای را نیز می‌توانیم به‌عنوان دوقطبی مغناطیسی در نظر بگیریم. مناسب است که دو انتهای آهنربای میله‌ای را با قطبهای شمال (N) و جنوب (S) نشانه‌گذاری کنیم. خطهای میدان، قطب N را ترک می‌کنند و به قطب S باز می‌گردند. چنانچه سطحی به موضوع نگاه کنیم ممکن است چنین به نظر آید که قطبها مانند بارهای مثبت و منفی دوقطبی الکتریکی رفتار می‌کنند. ولی، بررسی دقیق و عمیق‌تر شکل ۳۵ـ۳(ج) نشان می‌دهد که خطهای میدان از قطبها شروع و به آنها ختم نمی‌شوند، بلکه در داخل آهنربا ادامه پیدا می‌کنند، و باز هم حلقه‌های بسته‌ای تشکیل می‌دهند. قطبهای N و S مانند بارهای دوقطبی الکتریکی رفتار نمی‌کنند، و همان‌طور که در بخش ۳۵ـ۷ بحث خواهیم کرد، به نظر نمی‌رسد که قطبهای مغناطیسی منزوی در طبیعت وجود داشته باشند.

۳۵ـ۲ نیروی وارد بر دوقطبی در میدان نایکنواخت

در میدان الکتریکی یکنواخت، نیروهای وارد بر دو بار الکتریکی



شکل ۳۵ـ۴ میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}_1$ ناشی از حلقهٔ ۱ سبب یک نیروی خالص پایین‌سو روی حلقهٔ ۲ می‌شود.

دوقطبی الکتریکی از نظر مقداری با هم برابر و از نظر جهت با هم مخالف‌اند (شکل ۲۶ـ۱۹). اگر میدان نایکنواخت باشد، نیروها دارای مقدارهای متفاوتی خواهند بود و در نتیجه ممکن است که یک نیروی خالص روی دوقطبی اثر کند. همین نتیجه‌گیری در مورد دوقطبیهای مغناطیسی صادق است: در میدان مغناطیسی یکنواخت، ممکن است که یک گشتاور نیروی خالص روی دوقطبی اثر کند، ولی هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. برای اینکه نیروی خالصی بر دوقطبی وارد شود، باید میدان مغناطیسی نایکنواخت باشد.

زوج حلقهٔ جریان نشان داده‌شده در شکل ۳۵ـ۴ را در نظر بگیرید. حلقه‌ها بر امتداد محور مشترکی قرار می‌گیرند، و هر دو حلقه، اگر از بالا نگاه کنیم، حامل جریانی پادساعتگرد هستند. حلقهٔ ۱ میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}_1$ را ایجاد می‌کند، که با حلقهٔ ۲ برهم‌کنش می‌کند. (فرض می‌کنیم که حلقهٔ ۲ بر اثر گشتاور نیروی ناشی از میدان حلقهٔ ۱ چرخیده باشد تا گشتاور دوقطبی حلقهٔ ۲ همسو با میدان حلقهٔ ۱ شود.) در نقطه‌های C و D، که نقطه‌های متقابل یک قطر حلقهٔ ۲ هستند، نیروهای $d\vec{\mathbf{F}} = i_2 d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}_1$ وارد بر عنصر $d\vec{\mathbf{s}}$ دارای مؤلفه‌های شعاعی برون‌سو و به سمت پایین هستند. وقتی که نیروهای وارد بر تمام چنین زوج عنصرهایی را با هم جمع می‌کنیم، درمی‌یابیم که مؤلفه‌های شعاعی همدیگر را خنثی می‌کنند و مؤلفه‌های پایین‌سو با هم جمع می‌شوند تا یک نیروی خالص به سمت پایین را نتیجه دهند.

می‌توانیم این نیرو را برحسب قطبهای مغناطیسی نیز تحلیل کنیم. هر کدام از حلقه‌های جریان را می‌توانیم با آهنربایی با قطبهای شمال و جنوب نشان دهیم که به‌صورت شکل ۳۵ـ۴ آرایش یافته‌اند. ربایش حلقهٔ ۲ به‌وسیلهٔ حلقهٔ ۱ را می‌توان برحسب نیروی بین قطبهای مغناطیسی توصیف کرد: قطب N آهنربایی که نشانگر حلقهٔ جریان ۱ است قطب S آهنربای نشان‌دهندهٔ حلقهٔ ۲ را می‌رباید. در شکل ۳۵ـ۴ بین دو قطب N و دو قطب S رانشی نیز وجود دارد، ولی ربایش N − S نیروی قوی‌تری است زیرا این قطبها به‌هم نزدیک‌ترند.

با استفاده از معادلهٔ (۳۵ـ۶) برای انرژی پتانسیل گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقهٔ ۲ در میدان مغناطیسی ایجادشده توسط حلقهٔ ۱ ($U = -\vec{\mu}_2 \cdot \vec{\mathbf{B}}_1$)، نتیجه می‌گیریم که $U = -\mu_{2z} B_{1z}$، زیرا گشتاور مغناطیسی حلقهٔ ۲ فقط دارای مؤلفهٔ z است. مؤلفهٔ z نیروی $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ که به‌وسیلهٔ حلقهٔ ۱ روی حلقهٔ ۲ اعمال می‌شود از طریق معادلهٔ $F_z = -dU/dz$ با انرژی پتانسیل ارتباط پیدا می‌کند، بنابراین

$$F_{21z} = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}(-\mu_{2z} B_{1z}) = \mu_{2z}\frac{dB_{1z}}{dz} \quad (۳۵\text{ـ}۷)$$

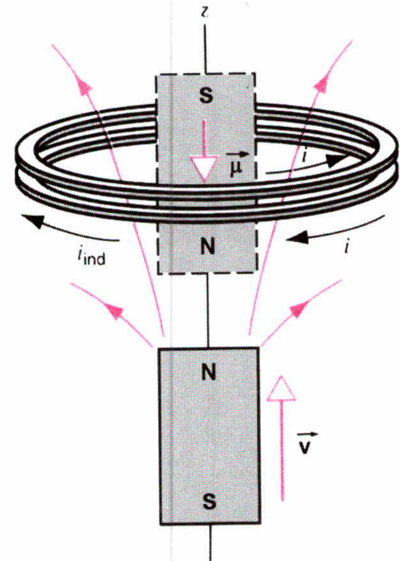
در شکل ۳۵ـ۴، چنانچه راستای z مثبت را به سمت بالا اختیار کنیم، داریم $\mu_{2z} > 0$ و $dB_{1z}/dz < 0$ (زیرا وقتی به سمت بالا می‌رویم مؤلفهٔ z میدان کاهش می‌یابد)، و در نتیجه $F_{21z} < 0$ است. و همان‌طور که قبلاً مشخص کرده‌ایم، نیروی وارد به حلقهٔ ۲ ناشی از حلقهٔ ۱ پایین‌سو است.

ملاحظه‌های مشابهی نشان می‌دهد که نیروی وارد بر حلقهٔ ۱ ناشی از حلقهٔ ۲ بالاسو است، و در نتیجه دو حلقه همدیگر را می‌ربایند.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی القایی

در برخی از مواد که مولکولهای آنها دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی دائمی نیستند، همان‌گونه که در بخش ۲۹ـ۶ مطرح کردیم، اعمال میدان الکتریکی می‌تواند سبب القای گشتاور دوقطبی بشود، که این کار به‌دلیل ایجاد فاصله بین بارهای مثبت و منفی در مولکول صورت می‌پذیرد. پدیدهٔ مشابهی برای میدانهای مغناطیسی رخ می‌دهد: در موادی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی وجود ندارد، میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند در آنها گشتاور دوقطبی القا کند.

شکل ۳۵ـ۵ نشان می‌دهد که چگونه ممکن است چنین اتفاقی رخ دهد. یک حلقهٔ دوتایی متشکل از دو تک‌حلقه را که حامل جریانهای یکسان در جهتهای مخالف هستند، در یک میدان نایکنواخت که ممکن است به‌وسیلهٔ یک آهنربای دائمی به‌وجود آمده باشد، در نظر بگیرید. گشتاور مغناطیسی خالص حلقهٔ دوتایی صفر است، زیرا دو تک‌حلقه دارای گشتاور مغناطیسی مساوی از نظر مقدار، ولی مخالف



شکل ۳۵ـ۵ یک حلقهٔ دوتایی هیچ گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی ندارد، ولی وقتی یک آهنربا به حلقهٔ دوتایی نزدیک می‌شود حلقه گشتاور دوقطبی القایی پیدا می‌کند. حلقه بر اثر نیروی وارد بر گشتاور القایی رانده می‌شود.

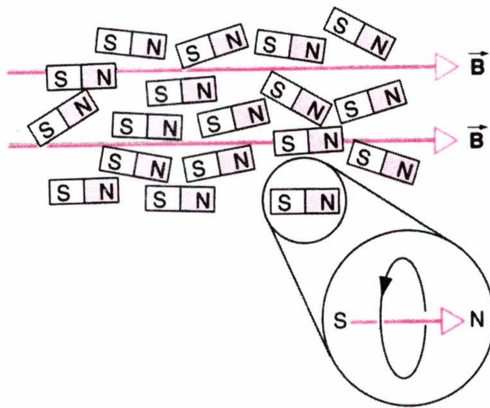
از نظر جهت هستند. وقتی آهنربا را به حلقهٔ دوتایی نزدیک‌تر کنیم، شار گذرنده از حلقه‌ها افزایش می‌یابد، و سبب ایجاد جریان القایی می‌شود، که بنابر قانون لنز (وقتی از بالا به آنها نگاه کنیم) باید در جهت ساعتگرد باشد. این جریان القاشده، که به جریانهای جاری در حلقه‌ها افزوده می‌شود، در حلقهٔ بالایی جریان خالص $i - i_{\text{القایی}}$ و در حلقهٔ پایینی جریان خالص $i + i_{\text{القایی}}$ را به‌دست می‌دهد. حاصل نهایی این عمل، گشتاور مغناطیسی القایی پایین‌سو است. قطبهای N و S مغناطیس معادل را در شکل نشان داده‌ایم. از اینجا می‌توان مشاهده کرد که نیروی وارد بر حلقهٔ دوتایی از طرف مغناطیس نیرویی رانشی (بالاسو) است.

با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳۵ـ۷) می‌بینیم که (باز هم جهت مثبت محور z را به سمت بالا اختیار می‌کنیم)، $\mu_z < 0$ و $dB_z/dz < 0$، به‌طوری که $F_z > 0$ است که متناظر با یک نیروی بالاسو و سازگار و همخوان با نتیجه‌ای است که قبلاً به آن دست یافته بودیم.

به‌طور خلاصه، در میدان مغناطیسی نایکنواخت، دوقطبیهای دائمی می‌چرخند تا هم‌راستا با میدان قرار گیرند و به سوی چشمهٔ میدان جذب شوند، ولی دوقطبیهای القایی از چشمهٔ میدان رانده می‌شوند.

۳۵ـ۳ مغناطیس اتمی و هسته‌ای

خواص الکتریکی کلی یک مادهٔ دی‌الکتریک مانند آب به گشتاور دوقطبی الکتریکی مولکولهای منفرد آن وابسته است. هر مولکول دارای یک سمت مثبت و یک سمت منفی است و مانند دوقطبی الکتریکی



شکل ۳۵ـ۶ مادهٔ مغناطیسی را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی در نظر گرفت که هر یک از آنها یک قطب شمال و یک قطب جنوب دارد. از دیدگاه میکروسکوپی، هر دوقطبی واقعاً یک حلقهٔ جریان است که نمی‌توان آن را به قطبهای جداگانه تقسیم کرد.

رفتار می‌کند. اگر در مولکولها گسیختگی ایجاد کنیم می‌توانیم سمتهای مثبت و منفی آنها را از هم جدا کنیم.

خواص مغناطیسی مواد نیز به‌صورتی مشابه به گشتاور دوقطبیهای مغناطیسی اتمهای منفرد وابسته است، و می‌توانیم چنین تصور کنیم که مواد مغناطیسی از مجموعه‌ای از دوقطبیهای اتمی تشکیل یافته باشند، که ممکن است هرگاه یک میدان مغناطیسی خارجی بر آنها اثر کند با آن همسو شوند (شکل ۳۵ـ۶). با این همه، برعکس دوقطبی الکتریکی، نمی‌توانیم اتمها را به‌صورت قطبهای مغناطیسی جداگانهٔ N و S بشکنیم. بلکه، گشتاورهای مغناطیسی را چنین در نظر می‌گیریم که حلقه جریانهای بسیار ریزی باشند، که مثلاً از چرخش الکترونها در مدارهای اتم به‌وجود آمده‌اند. در این بخش دربارهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی مربوط به الکترون چرخان بحث می‌کنیم.

مدل ساده‌ای را برای اتم در نظر می‌گیریم که در آن الکترون در مداری دایره‌ای با شعاع r و با سرعت v گرد هسته می‌چرخد. این الکترون چرخان را می‌توانیم به‌صورت حلقهٔ جریان در نظر بگیریم، که برای آن جریان عبارت است از بار الکترون تقسیم بر دورهٔ تناوب T برای یک مدار:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} \qquad (۳۵ـ۸)$$

با استفاده از معادلهٔ (۳۵ـ۳) می‌توان گشتاور دوقطبی مغناطیسی این حلقه را به‌دست آورد:

$$\mu = iA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2) = \frac{erv}{2} \qquad (۳۵ـ۹)$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی که در اینجا برای اتمها محاسبه کردیم

به‌نام گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری شناخته شده است، زیرا از حرکت مداری الکترونها حول هسته ناشی می‌شود.

در تحلیل خواص اتمها، مناسب است که معادلهٔ (۳۵ـ۹) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\mu_l = \frac{erv}{۲} = \frac{e}{۲m} mvr = \frac{e}{۲m} l \qquad (۳۵\text{ـ}۱۰)$$

که در اینجا m جرم الکترون است. کمیت mvr تکانهٔ زاویه‌ای l الکترونی است که در مداری دایره‌ای گرد هستهٔ اتم می‌چرخد. گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری را با μ_l نشانه‌گذاری می‌کنیم که نشانگر آن است که از تکانهٔ زاویه‌ای مداری l پدید آمده است. در نظریهٔ کوانتومی اتمها، که در فصلهای ۴۷ و ۴۸ مورد بررسی قرار خواهد گرفت، تکانهٔ زاویه‌ای برحسب یکاهای $h/۲\pi$ اندازه‌گیری می‌شود، که در آن h ثابت پلانک است. از جانشانی این یکای بنیادی تکانهٔ زاویه‌ای در معادلهٔ (۳۵ـ۱۰)، یک یکای اصلی برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی که مگنتون بور، $\mu_{\rm B}$، نامیده می‌شود، به‌دست می‌آوریم:

$$\mu_{\rm B} = \frac{e}{۲m}\frac{h}{۲\pi} = \frac{eh}{۴\pi m} = ۹{,}۲۷ \times ۱۰^{-۲۴}\,{\rm J/T} \qquad (۳۵\text{ـ}۱۱)$$

که مقدار عددی از جانشانی مقدارهای عددی مربوط به e، h، و m در معادلهٔ (۳۵ـ۱۱) به‌دست آمده است. گشتاورهای مغناطیسی اتمی معمولاً برحسب یکای $\mu_{\rm B}$ اندازه‌گیری می‌شوند و نوعاً از نظر مقداری از مرتبهٔ $۱\mu_{\rm B}$ هستند، که می‌توانید آن را در جدول ۳۵ـ۱، در مورد مثال اتم نیتروژن، مشاهده کنید.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتمها را می‌توان با عبور دادن باریکه‌ای از اتمها از ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی نایکنواخت وجود دارد اندازه‌گیری کرد. همان‌طور که در بخش پیشین نشان دادیم، در میدان نایکنواخت، نیروی خالصی بر دوقطبی مغناطیسی وارد می‌آید، به‌طوری که اتمها از مسیر اولیه‌شان در عبور از ناحیهٔ میدان منحرف می‌شوند. در دههٔ ۱۹۲۰، آزمایشهایی از این نوع نشان دادند که اتمهایی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی مداری نداشتند باز هم به‌وسیلهٔ میدان مغناطیسی منحرف می‌شدند. این موضوع، حاکی از وجود سهم دیگری در گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتمها بود، که در این مورد از گشتاور دوقطبی مغناطیسی خودِ الکترونها حاصل می‌شد. این سهم را گشتاور مغناطیسی ذاتی یا "اسپین" می‌خوانیم. الکترونها در حالتهای متفاوت حرکت، گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی مداری متفاوتی دارند، ولی همهٔ الکترونها دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی دقیقاً یکسانی هستند. اسپین ذاتی الکترون و تأثیر آن بر ساختار اتمها را در فصلهای ۴۷ و ۴۸ مطالعه خواهیم کرد. گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی الکترون در جدول ۳۵ـ۱ درج شده است. مقدار آن خیلی نزدیک به $۱\mu_{\rm B}$ است.

گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی مداری و اسپینی الکترونها تقریباً مقدار یکسانی دارند (هر دو از مرتبهٔ بزرگی $۱\mu_{\rm B}$) و از آن‌رو در تعیین خواص مغناطیسی اتمها هر دو حائزاهمیت‌اند. گشتاور مغناطیسی کل یک اتم از حاصل‌جمع برداری گشتاورهای مغناطیسی مداری و اسپینی کلیهٔ الکترونهای آن اتم به‌دست می‌آید. در اتمی که تعداد زیادی الکترون دارد، این حاصل‌جمعهای برداری ممکن است بسیار پیچیده باشد. با این همه، معلوم می‌شود که در بعضی از اتمها گشتاورهای مغناطیسی مداری و اسپینی کل صفر است. موادی که از این نوع اتمها ساخته می‌شوند عملاً غیرمغناطیسی هستند و اثر القایی ضعیفی بروز می‌دهند که به آن دیامغناطیس گفته می‌شود (مشابه آنچه که در شکل ۳۵ـ۵ نشان داده‌ایم). در برخی دیگر از اتمها، گشتاور مغناطیسی کل مداری یا اسپینی (یا هر دو) ممکن است غیرصفر باشد، به‌طوری که در حضور میدان مغناطیسی خارجی اتمها همسو می‌شوند. به این مواد پارامغناطیس می‌گوییم. آشناترین نوع رفتار مغناطیسی ماده، فرومغناطیس است، که در این مواد، به علت برهم‌کنش بین اتمها، حتی پس از حذف میدان خارجی، همسویی اتمها باقی می‌ماند. بعداً در همین فصل، این سه نوع مادهٔ مغناطیسی را به‌طور مفصل‌تر مطالعه خواهیم کرد.

مغناطیس هسته‌ای

هسته از پروتونها و نوترونها تشکیل شده است که تحت تأثیر نیروهای متقابل دارای حرکت مداری هستند. گشتاور مغناطیسی هسته شامل دو قسمت است: یک قسمت مداری، ناشی از حرکت مداری پروتونها (نوترونها، به علت خنثی بودن، گرچه ممکن است دارای تکانهٔ زاویه‌ای مداری باشند، سهمی در گشتاور مغناطیسی مداری ندارند)، و یک قسمت ذاتی، ناشی از گشتاورهای مغناطیسی ذاتی پروتونها و نوترونها، که در جدول ۳۵ـ۱ درج شده است. (اینکه نوترون خنثی دارای گشتاور مغناطیسی ذاتی است، ممکن است شگفت‌آور به نظر برسد. اگر نوترون واقعاً یک ذرهٔ بنیادی بدون بار الکتریکی بود، حقیقتاً نباید گشتاور دوقطبی مغناطیسی داشته باشد. غیرصفر بودن گشتاور دوقطبی مغناطیسی نوترون نشانه‌ای از ساختار داخلی آن است. اگر نوترون را متشکل از سه ذرهٔ باردار به‌نام "کوارک" در نظر بگیریم می‌توانیم گشتاور دوقطبی ذاتی آن را به‌دقت توجیه کنیم.)

هسته‌ها دارای گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی مداری و اسپینی



شکل ۳۵ـ۷ تصویر نیمرخی از سر انسان که با بهره‌گیری از روشهای تصویر برداری به کمک تشدید مغناطیسی (MRI) به‌دست آمده است. این تصویر جزییاتی از مغز و پوست صورت را نشان می‌دهد که در تصویرهای پرتو x قابل رؤیت نیست و هیچ‌گونه مخاطره‌ای برای تندرستی بیمار ایجاد نمی‌کند.

هستند که می‌توان آنها را به‌صورت معادلهٔ (۳۵ـ۱۰) بیان کرد. ولی، باید به‌جای جرمی که در این معادله‌ها ظاهر می‌شود (جرم الکترون) جرم پروتون یا نوترون را گذاشت، که در حدود ۱۸۰۰ برابر جرم الکترون است. گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی هسته‌ای نوعاً با ضریب $۱۰^{-۳}$ از گشتاورهای دوقطبی اتمی کوچکترند (جدول ۳۵ـ۱) و سهم آنها در خواص مغناطیسی ماده معمولاً قابل چشم‌پوشی است.

آثار مغناطیس هسته‌ای، در تشدید مغناطیسی هسته‌ای حائز اهمیت می‌شود، که در آن هسته در معرض تابش الکترومغناطیسی با بسامد کاملاً دقیقی قرار می‌گیرد که متناظر با بسامدی است که سبب تغییر جهت گشتاور مغناطیسی هسته‌ای می‌شود. می‌توان به‌وسیلهٔ میدان مغناطیسی ایستا گشتاورهای مغناطیسی هسته‌ای را در نمونه‌ای از ماده همسو کرد؛ جهت دوقطبیها با جذب تابش الکترومغناطیسی که برحسب زمان تغییر می‌کند، برعکس می‌شود. جذب این تابش الکترومغناطیسی را می‌توان به‌آسانی آشکارسازی کرد. این اثر اساس تصویر برداری به کمک تشدید مغناطیسی (MRI) را تشکیل می‌دهد، که روشی تشخیصی است و در آن می‌توان تصویر اعضای بدن را با تابشی که برای اعضای بدن بسیار کم‌خطرتر از پرتوهای x است به‌دست آورد (شکل ۳۵ـ۷).

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۲ پروتونی در یک میدان مغناطیسی به شدت $B = ۱٫۵\,\mathrm{T}$ قرار دارد. گشتاور دوقطبی پروتون در آغاز پادموازی با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ است. برای اینکه جهت گشتاور دوقطبی پروتون را برعکس کنیم، چه مقدار کار باید انجام دهیم؟

حل. انرژی برهم‌کنش دوقطبی مغناطیسی با میدان مغناطیسی از معادلهٔ (۳۵ـ۶)، $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$، به‌دست می‌آید. وقتی $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ پادموازی با میدان باشد، مانند حالت آغازی این مسئله، انرژی اولیهٔ U_i چنین است

$$U_\mathrm{i} = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mu B$$

زیرا زاویهٔ بین $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ برابر ۱۸۰° است. وقتی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی تغییر جهت می‌دهد (که به آن "سروته شدن اسپین" می‌گوییم)، گشتاور مغناطیسی موازی با $\vec{\mathbf{B}}$ می‌شود و انرژی نهایی چنین است

$$U_\mathrm{f} = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -\mu B$$

کار خارجی انجام‌شده روی سیستم برابر است با تغییر انرژی سیستم، یا

$$\begin{aligned} W &= U_\mathrm{f} - U_\mathrm{i} = -\mu B - \mu B = -۲\mu B \\ &= -۲(۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{J/T})(۱٫۵\,\mathrm{T}) \\ &= -۴٫۲۳ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{J} = -۰٫۲۶\,\mu\mathrm{eV} \end{aligned}$$

چون محیط روی سیستم کار منفی انجام می‌دهد، سیستم روی محیط کار مثبت انجام می‌دهد. ممکن است این انرژی به‌صورت تابش الکترومغناطیسی به محیط انتقال پیدا کند. این تابش در گسترهٔ بسامد رادیویی طیف امواج الکترومغناطیسی قرار دارد و بسامد آن ۶۴ MHz است که اندکی کمتر از گسترهٔ تنظیم امواج رادیویی FM است.

۳۵ـ۴ مغناطش

در فصل ۳۰ اثر پُرکردن فضای بین دو صفحهٔ خازن را با مادهٔ دی‌الکتریک مطالعه کردیم و دریافتیم که ورود دی‌الکتریک با ثابت نگه‌داشتن بار الکتریکی روی صفحات خازن، میدان الکتریکی بین صفحات را کاهش می‌دهد. یعنی، اگر $\vec{\mathbf{E}}_\circ$ میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن بدون دی‌الکتریک باشد، وقتی دی‌الکتریک فضای بین صفحه‌ها را پُر می‌کند، میدان الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ از معادلهٔ (۲۹ـ۲۳) به‌دست می‌آید، که می‌توان آن را به‌صورت برداری زیر نوشت

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_\circ / \kappa_\mathrm{e} \qquad (۳۵\text{ـ}۱۲)$$

که در آن تأثیر مادهٔ دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک κ_e مشخص

شده است، که یک عدد محض است و مقدارش برای مواد بزرگتر از ۱ است (جدول ۲۹ـ۲ را ببینید).

اکنون فرض کنید که محیط مغناطیسی از اتمهایی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}_n$ تشکیل شده است. این دوقطبیها در حالت کلی در جهتهای متفاوتی در فضا قرارگرفته‌اند. فرض کنید می‌خواهیم گشتاور دوقطبی خالص $\vec{\mu}$ مربوط به حجم V از ماده را با انجام جمع برداری تمام گشتاورهای دوقطبیهای موجود در آن حجم محاسبه کنیم: $\vec{\mu} = \sum \vec{\mu}_n$. در نتیجه مغناطیدگی $\vec{\mathbf{M}}$ محیط را به‌صورت گشتاور دوقطبی خالص به‌ازای واحد حجم تعریف می‌کنیم، یا

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{\vec{\mu}}{V} = \frac{\sum \vec{\mu}_n}{V} \qquad (۱۳\text{ـ}۳۵)$$

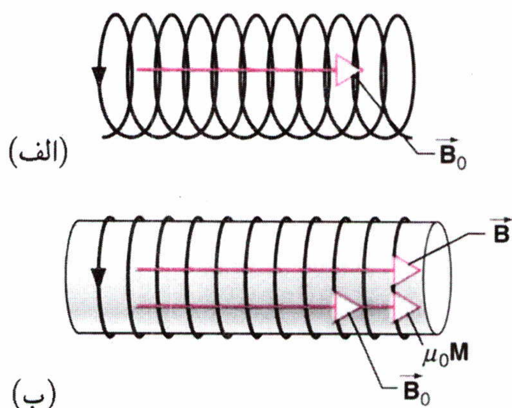
برای اینکه مغناطیدگی را به‌صورت یک کمیت میکروسکوپی در نظر بگیریم، باید معادلهٔ (۳۵ـ۱۳) را به‌صورت حدی که در آن حجم به صفر میل می‌کند، بنویسیم. این عمل امکان اینکه بتوان ماده را با مغناطیدگی یکنواخت در نظرگرفت فراهم می‌کند.

فرض‌کنیدکه چنین ماده‌ای را در میدان یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ قرار داده‌ایم. میدان اِعمال‌شده، ماده را "مغناطیده" و دوقطبیها را همخط می‌کند. دوقطبیهای همخط‌شده میدان مغناطیسی خودشان را به‌وجود می‌آورند، که شبیه میدان الکتریکی ایجادشده توسط دوقطبیهای الکتریکی در مادهٔ دی‌الکتریک است (بخش ۲۹ـ۶ را ببینید). در هر نقطه‌ای از فضا، میدان مغناطیسی برایند $\vec{\mathbf{B}}$ برابر است با مجموع اعمال‌شدهٔ $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ و میدانی که دوقطبیها ایجاد می‌کنند، که آن را $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{M}}$ می‌نامیم، در نتیجه

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_\circ + \vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{M}} \qquad (۱۴\text{ـ}۳۵)$$

میدان $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{M}}$ می‌تواند هم شامل سهم ناشی از دوقطبیهای دائمی موجود در مواد پارامغناطیسی باشد(مانند دی‌الکتریکهای قطبی) و هم دوقطبیهای القایی در تمام مواد را در برگیرد (مانند دی‌الکتریکهای ناقطبی).

میدان مغناطش $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{M}}$ تابع مغناطیدگی $\vec{\mathbf{M}}$ است، که (همان‌طور که در معادلهٔ (۳۵ـ۱۳) تعریف شد) به‌وسیلهٔ دوقطبیهای موجود در ماده تعیین می‌شود. در میدانهای ضعیف، $\vec{\mathbf{M}}$ با میدان اعمال‌شدهٔ $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ متناسب است اما عموماً محاسبهٔ $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{M}}$ دشوار است مگر اینکه مغناطیدگی، یکنواخت و شکل هندسی دارای تقارن بالایی باشد. به‌عنوان مثال، یک سیملولهٔ بلند (ایده‌آل) با مقطع دایره‌ای را در نظر بگیرید که پر از مادهٔ مغناطیسی باشد (شکل ۳۵ـ۸). در این مورد



شکل ۳۵ـ۸ (الف) در سیملولهٔ توخالی، جریان در سیمها میدان $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ را ایجاد می‌کند. (ب) وقتی سیملوله پر از مادهٔ مغناطیسی می‌شود، میدان کل $\vec{\mathbf{B}}$ هم شامل سهم $\vec{\mathbf{B}}_\circ$، ناشی از جریان و هم سهم $\mu_\circ \vec{\mathbf{M}}$ ناشی از ماده مغناطیسی می‌شود.

میدان اعمال‌شده در سراسر قسمت داخلی سیملوله یکنواخت است؛ هم $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ و هم $\vec{\mathbf{M}}$ موازی محور هستند و می‌توان نشان داد که در داخل سیملوله، داریم $\vec{\mathbf{B}}_{\mathrm{M}} = \mu_\circ \vec{\mathbf{M}}$. (باید این تساوی را از نظر ابعادی بررسی کنید و نشان دهید که $\mu_\circ \vec{\mathbf{M}}$ همان ابعاد $\vec{\mathbf{B}}$ را دارد.) بنابراین برای میدان کل می‌توان نوشت

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_\circ + \mu_\circ \vec{\mathbf{M}} \qquad (۱۵\text{ـ}۳۵)$$

که این موضوع در شکل ۳۵ـ۸(ب) نشان داده شده است. در میدانهای ضعیف، مغناطیدگی $\vec{\mathbf{M}}$ با میدان اعمال‌شدهٔ $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ به‌صورت خطی افزایش می‌یابد و بنابراین $\vec{\mathbf{B}}$ باید متناسب با $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ باشد. در این حالت، می‌توان نوشت

$$\vec{\mathbf{B}} = \kappa_{\mathrm{m}} \vec{\mathbf{B}}_\circ \qquad (۱۶\text{ـ}۳۵)$$

که در آن κ_{m} ثابت تراوایی ماده است، که آن را نسبت به تراوایی خلأ تعریف می‌کنیم، که برای آن $\kappa_{\mathrm{m}} = ۱$ است. ثابت تراواییِ اغلب موادِ عادی (به استثنای فرومغناطیسها) خیلی نزدیک به یک است، که این موضوع را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد. برای موادی غیر از فرومغناطیسها، ثابت تراوایی می‌تواند به خواصی مانند دما و چگالی ماده بستگی داشته باشد ولی تابع میدان $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ نباشد. در شرایط عادی، معادلهٔ(۳۵ـ۱۶) یک رابطهٔ خطی برای میدان برایند $\vec{\mathbf{B}}$ است که با افزایش میدان اعمال‌شده به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، برای مواد فرومغناطیس، می‌توان معادلهٔ(۳۵ـ۱۶) را معادله‌ای در نظر گرفت که κ_{m}ای را تعریف می‌کند که تابع میدان اعمال‌شدهٔ

$\vec{\mathbf{B}}_\circ$ است، و در نتیجه معادلهٔ (۳۵ـ۱۶) دیگر خطی نیست.*

از ترکیب معادله‌های (۳۵ـ۱۵) و (۳۵ـ۱۶) می‌توان مغناطیدگی القایی توسط میدان خارجی را به‌صورت زیر نوشت

$$\mu_\circ \vec{\mathbf{M}} = (\kappa_m - ۱)\vec{\mathbf{B}}_\circ \qquad (۳۵\text{ـ}۱۷)$$

که برای اغلب مواد نافرومغناطیسی کمیت $\kappa_m - ۱$ نوعاً در محدودهٔ $۱۰^{-۶}$ تا $۱۰^{-۳}$ است و در نتیجه سهم مغناطیدگی $\mu_\circ \vec{\mathbf{M}}$ در میدان کل معمولاً بسیار کوچکتر از $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ است. این موضوع در تضاد بسیار شدید با مورد میدانهای الکتریکی است، که برای آنها κ_e مواد معمولاً در گسترهٔ ۳ تا ۱۰۰ است. محیط دی‌الکتریکی میدان الکتریکی کل را به‌طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌دهد، در صورتی‌که مواد مغناطیسی نافرومغناطیس تأثیر بسیار ناچیزی بر میدان مغناطیسی دارند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۳ شدت میدان مغناطیسی در یک سیملولهٔ تهی برابر $۶٫۵ \times ۱۰^{-۴}\text{T}$ است. وقتی سیملوله با آهن پر شود شدت میدان مغناطیسی $۱٫۴\,\text{T}$ می‌شود. (الف) تراوایی نسبی را در این شرایط تعیین کنید. (ب) میانگین گشتاور مغناطیسی یک اتم آهن را در این شرایط به‌دست آورید.

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۵ـ۱۶)، داریم (فقط اندازه‌ها را در نظر بگیرید):

$$\kappa_m = \frac{B}{B_\circ} = \frac{۱٫۴\,\text{T}}{۶٫۵ \times ۱۰^{-۴}\text{T}} = ۲۲۰۰$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ (۳۵ـ۱۵)، نتیجه می‌گیریم

$$M = \frac{B - B_\circ}{\mu_\circ} = \frac{۱٫۴\,\text{T} - ۶٫۵ \times ۱۰^{-۴}\text{T}}{۴\pi \times ۱۰^{-۷}\text{T}\cdot\text{m/A}} = ۱٫۱۱ \times ۱۰^{۶}\text{A/m}$$

توجه کنید که M را می‌توان برحسب $\text{A}\cdot\text{m}^۲/\text{m}^۳$ نیز بیان کرد. این موضوع نمایانگر گشتاور مغناطیسی به‌ازای واحد حجم آهن است. برای یافتن گشتاور مغناطیسی به‌ازای هر اتم، به چگالی عددی n اتمها (یا تعداد اتمهای موجود در واحد حجم) نیاز داریم:

$$n = \frac{\text{اتمها}}{\text{حجم}} = \frac{\text{اتمها}}{\text{جرم}} \times \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$$

$$= \frac{\text{اتمهای هر مول}}{\text{جرم هر مول}} \times \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} = \rho\frac{N_A}{m}$$

که در این رابطه ρ چگالی آهن، N_A ثابت آووگادرو و m جرم مولی آهن است. با قرار دادن مقدارهای مناسب، داریم

$$n = (۷٫۸۷ \times ۱۰^{۳}\text{kg/m}^۳)\frac{۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ \text{اتم به‌ازای هر مول}}{۰٫۰۵۵۸\ \text{کیلوگرم به‌ازای هر مول}}$$

$$= ۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸}\ \text{اتم در هر مترمکعب}$$

میانگین گشتاور مغناطیسی به‌ازای هر اتم برابر است با

$$\mu = \frac{M}{n} = \frac{۱٫۱۱ \times ۱۰^{۶}\text{A/m}}{۸٫۴۹ \times ۱۰^{۲۸}\ \text{اتم/m}^۳}$$

$$= ۱٫۳۱ \times ۱۰^{-۲۳}\text{J/T} = ۱٫۴\mu_B$$

این نتیجه با آنچه برای گشتاور مغناطیسی اتمی انتظار داریم، سازگاری کامل دارد. این محاسبه‌ها نشان می‌دهد که هر یک از اتمهای موجود در نمونهٔ آهن تمام گشتاور دوقطبی مغناطیسی خود را در اختیار مغناطیدگی ماده قرار می‌دهد، این رفتار ویژگی یا مشخصهٔ فرومغناطیسهاست.

۳۵ـ۵ مواد مغناطیسی

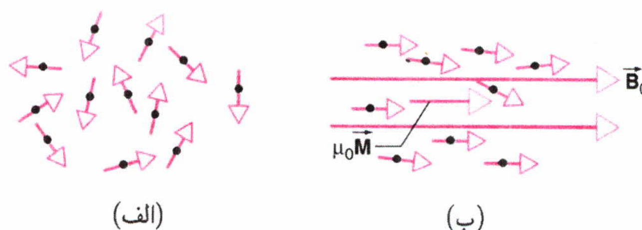
اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم به برخی از ویژگیهای سه نوع مادهٔ مغناطیسی پی ببریم، چنانکه خواهیم دید، بخشی از این طبقه‌بندی به گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتمهای ماده و بخشی از آن به برهم‌کنش بین اتمها مربوط می‌شود.

پارامغناطیس

خاصیت پارامغناطیسی مربوط به موادی است که اتمهای آنها دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی هستند؛ اینکه این گشتاورهای دوقطبی از نوع مداری یا اسپینی باشند در ماهیت مسئله تفاوتی ایجاد نمی‌کند.

در نمونه‌ای از مادهٔ پارامغناطیسی که میدانی به آن اعمال نشده است، گشتاورهای دوقطبی اتمی در ابتدا به‌صورت کتره‌ای در فضا

* همواره بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی شباهتی وجود دارد. مواد دی‌الکتریکی وجود دارد، که آنها را فروالکتریک می‌خوانیم، و برای آنها رابطهٔ بین $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{E}}_\circ$ غیرخطی است، یعنی κ_e تابع میدان اعمال‌شدهٔ $\vec{\mathbf{E}}_\circ$ است. از این مواد می‌توان برای ساختن دوقطبیهای الکتریکی شبه‌دائمی، موسوم به الکترت استفاده کرد که مشابه الکتریکی آهنرباهای دائمی هستند. اغلب مواد دی‌الکتریک درکاربردهای عمومی خطی هستند، در صورتی‌که اغلب مواد مغناطیسی با کاربردهای مفید غیرخطی‌اند.



شکل ۳۵ـ۹ (الف) در یک نمونهٔ نامغناطیده، سمتگیری گشتاورهای مغناطیسی اتمی کتره‌ای است. (ب) وقتی میدان خارجی $\vec{B}_\circ$ اعمال شود دوقطبیها می‌چرخند تا با آن همسو شوند و جمع برداری گشتاورهای دوقطبی اتمی سهم مغناطیدگی $\mu_\circ\vec{M}$ را در میدان ماده به‌دست می‌دهد.

توزیع شده‌اند (شکل ۳۵ـ۹(الف)). مغناطیدگی که با استفاده از معادلهٔ (۳۵ـ۱۳) محاسبه می‌شود برابر صفر است، زیرا جهتهای کتره‌ای $\vec{\mu}_\circ$ها سبب می‌شود که جمع برداری آنها صفر شود، درست همان‌طور که جمع برداری سرعتهای کتره‌ای مولکولهای نمونه‌ای از گاز، سرعت مرکز جرم کل نمونه را برابر با صفر به‌دست می‌دهد.

وقتی یک میدان مغناطیسی خارجی بر ماده اعمال شود (شاید با قرار دادن آن در داخل سیملوله) گشتاور وارد بر دوقطبیها در جهت همخط کردن آنها با میدان عمل می‌کند (شکل ۳۵ـ۹(ب)). اکنون دیگر جمع برداری گشتاورهای دوقطبی منفرد صفر نیست. حالا، میدان در داخل مادهٔ پارامغناطیسی دو مؤلفه دارد: میدان اعمال‌شدهٔ $\vec{B}_\circ$ و میدان القایی $\mu_\circ\vec{M}$ ناشی از مغناطیدگی دوقطبیها. توجه کنید که این دو میدان موازی یکدیگرند؛ دوقطبیها، میدان اعمال‌شده را تقویت می‌کنند، این رفتار برخلاف مورد الکتریکی است که در آن میدان دوقطبی برخلاف میدان اعمال شده است و در نتیجه میدان الکتریکی کل را در داخل ماده کاهش می‌دهد (شکل ۲۹ـ۱۱ را ببینید). نسبت بین $\mu_\circ\vec{M}$ و $\vec{B}_\circ$ بنابر معادلهٔ (۳۵ـ۱۷) برابر $\kappa_{\mathrm{m}} - ۱$ به‌دست می‌آید که برای مواد پارامغناطیسی مثبت و کوچک است. در جدول ۳۵ـ۲ چند مقدار نوعی را نشان داده‌ایم.

حرکت گرمایی اتمها همسویی دوقطبیها را مختل می‌کند و درنتیجه با افزایش دما خاصیت مغناطیدگی کاهش می‌یابد. رابطهٔ بین M و T را در سال ۱۸۹۵ پیر کوری کشف کرد. او دریافت که این دو با یکدیگر رابطه‌ای معکوس به‌صورت زیر دارند

$$M = C\frac{B_\circ}{T} \qquad (۳۵ـ۱۸)$$

که به قانون کوری معروف است، و ثابت C را ثابت کوری می‌نامند. دما در معادلهٔ (۳۵ـ۱۸) باید برحسب کلوین باشد. معادلهٔ (۳۵ـ۱۸) فقط

جدول ۳۵ـ۲ تراوایی نسبی برخی از مواد پارامغناطیسی در دمای اتاق

ماده	$\kappa_{\mathrm{m}} - ۱$
$Gd_۲O_۳$	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۲}$
$CuCl_۲$	$۳٫۵ \times ۱۰^{-۴}$
کرم	$۳٫۳ \times ۱۰^{-۴}$
تنگستن	$۶٫۸ \times ۱۰^{-۵}$
آلومینیم	$۲٫۲ \times ۱۰^{-۵}$
منیزیم	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۵}$
اکسیژن (در فشار یک جو)	$۱٫۹ \times ۱۰^{-۶}$
هوا (در فشار یک جو)	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۷}$

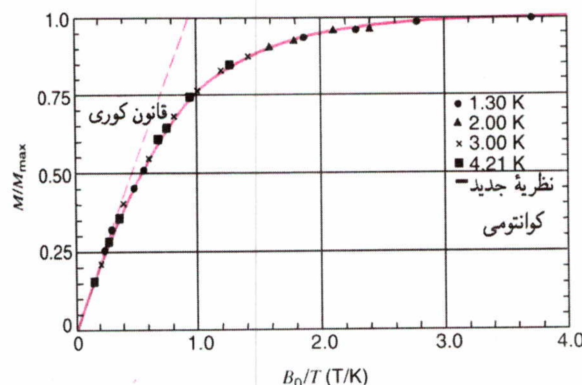
وقتی معتبر است که $B_\circ/T$ کوچک باشد ــ یعنی، برای میدانهای با شدت کم یا دماهای بالا.

برای میدانهای اعمال‌شده با شدت زیاد، مغناطیدگی به سمت مقدار بیشینه‌اش میل می‌کند، این مقدار بیشینه وقتی حاصل می‌شود که تمام دوقطبیها موازی شوند. اگر در حجم V یک ماده تعداد N دوقطبی وجود داشته باشد، بیشینهٔ مقدار $\sum \vec{\mu}_n$ برابر $N\mu_n$ است. این مقدار متناظر است با N بردار موازی $\vec{\mu}_n$. در این حالت معادلهٔ (۳۵ـ۱۳) نتیجه می‌دهد که

$$M_{\max} = \frac{N}{V}\mu_n \qquad (۳۵ـ۱۹)$$

وقتی مغناطیدگی به این مقدار از اشباع برسد، دیگر افزایش شدت میدان خارجی $\vec{B}_\circ$ تأثیری در مغناطیدگی ماده ندارد. قانون کوری، که افزایش خطی مغناطیدگی M را با افزایش $B_\circ$ ایجاب می‌کند، فقط تا وقتی‌که مغناطیدگی بسیار دور از حالت اشباع باشد، یعنی تا هنگامی که $B_\circ/T$ کوچک باشد، معتبر است. شکل ۳۵ـ۱۰ مغناطیدگی اندازه‌گیری‌شدهٔ M را به‌صورت کسری از مقدار بیشینهٔ $M_{\max}$، برحسب $B_\circ/T$ در دماهای متفاوت برای نمک پارامغناطیسی کرم آلوم $CrK(SO_۴)_۲ \cdot ۱۲H_۲O$ نشان می‌دهد. (در این نمک یونهای کرم مسبب خاصیت پارامغناطیسی هستند.) به نحوهٔ رسیدن به اشباع توجه داشته باشید و دقت کنید که قانون کوری فقط برای مقدارهای کوچک $B_\circ/T$ (که متناظر است با میدانهای اعمال‌شده با شدت کم یا دماهای زیاد) معتبر است.

وقتی میدان مغناطیسی خارجی از مادهٔ پارامغناطیسی حذف شود، حرکت گرمایی باعث می‌شود که جهتهای گشتاورهای دوقطبی



شکل ۳۵ـ۱۰ در مواد پارامغناطیسی، نسبت مغناطیدگی M به مقدار اشباع آن یعنی $M_{\max}$ با $B_\circ/T$ تغییر می‌کند.

مغناطیسی دوباره کتره‌ای شوند؛ نیروهای مغناطیسی بین اتمها بسیار ضعیف‌تر از آن‌اند که بتوانند همسویی را حفظ و از کتره‌ای‌شدن جلوگیری کنند. از این اثر می‌توان برای خنک‌سازی در فرایندی به‌نام وامغناطیدگی بی‌دررو استفاده کرد. نمونه‌ای از ماده را در دمای ثابت مغناطیده می‌کنیم. دوقطبیها به حالتی با کمترین انرژی منتقل می‌شوند که در آن به‌طور کامل یا تا اندازه‌ای با میدان اعمال‌شدهٔ خارجی همسو هستند، و در این کار به مواد اطرافشان انرژی منتقل می‌کنند. این انرژی به‌صورت گرما به مخزن گرمایی محیط جریان می‌یابد. اکنون نمونه را از نظر گرمایی از محیط اطرافش منزوی و آن را به‌صورت بی‌دررو وامغناطیده می‌کنیم. وقتی دوقطبیها کتره‌ای شوند، افزایش انرژی مغناطیسی آنها باید با کاهش متناظر در انرژی داخلی سیستم جبران شود (چون در فرایند بی‌دررو گرما نمی‌تواند به یک سیستم منزوی وارد یا از آن خارج شود). بنابراین، باید دمای نمونه کاهش یابد. کمترین دمای قابل حصول با این روش را میدان باقی‌ماندهٔ دوقطبیها معین می‌کند. برای دستیابی به دماهایی از مرتبهٔ $\circ{,}\circ\circ\text{۱}\,\mathrm{K}$ می‌توان از وامغناطش دوقطبیهای مغناطیسی اتمی استفاده کرد، در صورتی‌که وامغناطش دوقطبیهای مغناطیسی هسته‌ای بسیار کوچکتر، دستیابی به دماهایی در گسترهٔ $\text{۱۰}^{-۶}\mathrm{K}$ را ممکن می‌سازد.

دیامغناطیس

در سال ۱۸۴۷ میلادی، مایکل فاراده کشف کرد که آهنربای قوی نمونه‌ای از بیسموت را می‌راند. وی این مواد را دیامغناطیس نامید. (برعکس، آهنربا همواره مواد پارامغناطیس را می‌رباید.) خاصیت دیامغناطیسی در تمام مواد وجود دارد. ولی، معمولاً بسیار ضعیفتر از خاصیت پارامغناطیسی است و بنابراین فقط در موادی که خاصیت پارامغناطیسی ندارند می‌توان آن را به‌آسانی مشاهده کرد. این مواد ممکن است موادی باشند که گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی اتمی آنها صفر است و شاید از اتمهایی ناشی می‌شوند که دارای چندین الکترون هستند و جمع برداری گشتاورهای مغناطیسی مداری و اسپینی آنها صفر می‌شود.

خاصیت دیامغناطیسی همانند اثر میدانهای الکتریکی القایی در الکتروستاتیک است. یک قطعهٔ کوچک از مادهٔ بدون بار مانند کاغذ را میلهٔ باردار با هر قطبیتی می‌رباید. مولکولهای کاغذ گشتاورهای دوقطبی الکتریکی دائمی ندارند بلکه به‌واسطهٔ میدان الکتریکی دارای گشتاورهای دوقطبی القایی می‌شوند و این گشتاورهای القایی ممکن است به‌وسیلهٔ میدان ربوده شوند (شکل ۲۵ـ۵ را ببینید).

در مواد دیامغناطیسی، اتمهایی که هیچ گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی ندارند، وقتی در میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرند، گشتاورهای دوقطبی القایی به‌دست می‌آورند، که این موضوع را در بخش ۲۵ـ۳ مورد بررسی قرار دادیم. فرض کنید که الکترونهای چرخنده در مدارهای اتم مانند حلقه‌های جریان رفتار کنند. وقتی میدان خارجی $\vec{\mathbf{B}}_\circ$ اعمال می‌شود، شارگذرنده از حلقهٔ جریان تغییر می‌کند. با توجه به قانون لنز، حرکت باید چنان تغییر کند که میدان القایی با این افزایش شار مخالفت کند. محاسبه‌ای برمبنای مدارهای دایره‌ای (مسئلهٔ ۷ را ببینید) نشان می‌دهد که تغییر حرکت با اندک افزایش یا کاهش سرعت حرکت مداری صورت می‌گیرد، به‌طوری که بسامد حرکت دایره‌ای مربوط به حرکت مداری به‌صورت زیر تغییر می‌کند

$$\Delta\omega = \pm\frac{eB_\circ}{\text{۲}m} \qquad (\text{۳۵ـ۲۰})$$

که در این معادله $B_\circ$ اندازهٔ میدان خارجی اعمال‌شده و m جرم الکترون است. این تغییر بسامد در حرکت مداری در واقع گشتاور مغناطیسی مداری الکترون را تغییر می‌دهد (معادلهٔ (۳۵ـ۸) و مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۵ را ببینید).

اگر یک اتم از ماده‌ای چون بیسموت را به قطب شمال آهنربا نزدیک کنیم، میدان (که جهتش به طرف خارج از قطب است) در جهت افزایش شار عبوری از حلقهٔ جریانی که نمایشگر الکترون چرخان است افزایش عمل می‌کند. بنابر قانون لنز، باید یک میدان القایی به‌وجود آید که جهت آن مخالف جهت میدان اولیه (به طرف داخل قطب شمال) باشد. قطب شمال القایی در طرفی از حلقهٔ جریان قرار می‌گیرد که به سمت آهنرباست، و همان‌طور که در شکل ۳۵ـ۵ نشان داده شده است، دو قطب شمال یکدیگر را می‌رانند.

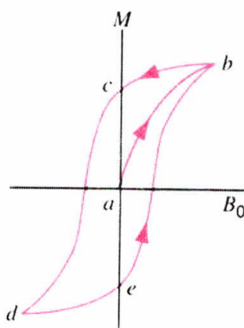
جدول ۳۵ـ۳ تراوایی نسبی برخی از مواد دیامغناطیس در دمای اتاق

ماده	$\kappa_m - ۱$
جیوه	$-۳٫۲ \times ۱۰^{-۵}$
نقره	$-۲٫۶ \times ۱۰^{-۵}$
بیسموت	$-۱٫۷ \times ۱۰^{-۵}$
الکل اتیلیک	$-۱٫۳ \times ۱۰^{-۵}$
مس	$-۹٫۷ \times ۱۰^{-۶}$
کربن دیوکسید (در فشار ۱ جو)	$-۱٫۱ \times ۱۰^{-۸}$
نیتروژن (در فشار ۱ جو)	$-۵٫۴ \times ۱۰^{-۹}$

در هر حال، این اثر روی می‌دهد و ارتباطی به جهت چرخش در مدار اصلی ندارد و در نتیجه مغناطیدگی در مادهٔ دیامغناطیس همواره با میدان اعمال‌شده مخالفت می‌کند. نسبت سهم مغناطیدگی در میدان، $\mu_\circ M$، به میدان اعمال‌شدهٔ $B_\circ$، بنابر معادلهٔ (۳۵ـ۱۷) با عبارت $\kappa_m - ۱$ مشخص می‌شود که برای مواد دیامغناطیس نوعی در محدودهٔ $-۱۰^{-۶}$ تا $-۱۰^{-۵}$ است. جدول ۳۵ـ۳ برخی از مواد دیامغناطیسی و ثابت تراوایی آنها را نشان می‌دهد.

فرومغناطیس

فرومغناطیس، مانند پارامغناطیس در موادی رخ می‌دهد که اتمهای آن مواد دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی باشند. آنچه مواد فرومغناطیس را از مواد پارامغناطیس متمایز می‌کند آن است که در این مواد بین گشتاور دوقطبیهای اتمهای مجاورِ هم برهم‌کنشی قوی وجود دارد که آنها را حتی پس از حذف میدان مغناطیسی خارجی همسو نگه می‌دارد. وقوع این پدیده تابع قدرت دوقطبیهای اتمی است و، چون میدان دوقطبی با فاصله تغییر می‌کند، به فاصلهٔ بین اتمهای ماده نیز بستگی دارد. بعضی از اتمها ممکن است در یک نوع ماده فرومغناطیس باشند و در مادهٔ دیگر فرومغناطیس نباشند، زیرا فاصلهٔ بین اتمها در مواد مختلف، متفاوت است. مواد فرومغناطیسی شناخته‌شده در دمای اتاق شامل عنصرهای آهن، کبالت، و نیکل است. عنصرهای فرومغناطیسی کمتر شناخته‌شده، که برخی از آنها خاصیت فرومغناطیسی خود را در دمایی بسیار پایین‌تر از دمای اتاق بروز می‌دهند، عبارت‌اند از عنصرهای خاکهای کمیاب، مانند گادولینیم یا دیسپروسیم. ترکیبهای شیمیایی و آلیاژها نیز ممکن است فرومغناطیس باشند؛ مثلاً، CrO_2، ترکیب اصلی نوارهای ثبت مغناطیسی، یک مادهٔ فرومغناطیس است



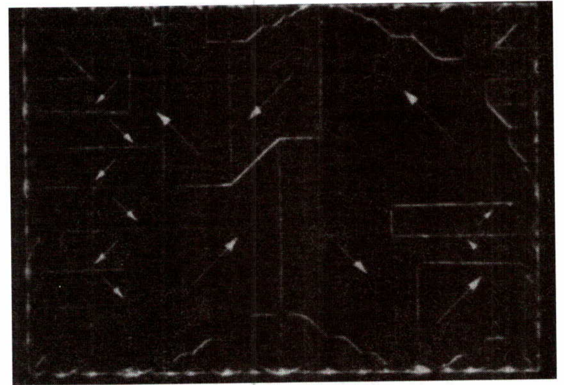
شکل ۳۵ـ۱۱ تغییرات مغناطیدگی یک نمونه مادهٔ فرومغناطیسی وقتی که میدان اعمال‌شده تغییر می‌کند. حلقهٔ $bcdeb$ را منحنی پسماند می‌خوانیم.

با آنکه هیچ‌کدام از عناصر کرم و اکسیژن در دمای اتاق فرومغناطیس نیستند.

می‌توان با افزایش دمای ماده، جفت‌شدگی بین اتمهای مجاور را که باعث خاصیت فرومغناطیسی می‌شود کاهش داد. دمایی که در آن مادهٔ فرومغناطیس به پارامغناطیس تبدیل می‌شود دمای کوری آن ماده می‌نامیم. به‌عنوان مثال، دمای کوری آهن $۷۷۰^\circ C$ است؛ در بالاتر از این دما آهن یک مادهٔ پارامغناطیس است. دمای کوری فلز گادولینیم $۱۶^\circ C$ است؛ گادولینیم در دمای اتاق پارامغناطیس است، در حالی‌که در دماهای کمتر از $۱۶^\circ C$ گادولینیم فرومغناطیس می‌شود.

تقویت میدان اعمال‌شدهٔ خارجی در مواد فرومغناطیسی قابل ملاحظه و چشمگیر است. میدان مغناطیسی کل $\vec{B}$ در مادهٔ فرومغناطیس ممکن است $۱۰^۳$ یا $۱۰^۴$ برابر میدان اعمال‌شدهٔ خارجی $\vec{B}_\circ$ باشد. تراوایی κ_m مادهٔ فرومغناطیس ثابت نیست؛ نه میدان $\vec{B}$ و نه مغناطیدگی $\vec{M}$، حتی برای مقادیر کوچک $\vec{B}_\circ$، به‌طور خطی با میدان $\vec{B}_\circ$ افزایش نمی‌یابند.

پسماند و حوزه‌های مغناطیسی. می‌خواهیم مادهٔ فرومغناطیسی مانند آهن را در سیملولهٔ شکل ۳۵ـ۸(ب) قرار دهیم. فرض می‌کنیم در ابتدا جریان در سیملوله صفر و آهن نامغناطیده باشد، به‌طوری که در ابتدا $B_\circ$ و M هر دو صفر باشند. شدت میدان $B_\circ$ را با افزایش جریان در سیملوله افزایش می‌دهیم، مغناطیدگی به‌سرعت به مقدار اشباع افزایش می‌یابد که با پاره‌خط ab در شکل ۳۵ـ۱۱ نشان داده شده است. اکنون جریان در سیملوله را به صفر کاهش می‌دهیم. مغناطیدگی در مسیر اولیه به عقب برنمی‌گردد، بلکه در عوض آهن حتی پس از آنکه میدان اعمال‌شدهٔ $B_\circ$ برابر صفر می‌شود مغناطیده باقی می‌ماند (نقطهٔ c). اگر جهت جریان را در سیملوله برعکس کنیم به اشباع مغناطیدگی در جهت مخالف می‌رسیم (نقطهٔ d)، و



شکل ۳۵ـ۱۲ طرح حوزه‌های تک‌بلور نیکل. خطهای سفیدی که مرزهای حوزه‌ها را مشخص می‌کنند، با پاشیدن پودر اکسید آهن بر روی سطح نیکل ایجاد شده‌اند. پیکانها سمتگیری دوقطبیهای مغناطیسی را در حوزه‌ها نشان می‌دهند.

اگر دوباره جریان را به صفر برسانیم درمی‌یابیم که نمونه در نقطهٔ e مغناطیدگی دائمی را حفظ می‌کند. سپس می‌توانیم دوباره جریان را زیاد کنیم تا به مغناطیدگی اشباع در جهت اولیه (نقطهٔ b) برسیم. مسیر $bcdeb$ را می‌توان به‌طور مکرر پیمود.

رفتار نشان داده‌شده در شکل ۳۵ـ۱۱ را پسماند می‌خوانیم. آهن در نقاط c و e، با آنکه هیچ جریانی در سیملوله وجود ندارد، مغناطیده است. علاوه بر این، چگونگی مغناطیسی‌شدن آهن در آن "محفوظ می‌ماند"، مغناطیدگی حاصل از جریان منفی با مغناطیدگی ناشی از جریان مثبت تفاوت دارد. این "حافظه" برای ضبط مغناطیسی اطلاعات، روی نوارهای کاست یا دیسکهای کامپیوتری ضروری است.

رسیدن مادهٔ فرومغناطیس به اشباع با سازوکاری متفاوت از سازوکار مربوط به مادهٔ پارامغناطیس (که آن را با چرخش تک‌تک دوقطبیهای مغناطیسی و همسوشدن آنها با میدان اعمال‌شده توصیف کرده‌ایم) صورت می‌گیرد. ماده‌ای مانند آهن از شمار بسیار زیادی بلورهای میکروسکوپی تشکیل شده است. در هر بلور حوزه‌های مغناطیسی قرار دارد که ناحیه‌هایی با ابعاد تقریبی ۰٫۱ mm هستند که در آنها جفت‌شدگی دوقطبیهای مغناطیسی اتمی باعث همسویی کامل تمام اتمها می‌شود. در شکل ۳۵ـ۱۲ طرح حوزه‌های موجود در تک‌بلور نیکل فرومغناطیس را نشان داده‌ایم. در این بلور تعداد زیادی حوزه وجود دارد، که در هر یک از آنها دوقطبیها در جهت خاصی قرارگرفته‌اند و حاصل‌جمع تمام این گشتاورهای دوقطبی در مادهٔ فرومغناطیس نامغناطیده به مغناطیدگی صفر می‌انجامد.

وقتی مادهٔ فرومغناطیس در میدان خارجی قرار می‌گیرد، دو رویداد ممکن است رخ دهد: (۱) دوقطبیهای خارج از دیوارهٔ حوزه‌های همسو با میدان می‌توانند بچرخند تا خود را همسو کنند، درواقع حوزه‌های همسو می‌توانند با کم‌شدن حوزه‌های مجاور رشد کنند و (۲) دوقطبیهای موجود در حوزه‌های ناهمسو می‌توانند بچرخند و کاملاً با میدان اعمال‌شده همسو شوند. در هر صورت، پس از اعمال میدان خارجی دوقطبیهای بیشتری با میدان همسو می‌شوند و ماده دارای مغناطیدگی زیادی می‌شود. پس از حذف میدان خارجی، دیوارهای حوزه‌ها کاملاً به‌جای اولیه‌شان باز نمی‌گردند و ماده مغناطیدگی در جهت میدان اعمال‌شده را حفظ می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۴ یک مادهٔ پارامغناطیسی از اتمهایی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $۳٫۳\mu_B$ تشکیل شده است. این ماده را در یک میدان مغناطیسی به شدت ۵٫۳ T قرار می‌دهیم. تا چه دمایی باید آن را سرد کنیم تا انرژی مغناطیسی هر اتم به اندازهٔ میانگین انرژی جنبشی انتقالی به‌ازای هر اتم بشود؟

حل. انرژی مغناطیسی هر دوقطبی در میدان خارجی برابر است با $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ و میانگین انرژی جنبشی انتقالی به‌ازای هر اتم برابر است با $(۳/۲)kT$ (بخش ۲۲ـ۴ را ببینید). اندازهٔ این دو کمیت وقتی برابر می‌شود که دما برابر مقدار زیر باشد

$$T = \frac{\mu_B}{(۳/۲)k} = \frac{(۳٫۳)(۹٫۲۷\times ۱۰^{-۲۴}\mathrm{J/T})(۵٫۲\,\mathrm{T})}{(۱٫۵)(۱٫۳۸\times ۱۰^{-۲۳}\mathrm{J/K})}$$

$$= ۷٫۷\,\mathrm{K}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۵ تغییر گشتاور مغناطیسی الکترون چرخان را در میدان اعمال‌شدهٔ $B_۰$ با شدت ۲٫۰ T که عمود بر صفحهٔ مدار اثر می‌کند، محاسبه کنید. شعاع مدار را $r = ۵٫۲۹\times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{m}$ در نظر بگیرید که متناظر با حالت عادی یک اتم هیدروژن است.

حل. معادلهٔ (۳۵ـ۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mu = \frac{۱}{۲}erv = \frac{۱}{۲}er^۲\omega$$

که در آن از $v = r\omega$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین تغییر گشتاور مغناطیسی $\Delta\mu$ متناظر با تغییر بسامد زاویه‌ای چنین است

$$\Delta\mu = \frac{۱}{۲}er^۲\Delta\omega = \frac{۱}{۲}er^۲\left(\pm\frac{eB_۰}{۲m}\right) = \pm\frac{e^۲B_۰r^۲}{۴m}$$

$$= \pm\frac{(۱٫۶\times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})^۲(۲٫۰\,\mathrm{T})(۵٫۲۹\times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{m})^۲}{۴(۹٫۱\times ۱۰^{-۳۱}\mathrm{kg})}$$

$$= \pm ۳٫۹\times ۱۰^{-۲۹}\mathrm{J/T}$$

که در اینجا از معادلهٔ (۳۵ـ۲۰) برای $\Delta\omega$ استفاده کردیم.

اگر این مقدار را با گشتاور مغناطیسی، $\mu_B = ۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۴}\,J/T$، مقایسه کنیم، می‌بینیم که این اثر فقط در حدود ۴×۱۰^{-۶} برابر گشتاور مغناطیسی است. این مقدار از نظر مرتبهٔ بزرگی با آنچه برای مواد دیامغناطیس انتظار داریم سازگار است (جدول ۳۵ـ۳).

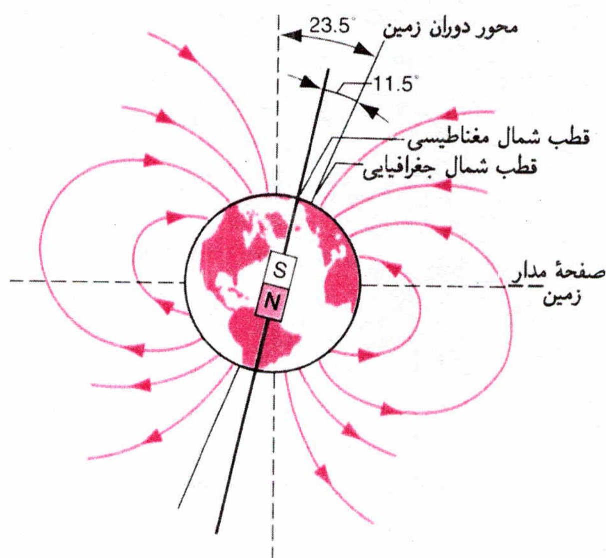
۳۵ـ۶ خواص مغناطیسی سیاره‌ها (اختیاری)

با آنکه از قطب‌نماهای مغناطیسی برای قرون متمادی به‌عنوان ابزار ناوبری استفاده می‌شد، اما توضیح رفتار آنها در حدود سال ۱۶۰۰ میلادی ارائه شد که سر ویلیام گیلبرت، که بعدها پزشک ملکه الیزابت اول شد، اظهار کرد که زمین یک آهنربای بسیار بزرگ است، که قطبهای مغناطیسی آن نزدیک قطبهای جغرافیایی است. پژوهشگران بعدی نقشهٔ میدان مغناطیسی زمین را به‌دقت ترسیم کردند و فضاپیماهای میان‌سیاره‌ای میدانهای مغناطیسی دیگر سیاره‌ها را بررسی کردند.

میدان زمین را می‌توان تقریباً میدان یک دوقطبی مغناطیسی، با گشتاور $\mu = ۸٫۰ \times ۱۰^{۲۲}\,J/T$، در نظر گرفت. شدت میدان در سطح زمین از حدود $۳۰\,\mu T$ در حوالی استوا تا حدود $۶۰\,\mu T$ در نزدیکی قطبها تغییر می‌کند. برای دوقطبی، انتظار داریم که میدان مغناطیسی روی محور دو برابر میدان روی عمودمنصف و در فاصلهٔ یکسان باشد، درست به همان صورت که برای دوقطبی الکتریکی اتفاق می‌افتد (بخش ۲۶ـ۳ را ببینید). این مقدارها برای میدان مغناطیسی زمین با مقدارهای چشمداشتی سازگار است.

محور دوقطبی با محور دوران زمین (که خود با خط عمود بر صفحهٔ مدار زمین به دور خورشید، مطابق شکل ۳۵ـ۱۳، زاویهٔ $۲۳٫۵^\circ$ می‌سازد) زاویه‌ای در حدود $۱۱٫۵^\circ$ تشکیل می‌دهد. آنچه معمولاً قطب شمال مغناطیسی می‌خوانیم و در شمال کانادا قرار دارد، در واقع قطب جنوب دوقطبی زمین است، که آن را با همگرایی خطوط میدان مغناطیسی تعریف کرده‌ایم. قطب جنوب مغناطیسی را، که در اقیانوس منجمد جنوبی قرارگرفته است، به‌وسیلهٔ قطب شمال دوقطبی نشان داده‌ایم، زیرا خطهای $\vec{B}$ از آن خارج می‌شوند. به عبارت دیگر، وقتی از قطب‌نمای مغناطیسی برای جهت‌یابی استفاده می‌کنید، آن سر عقربه که به سمت شمال قرار می‌گیرد در واقع قطب شمال عقربهٔ قطب‌نمای شماست؛ این قطب را قطب جنوب واقعی، که در نزدیکی قطب شمال جغرافیایی زمین قرار دارد، می‌رباید.

میدان مغناطیسی زمین نه تنها در ناوبری که در کان‌یابی و مخابرات نیز دارای اهمیت کاربردی است. بنابراین در طی سالیان



شکل ۳۵ـ۱۳ نمایش ساده‌شده‌ای از میدان مغناطیسی زمین در نزدیکی سطح آن. توجه کنید که قطب شمال مغناطیسی در واقع قطب جنوب دوقطبی نشانگر میدان زمین است. محور مغناطیسی تقریباً در وسط محور دوران زمین و خط عمود بر صفحهٔ مدار زمین (خط‌چین قائم در شکل) قرار دارد.

متمادی به‌صورت گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است، بر روی سطح زمین این کار با اندازه‌گیری مقدار و جهت میدان و بر فراز سطح زمین با بهره‌گیری از ماهواره‌های مداری انجام می‌شود. در بین آثار بی‌شمار میدان مغناطیسی زمین می‌توان به کمربندهای تابشی وان آلن که زمین را در برمی‌گیرند (شکل ۳۲ـ۱۵ را ببینید) و آنچه به "نورهای شمالی" یا شفق درخشان قطبی شمالی* موسوم است (شکل ۳۵ـ۱۴) اشاره کرد.



شکل ۳۵ـ۱۴ شفق شگفت‌آور قطبی شمالی، که به "نورهای شمالی" نیز معروف است.

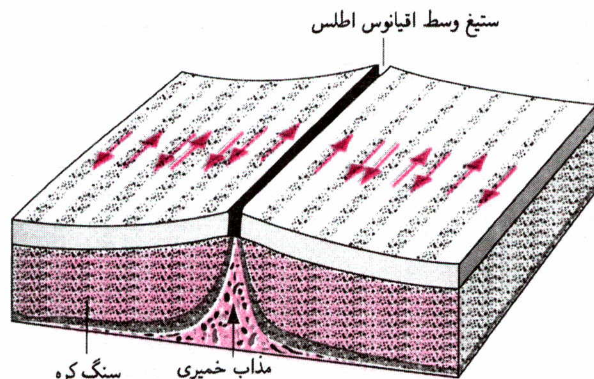
* مقالهٔ زیر را ببینید:
"The Dynamic Aurora," by Syun-Ichi Akasofu, *Scientific American*, May 1989, p. 90.

به‌واسطهٔ وجود سنگهای مغناطیده در زمین، شاید وسوسه شویم که سرچشمهٔ میدان مغناطیسی زمین را هسته‌ای متشکل از صخره‌های همواره مغناطیده در نظر بگیریم. ولی، این پیشنهاد نمی‌تواند درست باشد، زیرا دما در هستهٔ زمین چندین هزار درجه است که بسیار بیشتر از دمای کوری برای آهن است. بنابراین آهن موجود در هستهٔ زمین به هیچ‌وجه نمی‌تواند فرومغناطیس باشد.

علاوه بر آن، براساس اندازه‌گیریهایی که در چند صد سال گذشته انجام شده است می‌دانیم که قطب شمال مغناطیسی نسبت به قطب شمال جغرافیایی تغییر مکان می‌دهد و با توجه به نشانه‌های زمین‌شناسی می‌دانیم که در هر چند صد هزار سال قطبها جابه‌جا می‌شوند. (به‌علاوه، همان‌طور که خواهیم دید، بعضی از سیاره‌های منظومهٔ شمسی با ترکیباتی شبیه زمین دارای هیچ‌گونه میدان مغناطیسی نیستند، در حالی‌که سیاره‌های دیگری که قطعاً حاوی هیچ‌گونه مادهٔ مغناطیسی نیستند میدانهای بسیار بزرگی دارند.) تشریح این مشاهدات برمبنای وجود هستهٔ دائماً مغناطیده دشوار است.

سرچشمهٔ واقعی و دقیق خاصیت مغناطیسی زمین به‌درستی شناخته نشده است، ولی احتمالاً نوعی اثر دینامو در آن دخیل است. هستهٔ بیرونی حاوی مواد معدنی به‌صورت مایع است، که به‌آسانی می‌تواند رسانای الکتریسیته باشد. یک میدان مغناطیسی اولیهٔ کوچک، بنابر قانون القای فاراده، جریانهایی را در این رسانای متحرک به‌وجود می‌آورد. این جریانها می‌توانند میدان مغناطیسی را تقویت کنند و این میدان تقویت‌شده همان چیزی است که به‌صورت میدان مغناطیسی زمین مشاهده می‌کنیم. ولی، از مطالعهٔ مبحث القا می‌دانیم که بر رسانای متحرک در میدان مغناطیسی نیروی ترمزی وارد می‌شود. چشمه و انرژی مورد نیاز برای غلبه بر نیروی ترمزی و حفظ وضعیت حرکتی هستهٔ زمین هنوز شناخته نشده است.

زمین حاوی سابقه‌ای است که حکایت از تغییر جهت و اندازهٔ میدان مغناطیسی دارد. به‌عنوان مثال سفالهای قدیمی، حاوی ذرات کوچک آهن هستند، که به هنگام سرد شدن پس از پخت در میدان مغناطیسی زمین مغناطیده شده‌اند. از شدت مغناطیدگی این ذرات، می‌توان به شدت میدان مغناطیسی زمین در زمان و مکانی که پخت صورت گرفته است پی برد. یک سابقهٔ زمین‌شناختی با منشأ مشابه در کف اقیانوس باقی مانده است (شکل ۳۵ـ۱۵). وقتی مواد مذاب درون زمین از پشته‌ای درکف اقیانوس تراوش می‌کند و منجمد می‌شود، ذرات آهن موجود در آن مغناطیده می‌شوند. جهت مغناطیدگی ذرات جهت میدان زمین را مشخص می‌کند. از طرحهای مغناطیدگی، می‌توان



شکل ۳۵ـ۱۵ وقتی مواد مذاب از پشته‌ای درکف اقیانوس خارج و سرد می‌شود، سابقه‌ای از جهت میدان مغناطیسی زمین در آن زمان را نگه می‌دارد (پیکانها). هر قسمت ممکن است نشان‌دهندهٔ زمان ۱۰۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ سال باشد.

نتیجه گرفت که قطبهای مغناطیسی زمین به‌طور نسبتاً منظم در طول تاریخ زمین‌شناختی تعویض شده‌اند. این سروته شدن یا شمال و جنوب‌شدن هر ۱۰۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ سال رخ می‌دهد و اخیراً زیادتر شده است. علت این جابه‌جایی قطبها و نیز آهنگ شتاب گرفتن آن مشخص نشده است ولی از قرار معلوم به نحوی به اثر دینامو مربوط می‌شود.*

در سالهای اخیر، کاوه‌های فضایی میان‌سیاره‌ای توانسته‌اند جهت و اندازهٔ میدانهای مغناطیسی سیاره‌ها را اندازه بگیرند. این مشاهدات، این فرض را که سازوکار دینامو سرچشمهٔ این میدانهاست تأیید می‌کند. جدول ۳۵ـ۴ مقدارهای مربوط به گشتاور دوقطبی مغناطیسی و شدت میدان مغناطیسی روی سطح سیاره‌ها را نشان می‌دهد.

زهره، که هستهٔ آن شبیه به هستهٔ زمین است، هیچ‌گونه میدان مغناطیسی ندارد، زیرا دوران آن به گرد خود خیلی کندتر از آن است (هر ۲۴۴ روز زمینی یک دور) که بتواند اثر دینامو را حفظ کند. مریخ، که دورهٔ حرکت دورانی آن تقریباً مانند زمین است، میدان مغناطیسی بسیار کوچکی دارد زیرا از قرار معلوم هستهٔ این سیاره بیش از اندازه کوچک است. این نتیجه‌گیری از اندازه‌گیری چگالی میانگین آن به‌دست آمده است. سیاره‌های بیرونی (مشتری و فراتر از آن) عمدتاً از هیدروژن و هلیم تشکیل شده‌اند، که معمولاً انتظار نداریم مغناطیسی باشند؛ ولی

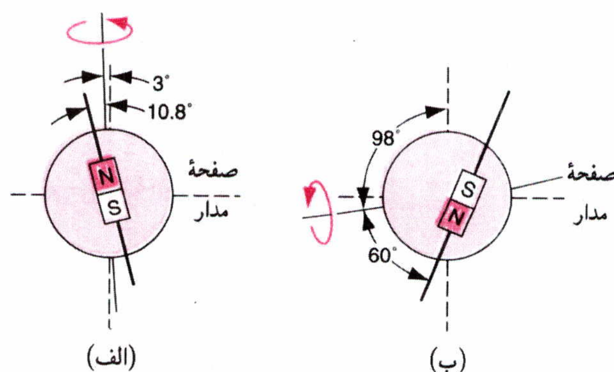
* برای کسب اطلاعات بیشتر مقاله‌های زیر را ببینید:
"The Evolution of the Earth's Magnetic Field," by Jeremy Bloxham and David Gubbins, *Scientific American*, December 1989, p. 68; and "The Source of the Earth's Magnetic Field," by Charles R. Carrigan and David Gubbins, *Scientific American*, February 1979, p. 118.

جدول ۳۵ـ۴ میدانهای مغناطیسی در منظومهٔ شمسی

سیاره	$\mu(\mathrm{A\cdot m^۲})$	$B(\mu\mathrm{T})$ روی سطح سیاره
عطارد (تیر)	۵×۱۰^{۱۹}	۰٫۳۵
زهره (ناهید)	$< ۱۰^{۱۹}$	$< ۱٫۰$
زمین	$۸٫۰\times ۱۰^{۲۲}$	۳۰
مریخ (بهرام)	$۱٫۵\times ۱۰^{۱۹}$	۰٫۰۴
مشتری (برجیس)	$۱٫۶\times ۱۰^{۲۷}$	۴۳۰
زحل (کیوان)	$۴٫۷\times ۱۰^{۲۵}$	۲۰
اورانوس	$۴٫۰\times ۱۰^{۲۴}$	۳۰
نپتون	$۲٫۲\times ۱۰^{۲۴}$	۲۰

در فشارها و دماهای زیاد در نزدیکی مرکز این سیاره‌ها، هیدروژن و هلیم ممکن است مانند فلزات عمل کنند، به‌ویژه رسانندگی الکتریکی بسیار زیاد که اثر دینامو را امکان‌پذیر می‌سازد.

در شکل ۳۵ـ۱۶ سمتگیری محورهای دوران و میدان مغناطیسی مشتری و اورانوس را نشان داده‌ایم؛ آنها را با محورهای زمین در شکل ۳۵ـ۱۳ مقایسه کنید. توجه کنید که محور دوران اورانوس، برخلاف سایر سیاره‌ها، با صفحهٔ مدار آن تقریباً موازی است. همچنین توجه کنید که محور مغناطیسی اورانوس نسبت به محور دوران آن به‌صورت بدی ناهمسو است و دوقطبی از مرکز سیاره جابه‌جا شده است. همین وضعیت برای سیارهٔ نپتون نیز وجود دارد. متأسفانه، اطلاعات رصدی ما دربارهٔ سیاره‌ها محدود به اطلاعاتی است که در پروازهای فضایی



شکل ۳۵ـ۱۶ (الف) سمتگیری دوقطبی مغناطیسی مشتری نسبت به محور دوران آن و نسبت به صفحهٔ مدارش. توجه کنید که، برعکس زمین، قطب شمال این سیاره واقعاً قطب شمال دوقطبی مغناطیسی آن است. (ب) سمتگیری محور دوقطبی مغناطیسی اورانوس.

در حوالی سیاره‌ها در مدت حدود یکی دو روز گردآوری شده است. اگر بتوانیم سایر خواص فیزیکی و سوابق زمین‌شناختی آنها را بررسی کنیم، آگاهی بیشتری دربارهٔ سرچشمهٔ خاصیت مغناطیسی سیاره‌ای به‌دست خواهیم آورد.*

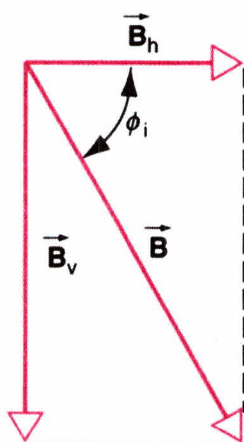
مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۶ نتیجهٔ اندازه‌گیری مؤلفهٔ افقی B_h میدان مغناطیسی زمین در توسان آریزونا $۲۶\mu\mathrm{T}$ بوده است. با آویزان کردن یک آهنربای کوچک مانند عقربهٔ قطب‌نما که می‌تواند آزادانه در صفحهٔ قائم تاب بخورد، می‌توان زاویهٔ بین جهت میدان مغناطیسی و صفحهٔ افق را که زاویهٔ میل مغناطیسی ϕ_i نامیده می‌شود، اندازه‌گیری کرد. زاویهٔ میل مغناطیسی اندازه‌گیری‌شده در توسان $۵۹°$ است. شدت میدان مغناطیسی و مؤلفهٔ قائم این میدان را در آن محل مشخص کنید.

حل. همان‌طور که در شکل ۳۵ـ۱۷ نشان می‌دهد، شدت میدان را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد

$$B=\frac{B_\mathrm{h}}{\cos\phi_\mathrm{i}}=\frac{۲۶\mu\mathrm{T}}{\cos ۵۹°}=۵۰\,\mu\mathrm{T}$$

مؤلفهٔ قائم این میدان چنین است

$$B_\mathrm{v}=B_\mathrm{h}\tan\phi_\mathrm{i}=(۲۶\mu\mathrm{T})(\tan ۵۹°)=۴۳\mu\mathrm{T}$$



شکل ۳۵ـ۱۷ مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۶. مؤلفه‌های افقی و قائم میدان مغناطیسی زمین در حوالی شهر توسان در ایالت آریزونا. زاویهٔ ϕ_i زاویهٔ میل مغناطیسی است.

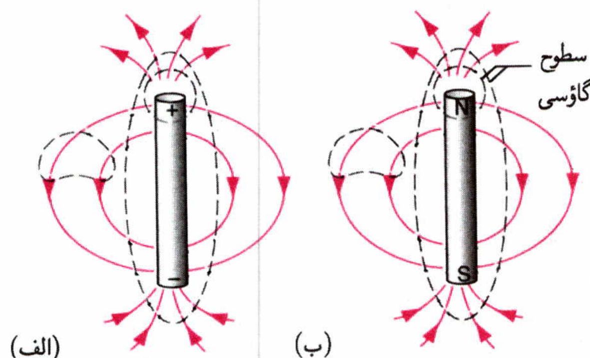
* برای کسب اطلاعات بیشتر مقاله‌های زیر را ببینید:
"Magnetic Fields in the Cosmos," by E. N. Parker, *Scientific American*, August 1983, p. 44; and "Uranus," by Andrew P. Ingersoll, *Scientific American*, January 1987, p. 38.

همان‌طور که انتظار می‌رود (شکل ۳۵ـ۱۳ را ببینید) برای میدان دوقطبی مقدارهای اندازه‌گیری‌شده برای زاویهٔ میل مغناطیسی از °۰ در نزدیکی استوا (در واقع، استوای مغناطیسی) تا °۹۰ در نزدیکی قطبهای مغناطیسی تغییر می‌کند.

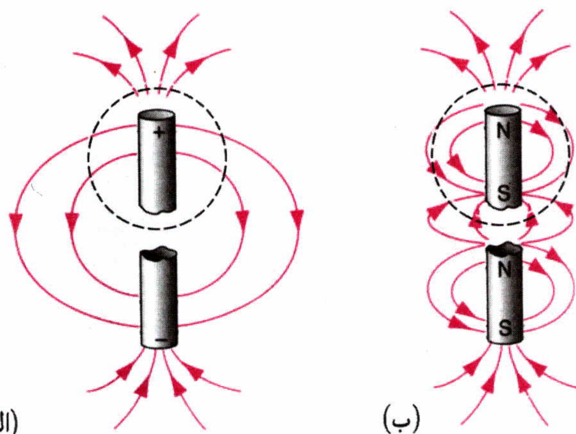
۳۵ـ۷ قانون گاؤس برای مغناطیس

شکل ۳۵ـ۱۸ (الف) میدان الکتریکی یک میلهٔ عایق را نشان می‌دهد که در دو سر آن مقدار مساوی بارهای مثبت و منفی قرارگرفته است. این نمونه‌ای از دوقطبی الکتریکی است. شکل ۳۵ـ۱۸ (ب) مورد مشابه مربوط به دوقطبی مغناطیسی، مانند آهنربای تیغه‌ای، را نشان می‌دهد، که یک سر آن قطب شمال و سر دیگر آن قطب جنوب است. در این سطح موارد الکتریکی و مغناطیسی کاملاً یکسان به نظر می‌رسند. (شکل ۲۶ـ۱۴ (ب) را با شکل ۳۲ـ۶ مقایسه کنید تا نمود دیگری از این همانندی را ببینید.) در واقع، ممکن است به این نتیجه برسیم که وجود تک‌قطبیهای مغناطیسی منفرد شبیه بارهای الکتریکی را به‌عنوان یک اصل موضوع بپذیریم؛ این قطبها، اگر وجود داشته باشند، میدانهای مغناطیسی را به‌وجود می‌آورند که (مانند میدانهای الکتریکی حاصل از بارهای الکتریکی) با شدت میدان قطب متناسب‌اند و با مجذور فاصله از قطب نسبت عکس دارند. بعداً خواهیم دید که، این فرض با آزمایش سازگار نیست.

فرض کنید اجسام شکل ۳۵ـ۱۸ را نصف و دو قسمت را از هم جدا کنیم. شکل ۳۵ـ۱۹ نشان می‌دهد که موارد الکتریکی و مغناطیسی دیگر شبیه یکدیگر نیستند. در مورد دوقطبی الکتریکی، دو جسم داریم که، اگر به‌قدر کافی از هم دور شوند، می‌توان آنها را با بارهای نقطه‌ای با قطبشهای مخالف در نظر گرفت، که هر کدام میدان مشخصهٔ بار نقطه‌ای را به وجود می‌آورند. ولی، در مورد دوقطبی مغناطیسی، قطبهای شمال و جنوب منفرد و منزوی به‌دست نمی‌آوریم بلکه یک زوج آهنربا داریم که هر یک قطبهای شمال و جنوب خودشان را دارند.



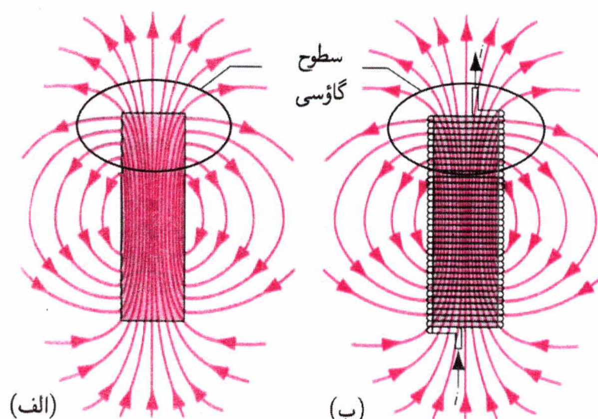
شکل ۳۵ـ۱۸ (الف) یک دوقطبی الکتریکی، متشکل از یک میلهٔ عایق که بار مثبت در یک سر و بار منفی در سر دیگر آن قرار گرفته است. در این شکل چند سطح گاؤسی نشان داده شده است. (ب) دوقطبی مغناطیسی، یک آهنربای تیغه‌ای است که قطب شمال در یک سر و قطب جنوب در سر دیگر آن قرار دارد.



شکل ۳۵ـ۱۹ (الف) وقتی دوقطبی الکتریکی شکل ۳۵ـ۱۸ (الف) را دو نیم کنیم، بار مثبت روی یک نیمه و بار منفی روی نیمهٔ دیگر قرار می‌گیرد. (ب) وقتی دوقطبی مغناطیسی شکل ۳۵ـ۱۸ (ب) را دو نیم کنیم، یک زوج قطب شمال و جنوب جدید پدید می‌آید. به اختلاف بین طرحهای میدان در دو حالت توجه کنید.

به نظر می‌رسد که این، یک اختلاف مهم بین دوقطبیهای الکتریکی و مغناطیسی است: دوقطبی الکتریکی را می‌توان به بارها (یا "قطبها") ی تشکیل‌دهندهٔ آن تقسیم کرد، ولی این کار برای دوقطبی مغناطیسی امکان‌پذیر نیست. هر بار که بکوشیم یک دوقطبی مغناطیسی را به قطبهای شمال و جنوب جداگانه تقسیم کنیم، یک زوج دوقطبی جدید به وجود می‌آوریم. این فرایند به‌صورت میکروسکوپی، تا سطح تک‌تک اتمهای منفرد ادامه می‌یابد. هر اتم مانند دوقطبی مغناطیسی عمل می‌کند و یک قطب شمال و یک قطب جنوب دارد، و تا آنجا که امروزه می‌دانیم، به نظر می‌رسد که دوقطبی کوچکترین یکای بنیادی ساختار مغناطیسی است، و نه تک‌قطبی منزوی.

این اختلاف بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک بیان ریاضی به‌صورت قانون گاؤس دارد. در شکل ۳۵ـ۱۸ (الف)، شار الکتریکی از هر یک از سطحهای گاؤسی به مقدار بار خالصی بستگی دارد که آن سطح در برمی‌گیرد. اگر سطح هیچ باری را در برنگیرد، یا حاوی بار خالصی نباشد (یعنی، شامل مقدار مساوی بارهای مثبت و منفی، مانند دوقطبیهای الکتریکی کامل باشد)، شار بردار میدان الکتریکی از آن سطح صفر است. اگر سطح، دوقطبی را به‌گونه‌ای قطع کند که



شکل ۳۵ـ۲۰ خطهای میدان $\vec{\mathbf{B}}$ برای (الف) یک آهنربای میله‌ای و (ب) یک سیملولهٔ کوتاه. در هر یک از این دو مورد قطب شمال در بالای شکل قرار دارد. خط‌چینها سطوح گاؤسی را مشخص می‌کنند.

حاوی بار خالص q شود، شار Φ_E میدان الکتریکی از قانون گاؤس به‌دست می‌آید:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q/\epsilon_\circ \qquad (۳۵\text{ـ}۲۱)$$

می‌توانیم، مانند شکل ۳۵ـ۱۸(ب)، برای میدان مغناطیسی هم سطوح گاؤسی ترسیم کنیم. اگر سطح گاؤسی حاوی هیچ "بار مغناطیسی" خالصی نباشد، شار Φ_B میدان مغناطیسی که از آن می‌گذرد صفر است. ولی، دیدیم که، حتی آن سطوح گاؤسی که آهنربای میله‌ای را دو نیم می‌کنند حاوی هیچ بار مغناطیسی خالصی نیستند، زیرا هر بار که مغناطیس را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، قطعه‌ای به‌دست می‌آید که هم قطب شمال دارد و هم قطب جنوب.

صورت مغناطیسی قانون گاؤس را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\Phi_B = \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \circ \qquad (۳۵\text{ـ}۲۲)$$

شار خالص میدان مغناطیسی گذرنده از هر سطح بسته‌ای صفر است.

شکل ۳۵ـ۲۰، جزییات بیشتری از میدانهای مغناطیسی مربوط به آهنربای میله‌ای و سیملوله را نشان می‌دهد، که هر دوی آنها را می‌توان دوقطبی مغناطیسی در نظر گرفت. توجه کنید که در شکل ۳۵ـ۲۰(الف) خطوط $\vec{\mathbf{B}}$ در داخل آهنربا وارد سطح گاؤسی می‌شوند و در خارج از محدودهٔ آهنربا آن را ترک می‌کنند. کل شار ورودی با کل شار خروجی برابر است و شار خالص گذرنده از سطح یعنی Φ_B برابر صفر است. همین قضیه برای سطح گاؤسی مربوط به سیملولهٔ شکل ۳۵ـ۲۰(ب) نیز صادق است. در هیچ‌یک از این موارد نمی‌توان نقطه‌ای را یافت که خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ از آن آغاز یا به آن ختم شده باشند؛ یعنی، هیچ بار مغناطیسی منفرد منزوی وجود ندارد.

تک‌قطبیهای مغناطیسی

در فصل ۲۷ دیدیم که قانون گاؤس برای میدانهای الکتریکی هم‌ارز قانون کولن است، که مبتنی بر مشاهده‌های تجربیِ نیروی بین بارهای نقطه‌ای است. قانون گاؤس برای مغناطیس نیز مبتنی بر یک مشاهدهٔ تجربی است: ناکامی در مشاهدهٔ قطبهای مغناطیسی منزوی، مانند یک تک‌قطب شمال یا تک‌قطب جنوب.

وجود بارهای مغناطیسی منزوی را در سال ۱۹۳۱ پل دیراک فیزیکدان نظری براساس استدلالهای مکانیک کوانتومی و تقارن پیشنهاد کرد. از این بارهای مغناطیسی منزوی را تک‌قطبیهای مغناطیسی نامید و برخی از خواص اصلی که از آنها انتظار می‌رفت، از جمله اندازهٔ "بار مغناطیسی" (مشابه بار الکترونی e)، را به‌دست آورد. پس از این پیش‌بینی دیراک، جستجوی تک‌قطبیهای مغناطیسی با بهره‌گیری از شتابدهنده‌های بزرگ ذرات و بررسی نمونه‌هایی از مواد زمینی و فرازمینی صورت گرفت. هیچ‌یک از این جستجوهای اولیه به دلیلی بر وجود تک‌قطبی مغناطیسی نینجامیده است.

تلاشهای جدید برای وحدت بخشیدن قانونهای فیزیک وگرد آوردن نیروهای قوی، ضعیف و الکترومغناطیس در یک چارچوب واحد، سبب تجدید توجه به تک‌قطبیهای مغناطیسی شده است. این نظریه‌ها وجود تک‌قطبیهای مغناطیسی بسیار پرجرمی، در حدود 10^{16} برابر جرم پروتون، را پیش‌بینی می‌کنند. مسلماً، این تک‌قطبی بسیار پرجرمتر از آن است که بتوان آن را در شتابدهنده‌ای در زمین تولید کرد؛ در واقع، تنها شرایط شناخته‌شده‌ای که ممکن است در آن این تک‌قطبیها به‌وجود آمده باشند به مادهٔ چگال و بسیار داغ مرحله‌های آغازین عالم مربوط می‌شود. جستجو برای یافتن تک‌قطبیهای مغناطیسی همچنان ادامه دارد، ولی تاکنون هیچ دلیل قانع‌کننده‌ای در مورد وجود آنها به‌دست نیامده است.* در حال حاضر، فرض می‌کنیم یا تک‌قطبیهای مغناطیسی وجود ندارند، به‌طوری که معادلهٔ (۳۵ـ۲۲) دقیقاً و عموماً معتبر است، یا اگر هم وجود داشته باشند، آنچنان نادر و نایاب‌اند

* برای کسب اطلاعات بیشتر مقاله‌های زیر را ببینید:
"Searches for Magnetic Monopoles and Fractional Electric Charges," by Susan B. Felch, *The Physics Teacher*, March 1984, p. 142. and "Superheavy Magnetic Monopoles," by Richard A. Carrigan, Jr. and W. Peter Trower, *Scientific American*, April 1982, p. 106.

که معادلهٔ (۳۵ـ۲۲) تقریبی بسیار دقیق است. در آن‌صورت معادلهٔ (۳۵ـ۲۲) نقشی بنیادی در توصیف رفتار میدانهای مغناطیسی در طبیعت دارد، و یکی از چهار معادلهٔ ماکسول در زمینهٔ الکترومغناطیس را تشکیل می‌دهد.

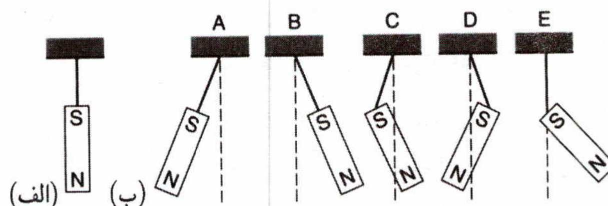
چندگزینه‌ای

۳۵ـ۱ دوقطبی مغناطیسی

۱. یک دوقطبی مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در چنان راستایی قرار گرفته است که انرژی پتانسیل آن بیشینه است. اندازهٔ گشتاور نیروی وارد بر این دوقطبی به شرح زیر است:

(الف) یک بیشینه (ب) یک کمینه (ج) به چشمهٔ دوقطبی مغناطیسی وابسته است.

۲. یک آهنربای تیغه‌ای ساده، مطابق شکل ۳۵ـ۲۱(الف)، از یک بند آویزان شده است. میدان افقی یکنواخت $\vec{B}$ به سمت راست برقرار شده است. کدام‌یک از شکلهای ۳۵ـ۲۱(ب) سمتگیری وضعیت تعادل آهنربای تیغه‌ای را نشان می‌دهد؟



شکل ۳۵ـ۲۱ پرسش چندگزینه‌ای ۲.

۳۵ـ۲ نیروی وارد بر دوقطبی در میدان نایکنواخت

۳. یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی نایکنواخت قرار دارد. دوقطبی به‌صورت زیر عمل می‌کند:

(الف) همواره به سمت ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی، قوی‌تر است جذب می‌شود.

(ب) همواره از ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی، قوی‌تر است رانده می‌شود.

(ج) ممکن است که در آغاز رانده شود، ولی سرانجام سروته شده جذب ناحیهٔ با میدان مغناطیسی قوی‌تر می‌شود.

(د) ممکن است که در آغاز جذب شود، ولی سرانجام سروته شده از ناحیهٔ با میدان مغناطیسیِ قوی‌تر رانده می‌شود.

۴. نیروی بین دو دوقطبی مغناطیسی که در فاصلهٔ d از هم قرار دارند، با کدام‌یک از کمیتهای زیر متناسب است؟ فرض کنید d خیلی بزرگتر از ابعاد دوقطبیهاست.

(الف) d^{-6} (ب) d^{-4} (ج) d^{-3} (د) d^{-2}

۳۵ـ۳ مغناطیس اتمی و هسته‌ای

۵. کدام‌یک از کمیتهای زیر در خواص مغناطیسی ماده سهم قابل‌ملاحظه‌ای ندارد؟

(الف) گشتاور مغناطیسی مداری الکترونها

(ب) گشتاور مغناطیسی اسپینی الکترونها

(ج) گشتاورهای مغناطیسی پروتونها و نوترونها

(د) همه به یک اندازه مشارکت دارند

۳۵ـ۴ مغناطش

۶. یکای مغناطش $\vec{M}$ کدام است؟

(الف) T (ب) T/m^3 (ج) $C/m \cdot s$ (د) $C \cdot m/s$

۳۵ـ۵ مواد مغناطیسی

۷. چه نوع ماده‌ای دارای بیشترین گشتاور دوقطبی اتمی است؟

(الف) پارامغناطیس (ب) دیامغناطیس (ج) فرومغناطیس

(د) مواد پارامغناطیسی و فرومغناطیسی تقریباً سهم یکسانی دارند، در صورتی‌که مواد دیامغناطیسی هیچ گشتاور مغناطیسی دائمیی ندارند.

(ه) هر سه نوع ماده تقریباً یکسان‌اند.

۸. وقتی مادهٔ پارامغناطیس در میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد، چه اتفاقی می‌افتد؟

(الف) گشتاورهای دوقطبی اتمی اندکی ضعیف می‌شوند، ولی در جهت همسو شدن با میدان خارجی عمل می‌کنند.

(ب) گشتاورهای دوقطبی اتمی اندکی قوی‌تر می‌شوند و در جهت همسو شدن با میدان خارجی عمل می‌کنند.

(ج) گشتاورهای دوقطبی اتمی اندکی ضعیف می‌شوند و طوری عمل می‌کنند که برخلاف میدان خارجی قرار گیرند.

(د) گشتاورهای دوقطبی اتمی اندکی قوی‌تر می‌شوند، ولی طوری عمل می‌کنند که برخلاف میدان خارجی قرار گیرند.

۹. یک آهنربای میله‌ای کوچک به شکل استوانه، به قطر ۱ cm، با طول ۲ cm و گشتاور دوقطبی ۵ J/T در اختیار داریم. با فرض اینکه میدان مغناطیسی به‌وسیلهٔ یک تک‌حلقهٔ جریان به گرد آهنربا ایجاد شده باشد، شدت این جریان باید چقدر باشد؟

(الف) ۰٫۷ mA (ب) ۰٫۷ A (ج) ۷۰ A (د) ۷۰۰۰۰ A

۳۵ـ۶ خواص مغناطیسی سیاره‌ها

۱۰. فرض کنید گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین به‌وسیلهٔ یک حلقهٔ بار روی استوا و چرخش زمین روی محور آن به‌وجود آمده باشد.

(۱) علامت این بار چه خواهد بود؟

(الف) مثبت (ب) منفی

(ج) هر یک از دو جواب گشتاور دوقطبی یکسانی به‌وجود می‌آورند.

(۲) کدام‌یک از برآوردهای زیر به مقدار بار مورد نیاز نزدیک‌تر است؟

(الف) 10^{15}C (ب) 10^{5}C (ج) 10^{-5}C (د) 10^{-15}C

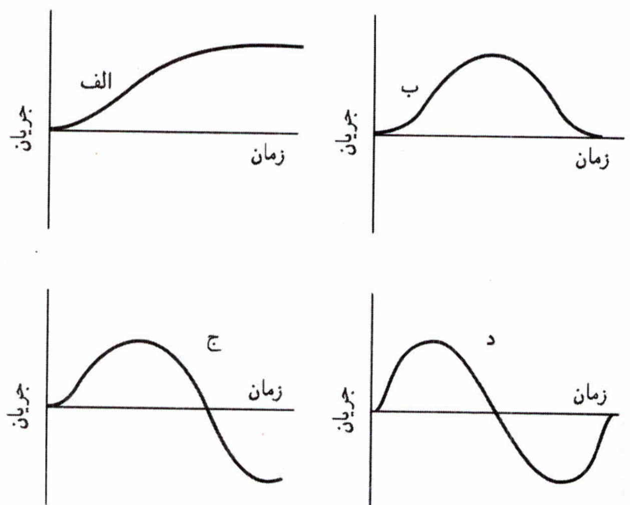
۳۵ـ۷ قانون گاؤس برای مغناطیس

۱۱. اگر قرار بود که تک‌قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد، یکای مناسب برای آن چه بود؟

(الف) Wb/T (ب) $\mathrm{T/m^3}$ (ج) $\mathrm{C\cdot m/s}$ (د) C/T

(ه) بار تک‌قطبی، نیاز به معرفی یک یکای جدید دارد.

۱۲. یک تک‌قطبی مغناطیسی (فرضی؟) از یک حلقه سیم می‌گذرد. کدام‌یک از نمودارهای شکل ۳۵ـ۲۲ جریان در این حلقه را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد؟



شکل ۳۵ـ۲۲ پرسش چندگزینه‌ای ۱۲.

پرسشها

۱. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۱ نشان دادیم که کار مورد نیاز برای اینکه یک حلقهٔ جریان را در میدان مغناطیسی خارجی بچرخانیم و سروته کنیم برابر $2\mu B$ است. آیا این نتیجه، صرف‌نظر از اینکه سمتگیری اولیهٔ حلقه کدام است، درست است؟

۲. از گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی مغناطیسی به‌وسیلهٔ میدان مغناطیسی می‌توان در اندازه‌گیری شدت میدان مغناطیسی استفاده کرد. برای یک اندازه‌گیری دقیق، آیا کوچک بودن گشتاور دوقطبی اهمیتی دارد یا خیر؟ به خاطر بیاورید، که در مورد اندازه‌گیری میدان الکتریکی، بار آزمون باید تا سرحد امکان کوچک باشد تا اختلالی در چشمهٔ میدان ایجاد نکند.

۳. کرهٔ بدون اصطکاکی به اندازهٔ یک توپ پینگ‌پنگ در اختیار شما قرار داده شده است و به شما گفته می‌شود که این کره حاوی دوقطبی مغناطیسی است. برای یافتن اندازه و جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن چه آزمایشهایی انجام خواهید داد؟

۴. چگونه می‌توانید گشتاور دوقطبی مغناطیسی عقربهٔ قطب‌نما را اندازه‌گیری کنید؟

۵. یک حلقه سیم دایره‌ای روی کف اتاقی قرارگرفته است که شما در آن نشسته‌اید. اگر از بالا نگاه کنیم این حلقه حامل جریان ساعتگرد ثابت i است. جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی این حلقه جریان کدام است؟

۶. دو قطعه آهن دارای ظاهری یکسان‌اند. یکی از این دو قطعه آهنرباست و دیگری نیست. چگونه می‌توان آنها را از هم تمیز داد؟ مجاز نیستید که هیچ‌کدام از آنها را به‌عنوان عقربهٔ قطب‌نما بیاویزید و یا هیچ وسیلهٔ دیگری جز دو قطعه آهن، به‌کار برید.

۷. دو میلهٔ آهنی، بدون توجه به اینکه دو سر آنها به چه ترتیبی به‌هم نزدیک شوند، همواره یکدیگر را می‌ربایند. آیا می‌توانید نتیجه بگیرید که یکی از این دو قطعه باید نامغناطیده باشد؟

۸. پدیده‌های زیر چه شباهتها و تفاوتهایی با یکدیگر دارند؟ (الف) یک میلهٔ باردار الکتریکی قطعات کوچک عایق بدون بار را جذب می‌کند. (ب) یک آهنربای دائمی می‌تواند هر نمونهٔ نامغناطیده از مواد فرومغناطیسی را جذب کند.

۹. چگونه می‌توانید قطبهای آهنربای بدون نشانه‌گذاری را مشخص کنید؟

۱۰. نشان دهید که از نظر کلاسیکی، بار چرخان مثبت دارای گشتاور مغناطیسی اسپینی است که در همان جهت تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی آن قرار می‌گیرد.

۱۱. نوترون که بار الکتریکی ندارد، دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی است. آیا با توجه به نظریهٔ الکترومغناطیس کلاسیک چنین چیزی امکان‌پذیر است، یا اینکه این گواه به تنهایی نشان می‌دهد که نظریهٔ الکترومغناطیس کلاسیک ناموفق است؟

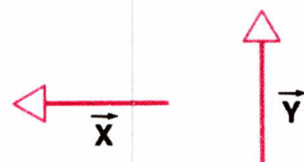
۱۲. آیا تمام آهنرباهای دائمی دارای قطبهای شمال و جنوب قابل

شناسایی هستند؟ اشکال هندسی دیگری بجز آهنربای میله‌ای یا نعل‌اسبی را در نظر بگیرید.

۱۳. دووضعیت زیر را در نظر بگیرید: (الف) یک تک‌قطبی مغناطیسی (فرضی) را از یک حلقهٔ رسانای تک‌دور در امتداد محورش، با سرعت ثابت می‌گذرانیم؛ (ب) یک آهنربای میله‌ای کوتاه (یک دوقطبی مغناطیسی) را به همان ترتیب از همان حلقه می‌گذرانیم. مقدار بار منتقل‌شده از هر مقطع این حلقه را در این دو فرایند به‌صورت کیفی مقایسه کنید. آزمایشهایی که برای آشکارسازی تک‌قطبیهای مغناطیسی احتمالی طراحی شده‌اند از این اختلافها بهره می‌گیرند.

۱۴. با آزمایش مشخص شده است که هر دو سر یک میلهٔ آهنی کوتاه قطب شمال مغناطیسی است. مقداری برادهٔ آهن روی این میله می‌پاشیم. (در ساده‌ترین حالت) این براده‌ها کجا به‌هم می‌چسبند؟ طرحی تقریبی از خطوط $\vec{B}$ در داخل و خارج میله رسم کنید.

۱۵. با شروع از بردارهای $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ در مکانها و جهتهای نشان داده‌شده در شکل ۳۵ـ۲۳، $\vec{X}$ ثابت است و $\vec{Y}$ می‌تواند آزادانه بچرخد. در هر یک از حالتهای زیر چه اتفاقی خواهد افتاد؟ (الف) $\vec{X}$ دوقطبی الکتریکی و $\vec{Y}$ دوقطبی مغناطیسی است؛ (ب) $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ هر دو دوقطبی مغناطیسی‌اند؛ (ج) $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ هر دو دوقطبی الکتریکی‌اند. همین پرسشها را وقتی که $\vec{Y}$ ثابت است و $\vec{X}$ می‌تواند آزادانه بچرخد پاسخ دهید.



شکل ۳۵ـ۲۳ پرسش ۱۵.

۱۶. فرض کنید تولیدکنندهٔ قطب‌نما هستید. (الف) روشهایی که می‌توانید برای مغناطیده کردن عقربه‌ها به‌کار ببرید تشریح کنید. (ب) معمولاً یک سر عقربه را که به سوی شمال قرار می‌گیرد یک رنگ مشخص می‌زنند. بدون آویختن عقربه در میدان مغناطیسی زمین، چگونه می‌توان دریافت که کدام سر عقربه را باید رنگ کرد؟ (ج) آیا سر رنگ‌شده قطب شمال است یا قطب جنوب؟

۱۷. آیا انتظار دارید که مغناطیدگی مادهٔ پارامغناطیسی در حالت اشباع با مغناطیدگی مادهٔ فرومغناطیسی اشباع‌شده با اندازه‌های کم‌وبیش یکسان تفاوت زیادی داشته باشد؟ چرا یا، اگر پاسخ شما منفی است، چرا نه؟

۱۸. آیا می‌توانید دلیلی ارائه دهید که چرا در اعماق بیش از ۲۰ km از سطح زمین مواد فرومغناطیسی کاملاً پارامغناطیسی می‌شوند؟

۱۹. می‌خواهیم نمونه‌ای از مادهٔ فرومغناطیسی را، که با قرارگرفتن در میدان خارجی مغناطیده شده و این خاصیت را حفظ کرده است، وامغناطیده کنیم. آیا برای رسیدن به این هدف باید دمای نمونه را تا دمای ذوب افزایش دهیم؟

۲۰. مغناطیدگی القایی در یک کرهٔ دیامغناطیسی مشخص توسط میدان مغناطیسی خارجی، برخلاف مواد پارامغناطیسی، با دما تغییر نمی‌کند. این رفتار را، با توجه به توصیفی که دربارهٔ سرچشمهٔ ایجاد خاصیت دیامغناطیس کردیم، تشریح کنید.

۲۱. توضیح دهید که چرا آهنربا یک جسم نامغناطیدهٔ آهنی مانند میخ را جذب می‌کند.

۲۲. آیا هیچ نیرو یا گشتاور نیروی خالصی بر (الف) یک تیغهٔ آهنی نامغناطیده یا (ب) یک آهنربای دائمی میله‌ای وقتی در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار می‌گیرد، اثر می‌کند؟

۲۳. میخی روی یک میز بدون اصطکاک در نزدیکی یک آهنربای قوی قرار دارد. میخ را رها می‌کنیم که حرکت‌کرده جذب آهنربا شود. سرچشمهٔ انرژی جنبشی میخ قبل از برخورد با آهنربا چیست؟

۲۴. گفته می‌شود که ابررساناها کاملاً دیامغناطیس‌اند. در این‌باره توضیح دهید.

۲۵. توضیح دهید که چرا یک آهنربای میله‌ای کوچک که به‌طور قائم روی جامی از سرب ابررسانا قرارگرفته است نیازی به نیروهای تماسی جهت نگه‌داشتن آن وجود ندارد.

۲۶. منحنیهای مغناطیدگی مربوط به مادهٔ پارامغناطیس (شکل ۳۵ـ۱۰) و مادهٔ فرومغناطیس (شکل ۳۵ـ۱۱) را با هم مقایسه کنید. منحنی مربوط به مادهٔ دیامغناطیس چگونه خواهد بود؟

۲۷. چرا براده‌های آهن در جهت میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند؟ به هر حال، آنها به‌طور ذاتی مغناطیده نیستند.

۲۸. میدان مغناطیسی زمین را می‌توان با تقریب خوبی با یک دوقطبی مغناطیسی مستقر در مرکز زمین یا در حوالی آن نشان داد. قطبهای مغناطیسی زمین را می‌توان به‌عنوان (الف) نقطه‌هایی در نظر گرفت که محور این دوقطبی از سطح زمین می‌گذرد یا (ب) نقطه‌هایی در سطح زمین در نظر گرفت که در آنجا عقربه مغناطیسی آویخته به‌صورت عمودی قرار می‌گیرد. آیا این نقطه‌ها الزاماً یکسان خواهند بود؟

۲۹. آیا در ایالات متحده هیچ مکانی وجود دارد که در آن، عقربهٔ قطب‌نما به سمت قطب شمال جغرافیایی قرار گیرد؟

۳۰. "دوستی" قطب‌نمای مورد علاقهٔ شما را قرض می‌کند و همهٔ عقربه را با رنگ سرخ رنگ‌آمیزی می‌کند. وقتی متوجه این موضوع می‌شوید که در غاری گم شده‌اید و تنها چیزهایی را که همراه دارید عبارت‌اند از دو چراغ‌قوه، چند متر سیم و (البته) این کتاب. چگونه می‌توانید بفهمید که کدام سر عقربهٔ قطب شمال آن است؟

۳۱. اگر زمین تنها آهنربای موجود باشد، چگونه می‌توانید میلهٔ آهنی را مغناطیده کنید؟

۳۲. برای محافظت حجم معینی از فضا از میدانهای مغناطیسی خارجی ثابت چه‌کار می‌کنید؟ اگر فکر می‌کنید که این کار عملی نیست علت آن را بیان کنید.

۳۳. پرتوهای کیهانی ذرات بارداری هستند که از برخی چشمه‌های خارجی به جو زمین برخورد می‌کنند. متوجه می‌شویم که پرتوهای کیهانی کم‌انرژی که به نزدیکی قطبهای مغناطیسی شمال و جنوب زمین می‌رسند بیشتر از ناحیهٔ استوای (مغناطیسی) است. چرا چنین است؟

۳۴. مواد دیامغناطیسی به‌وسیلهٔ میدانهای مغناطیسی رانده می‌شوند. چرا مادهٔ دیامغناطیسی "سروته" نمی‌شود که مانند سایر دوقطبیهای مغناطیسی جذب شود؟

۳۵. چگونه می‌توان گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین را اندازه گرفت؟

۳۶. سه دلیل برای اینکه شار Φ_B میدان مغناطیسی زمین در محدودهٔ آلاسکا بیشتر از محدودهٔ تگزاس است ارائه دهید.

۳۷. شفقهای قطبی اغلب نه در قطبهای شمال و جنوب مغناطیسی که در عرض مغناطیسی ۲۳° نسبت به این قطبها (که مثلاً در نیمکرهٔ شمالی ژئومغناطیسی مداری که از خلیج هودسن می‌گذرد) دیده می‌شوند. آیا می‌توانید دلیلی، هر چند کیفی، ارائه دهید که چرا شدت فعالیت شفقی نباید در خود قطبها از همه جا بیشتر باشد؟

۳۸. آیا سازوکاری به نظرتان می‌رسد که به‌وسیلهٔ آن یک توفان مغناطیسی، یعنی، یک اختلال شدید در میدان مغناطیسی زمین، بتواند در ارتباطهای رادیویی تداخل کند؟

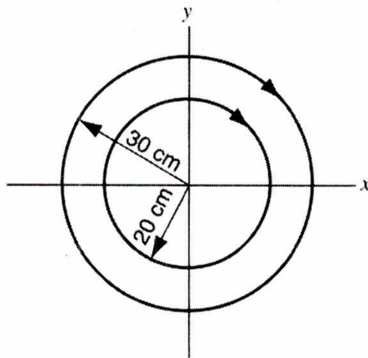
تمرینها

۱ـ۳۵ دوقطبی مغناطیسی

۱. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $۸٫۰ \times ۱۰^{۲۲}\,\mathrm{J/T}$ است. فرض کنید این گشتاور به‌وسیلهٔ بارهای الکتریکی جاری در مادهٔ مذاب بیرون از هستهٔ مرکزی پدید آمده باشد. اگر شعاع مسیر دایره‌ای بارهای الکتریکی $۳۵۰۰\,\mathrm{km}$ باشد، جریان مورد نیاز را محاسبه کنید.

۲. شعاع یک پیچهٔ دایره‌ای ۱۶۰ دوری $۱٫۹۳\,\mathrm{cm}$ است. (الف) جریان مورد نیاز برای ایجاد یک گشتاور مغناطیسی به اندازهٔ $۲٫۳۳\,\mathrm{A\cdot m^2}$ را محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ گشتاور نیروی وارد بر پیچهٔ حامل این جریان در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت $۳۴٫۶\,\mathrm{mT}$ را معین کنید.

۳. دو حلقهٔ دایره‌ای هم‌مرکز به شعاعهای ۲۰٫۰ و ۳۰٫۰ سانتی‌متر در صفحهٔ xy قرار دارند و در هر کدام جریان ساعتگرد $۷٫۰۰\,\mathrm{A}$ جاری است (شکل ۳۵ـ۲۴). (الف) گشتاور مغناطیسی این سیستم را مشخص کنید. (ب) در صورتی‌که جهت جریان در حلقهٔ بیرونی برعکس شود، محاسبه‌ها را تکرار کنید.



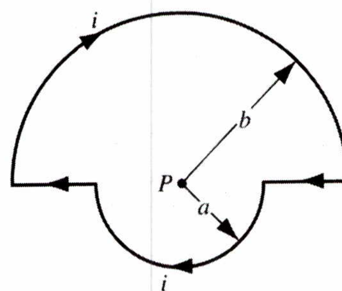
شکل ۳۵ـ۲۴ تمرین ۳.

۴. حلقهٔ سیم دایره‌ای به شعاع $۱۶٫۰\,\mathrm{cm}$ حامل جریان $۲٫۵۸\,\mathrm{A}$ است. این حلقه چنان قرار گرفته است که عمود بر سطح آن با میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت $۱٫۲۰\,\mathrm{T}$ زاویهٔ $۴۱٫۰^\circ$ می‌سازد. (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه را محاسبه کنید. (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه را معین کنید.

۵. میدان مغناطیسی B برای نقطه‌های مختلف واقع بر محور یک حلقهٔ جریان مربع‌شکل به ضلع a در مسئلهٔ ۴ فصل ۳۳ داده شده است. (الف) نشان دهید که میدان محوری برای این حلقه برای $z \gg a$ همان میدان مربوط به دوقطبی مغناطیسی است. (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی این حلقه را معین کنید.

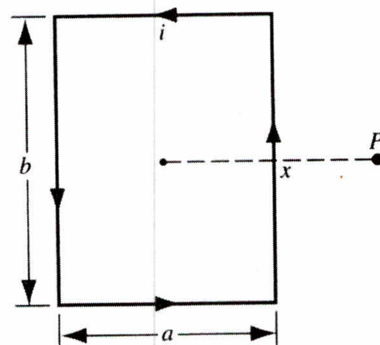
۶. یک حلقهٔ سیم دایره‌ای به شعاع $۸٫۰\,\mathrm{cm}$ حامل جریان $۰٫۲۰\,\mathrm{A}$ است. یک بردار یکهٔ موازی با گشتاور دوقطبی $\vec{\mu}$ حلقه با عبارت $۰٫۶۰\,\hat{\mathbf{i}} - ۰٫۸۰\,\hat{\mathbf{j}}$ مشخص شده است. اگر این حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}} = (۰٫۲۵\hat{\mathbf{i}} + ۰٫۳۰\hat{\mathbf{k}})\,\mathrm{T}$ قرار گرفته باشد (الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه و (ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقهٔ جریان را معین کنید.

۷. مدار بسته‌ای با شعاعهای a و b، مطابق شکل ۳۵ـ۲۵، که حامل جریان i است، در اختیار دارید. گشتاور دوقطبی مغناطیسی این مدار را معین کنید.



شکل ۳۵ـ۲۵ تمرین ۷.

۸. حلقهٔ مستطیلی شکل ۳۵ـ۲۶ را که حامل جریان i است در نظر بگیرید. نقطهٔ P به فاصلهٔ x از مرکز حلقه واقع شده است. با فرض اینکه نقطهٔ P در فاصلهٔ بسیار دوری از حلقه قرارگرفته باشد، عبارتی را برای میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ جریان در نقطهٔ P به‌دست آورید. با درنظرگرفتن اینکه $\mu = iA = iab$ است، عبارتی شبیه معادلهٔ (۳۵ـ۴) برای میدان ناشی از یک دوقطبی دوردست در نقطه‌هایی در صفحهٔ حلقه جریان (عمود بر محور حلقهٔ جریان) به‌دست آورید. (راهنمایی: اضلاع متقابل مستطیل را می‌توان با هم در نظر گرفت، ولی جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ ناشی از هر طرف را باید به‌دقت بررسی کرد.)



شکل ۳۵ـ۲۶ تمرین ۸.

۳۵ـ۲ نیروی وارد بر دوقطبی در میدان نایکنواخت

۳۵ـ۳ مغناطیس اتمی و هسته‌ای

۹. در پایین‌ترین حالت انرژی در اتم هیدروژن محتمل‌ترین فاصلهٔ بین تک‌الکترون چرخان در مدار و پروتون مرکزی برابر $5{,}29 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ است. (الف) میدان الکتریکی و (ب) میدان مغناطیسی ناشی از پروتون در این فاصله را که در امتداد محور اسپین پروتون اندازه‌گیری می‌شود، محاسبه کنید. برای گشتاور مغناطیسی پروتون جدول ۳۵ـ۱ را ببینید.

۱۰. فرض کنید تمام هسته‌های هیدروژن (پروتونهای) موجود در $1{,}50\,\mathrm{g}$ آب را بتوان همسوکرد. میدان مغناطیسی حاصل را در فاصلهٔ $5{,}33\,\mathrm{m}$ از نمونه در امتداد محور همسویی محاسبه کنید.

۱۱. بار الکتریکی q به‌طور یکنواخت روی حلقهٔ نازکی به شعاع r توزیع شده است. این حلقه حول محوری که از مرکزش می‌گذرد و بر صفحهٔ آن عمود است با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. (الف) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی ناشی از این بار چرخان برابر است با

$$\mu = \frac{1}{2}q\omega r^2$$

(ب) نشان دهید که اگر تکانهٔ زاویه‌ای حلقه برابر L باشد، داریم

$$\mu/L = q/2m$$

۳۵ـ۴ مغناطش

۱۲. گشتاور دوقطبی یک اتم آهن در یک میلهٔ آهنی $2{,}22\mu_B$ است، فرض کنید گشتاور دوقطبی تمام اتمهای موجود در این میله که طولش $4{,}86\,\mathrm{cm}$ و سطح مقطع آن $1{,}31\,\mathrm{cm}^2$ است، همسو شوند. (الف) گشتاور دوقطبی این میله چقدر است؟ (ب) چه گشتاور نیرویی باید به این آهنربا وارد شود تا آن را عمود بر یک میدان خارجی به شدت $1{,}53\,\mathrm{T}$ نگه دارد؟

۱۳. طول آهنربایی به شکل میلهٔ استوانه‌ای $4{,}8\,\mathrm{cm}$ و قطر آن $1{,}1\,\mathrm{cm}$ است. این آهنربا دارای مغناطیدگی یکنواخت $5{,}3\,\mathrm{kA/m}$ است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن را محاسبه کنید.

۱۴. از سیملوله‌ای با ۱۶ دور سیم‌پیچ در سانتی‌متر جریانی به شدت $1{,}3\,\mathrm{A}$ می‌گذرد. (الف) اگر یک میلهٔ کُرمی که فضای داخل سیملوله را کاملاً پر می‌کند در آن قرار دهیم شدت میدان مغناطیسی در آن چقدر افزایش می‌یابد؟ (ب) مغناطیدگی میله را مشخص کنید. (جدول ۳۵ـ۲ را ببینید.)

۳۵ـ۵ مواد مغناطیسی

۱۵. یک میدان مغناطیسی به شدت $0{,}50\,\mathrm{T}$ به یک گاز پارامغناطیسی اعمال شده که گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی اتمهای آن $1{,}2 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/T}$ است. در چه دمایی میانگین انرژی جنبشی انتقالی اتمهای این گاز برابر با انرژی لازم برای عوض‌کردن جای قطبهای دوقطبی در این میدان مغناطیسی خواهد شد؟

۱۶. اندازه‌گیریهای انجام‌شده در معدنها و درگمانه‌های اکتشاف نشان می‌دهند که دمای زمین با عمق آن با آهنگ متوسط $30\ \mathrm{C^\circ/km}$ افزایش می‌یابد. اگر دما در سطح زمین $20^\circ\mathrm{C}$ باشد، در چه عمقی آهن دیگر فرومغناطیس نیست؟ (دمای کوری آهن با فشار بسیار کم تغییر می‌کند).

۱۷. نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی که از منحنی مغناطیدگی شکل ۳۵ـ۱۰ پیروی می‌کند در دمای اتاق ($300\ \mathrm{K}$) قرار دارد. چه میدان مغناطیسیی باید اعمال کنیم تا میزان اشباع مغناطیسی این نمونه (الف) ۵۰٪ (ب) ۹۰٪ شود؟ (ج) آیا در آزمایشگاه می‌توان به این میدانها دست یافت؟

۱۸. نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی که از منحنی مغناطیدگی شکل ۳۵ـ۱۰ پیروی می‌کند در یک میدان مغناطیسی به شدت $1{,}8\ \mathrm{T}$ قرار داده‌ایم. در چه دمایی میزان اشباع مغناطیسی این نمونه (الف) ۵۰٪ و (ب) ۹۰٪ خواهد بود؟

۱۹. می‌خواهیم یک نمک پارامغناطیسی را که از منحنی مغناطیدگی شکل ۳۵ـ۱۰ پیروی می‌کند بررسی کنیم تا ببینیم از قانون کوری پیروی می‌کند یا خیر. نمونه را در یک میدان مغناطیسی به شدت $0{,}50\ \mathrm{T}$ قرار می‌دهیم که در خلال مدت آزمایش ثابت باقی می‌ماند. سپس مغناطیدگی M این نمونه را از دمای ۱۰ تا $300\ \mathrm{K}$ اندازه می‌گیریم. آیا در این شرایط شاهد برقراری قانون کوری خواهیم بود؟

۲۰. مغناطیدگی اشباع برای فلز فرومغناطیسی نیکل برابر $511\ \mathrm{kA/m}$ است. گشتاور مغناطیسی یک تک‌اتم نیکل را محاسبه کنید. (داده‌های مورد نیاز را از پیوست د بردارید.)

۲۱. جفت‌شدگی یادشده در بخش ۳۵ـ۵ که به‌عنوان عامل به‌وجودآورندهٔ خاصیت فرومغناطیسی ذکر شد، انرژی برهم‌کنش مغناطیسی متقابل بین دو دوقطبی مغناطیسی بنیادی نیست. برای نشان دادن این موضوع، (الف) میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ $10\ \mathrm{nm}$ از یک اتم و روی محور دوقطبی آن با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $1{,}5 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/T}$ (کُبالت) و (ب) کمینهٔ انرژی لازم برای اینکه یک دوقطبی همانند دوقطبی اول را، در این میدان سرونه کنیم، محاسبه کنید. این نتیجه‌ها را با نتیجه‌های مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۴ مقایسه کنید. از این قیاس چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۵ـ۶ خواص مغناطیسی سیاره‌ها

۲۲. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۶ دیدیم که مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین در توسان آریزونا $43\mu\mathrm{T}$ است. فرض کنید که این مقدار، میانگین مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین در سراسر ایالت آریزونا به وسعت ۲۹۵۰۰۰ کیلومترمربع باشد، و با استفاده از این داده‌ها شار مغناطیسی خالصی که از بقیهٔ سطح زمین می‌گذرد (تمام سطح زمین بجز ایالت آریزونا) محاسبه کنید. آیا این شار به طرف خارج از زمین است یا به سمت داخل آن؟

۲۳. اندازهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $8{,}0 \times 10^{22}\ \mathrm{J/T}$ است. (الف) اگر سرچشمهٔ این مغناطیس یک کرهٔ آهنی مغناطیده در مرکز زمین بوده، شعاع این کره باید چقدر باشد؟ (ب) این کره باید چه کسری از کل حجم زمین را در برمی‌گرفت؟ چگالی هستهٔ داخلی زمین $14\ \mathrm{g/cm^3}$ است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی هر اتم آهن $2{,}1 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/T}$ است.

۲۴. از نتیجه‌های نشان داده‌شده در مسئلهٔ ۹ استفاده کنید و میدان مغناطیسی زمین را (اندازه و میل) در (الف) استوای مغناطیسی، (ب) نقطه‌ای با عرض مغناطیسی 60°، و (ج) قطب شمال مغناطیسی پیش‌بینی کنید.

۲۵. ارتفاعی از سطح زمین را به‌دست آورید که در آن میدان مغناطیسی از نظر اندازه نصف شدت در سطح زمین در همان عرض مغناطیسی باشد. (از تقریب با میدان دوقطبی در مسئلهٔ ۹ استفاده کنید.)

۲۶. با استفاده از تقریب میدان دوقطبی برای میدان مغناطیسی زمین (مسئلهٔ ۹)، بیشینهٔ شدت میدان مغناطیسی را روی مرز هسته‌ـجُبّه، که در ۲۹۰۰ کیلومتری زیر سطح زمین قرار دارد، محاسبه کنید.

۲۷. با استفاده از میدان دوقطبی نمایش داده‌شده در مسئلهٔ ۹ اندازه و زاویهٔ میل میدان مغناطیسی زمین در قطب شمال جغرافیایی را محاسبه کنید. (راهنمایی: زاویهٔ بین محور مغناطیسی و محور چرخش زمین $11{,}5^\circ$ است.) چرا مقدارهای محاسبه‌شده احتمالاً با مقدارهای اندازه‌گیری‌شده سازگار نیستند؟

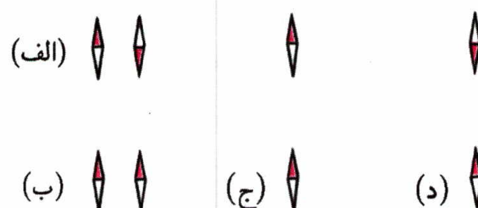
۳۵ـ۷ قانون گاوس برای مغناطیس

۲۸. یک سطح گاوسی به شکل استوانهٔ قائم با مقطع دایره‌ای به شعاع $13\ \mathrm{cm}$ و به طول $80\ \mathrm{cm}$ را در نظر بگیرید. در یک قاعدهٔ استوانه شار مغناطیسی $25\mu\mathrm{Wb}$ به طرف داخل وجود دارد. در قاعدهٔ دیگر این استوانه میدان مغناطیسی یکنواخت $1{,}6\ \mathrm{mT}$ وجود دارد که عمود بر سطح و به طرف خارج است. شارگذرندهٔ خالص از سطح جانبی خمیدهٔ این استوانه را محاسبه کنید.

۲۹. شار مغناطیسی از هر یک از پنجوجه یکی از دو عضو یک جفت تاسِ بازی از رابطهٔ $\Phi_B = \pm N\,\mathrm{Wb}$ به‌دست می‌آید، که در

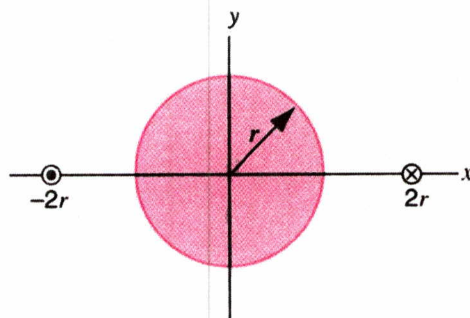
آن N (از ۱ تا ۵) تعداد خالهای روی هر وجه است. برای Nهای زوج شار مثبت (به طرف خارج) و برای Nهای فرد شار منفی (به طرف داخل) است. شار گذرنده از وجه ششم این تاس چقدر است؟

۳۰. شکل ۳۵ـ۲۷ چهار آرایش مختلف برای زوج عقربه‌های کوچک قطب‌نما را در فضایی نشان می‌دهد که در آنجا هیچ میدان مغناطیسی خارجی وجود ندارد. تعیین کنید که در هر یک از این چهار مورد تعادل پایدار است یا ناپایدار. برای هر زوج فقط گشتاور نیرویی را در نظر بگیرید که به‌واسطهٔ میدان مغناطیسی یک عقربه به عقربهٔ دیگر وارد می‌شود. دربارهٔ پاسخ خود توضیح دهید.



شکل ۳۵ـ۲۷ تمرین ۳۰.

۳۱. همان‌طورکه در شکل ۳۵ـ۲۸ نشان داده‌ایم، دو رشته سیم موازی با محور z که در فاصلهٔ $4r$ از هم قرار دارند حامل جریانهای مساوی i در جهتهای مخالف‌اند. محور یک استوانهٔ دوار به شعاع r و طول L منطبق بر محور z در وسط دو رشته سیم قرار دارد. با استفاده از قانون گاؤس برای مغناطیس، شار مغناطیسی خالص خروجی از نیم‌استوانهٔ بالای محور x را محاسبه کنید. (راهنمایی: شاری که از قسمتی از صفحهٔ xz می‌گذرد که در محدودهٔ استوانه قرار گرفته مشخص کنید.)



شکل ۳۵ـ۲۸ تمرین ۳۱.

مسئله‌ها

۱. یک قرص نازک پلاستیکی به شعاع R حامل بار q است که به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. اگر این قرص با بسامد زاویه‌ای ω حول محورش بچرخد، نشان دهید که گشتاور دوقطبی مغناطیسی این قرص برابر است با:

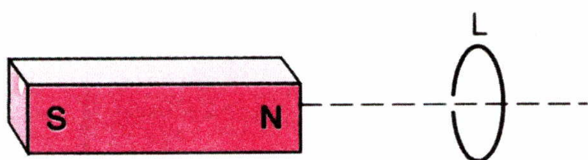
$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}$$

(راهنمایی: قرص چرخان هم‌ارز آرایه‌ای از حلقه‌های جریان است.)

۲. (الف) گشتاور مغناطیسی کرهٔ یکنواخت باردارشدهٔ چرخان را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی آن را می‌توان به‌صورت $\mu = qL/2m$ نوشت که در آن L تکانهٔ زاویه‌ای و m جرم کره است. (ج) نشان دهید که این آرایه مثال خوبی برای ساختار الکترون نیست. (راهنمایی: کرهٔ یکنواخت‌باردارشده را باید به حلقهٔ جریانهای بینهایت کوچکی تقسیم کرد و عبارتی برای گشتاور مغناطیسی آن، از طریق انتگرال‌گیری، به‌دست آورد.)

۳. الکترونی با انرژی جنبشی K_e در یک مدار دایره‌ای عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت، و فقط تحت تأثیر نیروی وارد از طرف میدان حرکت می‌کند. (الف) نشان دهید که مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی ناشی از حرکت مداری برابر $\mu = K_e/B$ است و جهت این گشتاور برخلاف جهت میدان $\vec{B}$ است. (ب) اندازه و جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی یون مثبتی با انرژی جنبشی K_i در این شرایط چقدر است؟ (ج) گاز یونیده‌ای دارای $5{,}28 \times 10^{21}$ الکترون در هر مترمکعب و همان تعداد یون در مترمکعب است. فرض کنید میانگین انرژی جنبشی الکترونها $6{,}21 \times 10^{-20}\,\text{J}$ و میانگین انرژی جنبشی یونها $7{,}58 \times 10^{-21}\,\text{J}$ باشد. مغناطیدگی گاز را برای یک میدان مغناطیسی به شدت $1{,}18\,\text{T}$ محاسبه کنید.

۴. یک مادهٔ پارامغناطیسی (به‌طور ضعیفی) جذب یک قطب آهنربا می‌شود. در شکل ۳۵ـ۲۹ مُدل این پدیده را نشان داده‌ایم. "مادهٔ پارامغناطیسی" یک حلقهٔ جریان L است، که روی محور یک آهنربای میله‌ای قرار گرفته و به قطب شمال آن نزدیک‌تر از قطب جنوب است. چون میدان $\vec{B}$ ناشی از آهنربای میله‌ای گشتاور نیروی $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ را بر حلقهٔ جریان وارد می‌کند، گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در جهت موازی با $\vec{B}$ قرار می‌گیرد. (الف) خطوط میدان $\vec{B}$ ناشی از آهنربای میله‌ای را رسم کنید. (ب) جهت جریان i را در حلقه نشان دهید. (ج)



شکل ۳۵ـ۲۹ مسئله‌های ۴ و ۵.

با استفاده از قسمتهای (الف) و (ب) و فرمول $d\vec{\mathbf{F}}_B = id\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$ نشان دهید که جهت نیروی برایند وارد بر حلقهٔ L به سمت قطب شمال آهنربای میله‌ای است.

۵. قطب آهنربایی، یک مادهٔ دیامغناطیسی را (به‌طور ضعیف) دفع می‌کند. در شکل ۳۵ـ۲۹ مُدل این پدیده را نشان داده‌ایم. "مادهٔ دیامغناطیسی" یک حلقهٔ جریان L است، که روی محور یک آهنربای میله‌ای قرارگرفته و به قطب شمال آن نزدیکتر از قطب جنوب است. چون این ماده، دیامغناطیس است گشتاور مغناطیسی حلقه، $\vec{\mu}$، به‌صورت پادموازی با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ آهنربای میله‌ای قرار می‌گیرد. (الف) طرحی را ترسیم کنید که خطهای میدان $\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به آهنربای میله‌ای را نشان دهد. (ب) جهت جریان i را در حلقه نشان دهید. (ج) با استفاده از فرمول $d\vec{\mathbf{F}}_B = id\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$ و قسمتهای (الف) و (ب) نشان دهید که نیروی برایند وارد بر L به طرف خارج از قطب شمال آهنربای میله‌ای است.

۶. جسم جامدی را در نظر بگیرید که حاوی N اتم در واحد حجم است، و گشتاور دوقطبی مغناطیسی هر کدام از این اتمها $\vec{\mu}$ است. فرض کنید که جهت $\vec{\mu}$ فقط می‌تواند موازی یا پادموازی با میدان مغناطیسی خارجی $\vec{\mathbf{B}}$ باشد (این عبارت در صورتی درست است که $\vec{\mu}$ فقط ناشی از اسپین یک تک‌الکترون باشد). بنابر قانونهای مکانیک آماری، می‌توان نشان داد که احتمال حضور یک اتم در حالتی با انرژی U با $e^{-U/kT}$ متناسب است که در آن T دما و k ثابت بولتزمن است. به این ترتیب، چون $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ است، کسری از اتمها که گشتاور دوقطبی آنها موازی با $\vec{\mathbf{B}}$ است با $e^{\mu B/kT}$ و کسری از اتمها که گشتاور دوقطبی آنها با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ پادموازی است با $e^{-\mu B/kT}$ متناسب است. (الف) نشان دهید که مغناطیدگی این جامد برابر است با $M = N\mu \tanh(\mu B/kT)$. در اینجا tanh تابع تانژانت هذلولوی است $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (ب) نشان دهید که برای $\mu B \ll kT$ مغناطیدگی قسمت (الف) به‌صورت زیر در می‌آید $M = N\mu^۲ B/kT$. (ج) نشان دهید که به‌ازای $\mu B \gg kT$ مغناطیدگی قسمت (الف) به‌صورت $M = N\mu$ در می‌آید. (د) نشان دهید که قسمتهای (ب) و (ج) از نظر کیفی با شکل ۳۵ـ۱۰ سازگارند.

۷. اتمی را در نظر بگیرید که در آن الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع r و با بسامد زاویه‌ای $\omega_\circ$ می‌چرخد. یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ مدار وجود دارد. بر اثر نیروی مغناطیسی، الکترون در مداری با همان شعاع r ولی با بسامد زاویه‌ای جدید $\omega = \omega_\circ + \Delta\omega$ می‌چرخد. (الف) نشان دهید که، وقتی میدان مغناطیسی اعمال می‌شود، تغییر در شتاب مرکزگرای الکترون برابر $۲r\omega_\circ \Delta\omega$ است. (ب) با فرض اینکه این تغییر در شتاب مرکزگرا به‌طورکامل ناشی از نیروی مغناطیسی باشد، معادلهٔ (۳۵ـ۲۰) را به‌دست آورید.

۸. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $۸/۰ \times ۱۰^{۲۲}\,\mathrm{J/T}$ است. (الف) اگر می‌خواستیم این دوقطبی را با برقراری جریان در یک تک‌حلقه در محل استوای مغناطیسی زمین ایجاد کنیم، چه جریانی باید از این تک‌حلقه می‌گذراندیم؟ (ب) آیا می‌توان از این آرایش برای حذف مغناطیس زمین در فضا و در فاصله‌های خیلی دور از سطح زمین استفاده کرد؟ (ج) در سطح زمین چطور؟

۹. میدان مغناطیسی زمین را می‌توان با میدان مغناطیسی یک دوقطبی تقریب زد که مؤلفه‌های افقی و قائم آن در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از مرکز زمین از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$B_{\text{افقی}} = \frac{\mu_\circ \mu}{۴\pi r^۳} \cos L_\mathrm{m}, \qquad B_{\text{قائم}} = \frac{\mu_\circ \mu}{۲\pi r^۳} \sin L_\mathrm{m}$$

که در اینجا L_m عرض مغناطیسی است (عرضی که از استوای مغناطیسی به طرف شمال یا جنوب مغناطیسی اندازه‌گیری شده است). گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $۸/۰ \times ۱۰^{۲۲}\,\mathrm{A \cdot m^۲}$ است. (الف) نشان دهید که شدت میدان در عرض مغناطیسی L_m از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_\circ \mu}{۴\pi r^۳} \sqrt{۱ + ۳\sin^۲ L_\mathrm{m}}$$

(ب) نشان دهید که زاویهٔ میل ϕ_i میدان مغناطیسی با رابطهٔ زیر به عرض مغناطیسی L_m مربوط می‌شود

$$\tan \phi_\mathrm{i} = ۲ \tan L_\mathrm{m}$$

۳۶

القاوری

در فصل ۳۰، رفتار خازن را مطالعه کردیم، که بار الکتریکی را انباشته می‌کند و از آن‌رو میدانی الکتریکی پدید می‌آورد که در آن انرژی ذخیره می‌شود. در این فصل قطعه‌ای به نام القاگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن انرژی در میدان مغناطیسی احاطه‌کنندهٔ سیمهای حامل جریان ذخیره می‌شود.

القاوری القاگر را از طریق کاربرد قانون فاراده، که در آن جریان متغیر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌وجود می‌آورد، معین می‌کنیم. القاوری معیاری است از توانایی ذخیرهٔ انرژی القاگر در میدان مغناطیسیِ جریان. در مدار، القاگر "اینرسی" یا "لختی" را فراهم می‌آورد که با تغییر جریان مخالفت می‌کند. در اینجا، همچنین مدارهایی را تحلیل می‌کنیم که فقط شامل خازن و القاگرند. در این مدارها انرژی ذخیره‌شده می‌تواند بین دو جزء مدار به‌صورت نوسانی جابه‌جا شود.

۳۶ـ۱ القاوری

القاگر عنصری از مدار است که انرژی را در میدان مغناطیسیِ احاطه‌کنندهٔ سیمهای حامل جریانش ذخیره می‌کند، درست به همان صورت که خازن انرژی را در میدان الکتریکیِ بین صفحه‌های باردارش ذخیره می‌کند. هر القاگر به‌وسیلهٔ ضریب القای خودش مشخص می‌شود، که به خواص هندسی آن بستگی دارد؛ مانند آنچه در فصل ۳۰ در مورد خازنها مشاهده کردیم؛ در آنجا نیز ظرفیت خازن به خواص هندسی آن بستگی داشت.

در شکل ۳۶ـ۱ یک القاگر را، مانند سیملولهٔ ایده‌آل، نشان داده‌ایم که حامل جریان i است و در داخل خود میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌وجود می‌آورد. اگر جریان را تغییر دهیم، و از آن طریق میدان $\vec{\mathbf{B}}$ و شار مغناطیسی گذرنده از سیملوله را نیز تغییر دهیم، قانون فاراده نشان می‌دهد که یک نیروی محرکهٔ الکتریکی در القاگر به‌وجود می‌آید.

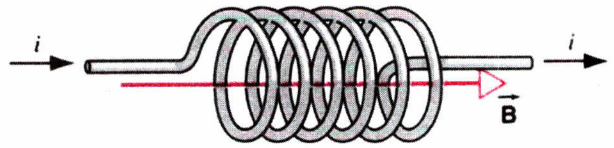
ضریب القای L را به‌صورت ضریب تناسبی تعریف می‌کنیم* که آهنگ تغییر جریان را به نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی ارتباط می‌دهد:

$$\mathscr{E}_L = L\frac{di}{dt} \qquad (۳۶ـ۱)$$

این معادله شبیه معادله‌ای است که از آن برای تعریف ظرفیت استفاده کردیم $(\Delta V_C = q/C)$. همانند ظرفیت، ضریب القا را همواره یک کمیت مثبت در نظر می‌گیریم.

معادلهٔ (۳۶ـ۱) نشان می‌دهد که یکای SI برای ضریب القا عبارت است از ولت·ثانیه بر آمپر. به این صورتِ ترکیبیِ یکاها، نام

* اگر بخواهیم دقیق باشیم، L را "خودالقاوری" می‌گوییم، به این معنی که تغییر جریان در یک قطعه، خود سبب ایجاد نیروی محرکهٔ الکتریکی در دو سر آن قطعه می‌شود. کمیت مشابهی را که به دو عنصر حامل جریان نزدیک به‌هم وابسته است "القاوری متقابل" می‌گوییم. در این حالت تغییر در جریان یک عنصر سبب ایجاد نیروی محرکهٔ الکتریکی در عنصر دیگر می‌شود.



شکل ۳۶ـ۱ یک القاگر دلخواه، که به‌صورت یک سیملوله نمایش داده شده است. جریان i میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌وجود می‌آورد.

خاص هانری (با علامت اختصاری H) داده شده است، به‌طوری که

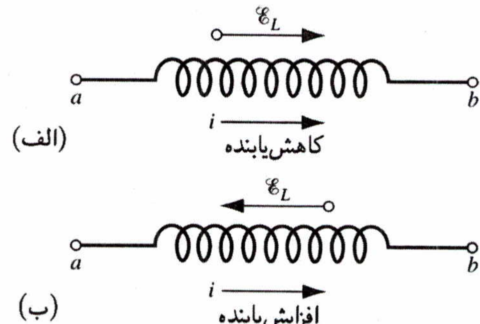
$$\text{۱ هانری} = \frac{\text{۱ ولت·ثانیه}}{\text{آمپر}}$$

این یکا به افتخار ژوزف هانری (۱۷۹۷ تا ۱۸۷۸) فیزیکدان آمریکایی و معاصر فاراده چنین نامیده شده است. در نمودار مدار الکتریکی، القاگر را با نماد ـــ𝓁𝓁𝓁𝓁ـــ نمایش می‌دهیم، که شبیه شکل سیملوله است.

برای یافتن ارتباط بین علامت $\mathscr{E}_L$ و علامت di/dt، از قانون لنز استفاده می‌کنیم. فرض کنید در سیملولهٔ شکل ۳۶ـ۱ جریان i را کاهش دهیم. این کاهشِ جریان همان تغییری است که، بنابر قانون لنز، القاوری باید با آن مقابله کند. برای مقابله با اُفت جریان، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی باید یک جریان اضافی را در همان جهت i فراهم سازد.

حال اگر، برعکس، جریان را افزایش دهیم، قانون لنز نشان می‌دهد که القاوری با این افزایش مقابله می‌کند، به این ترتیب که یک جریان اضافی در جهت مخالف با i فراهم می‌کند.

در هر یک از موارد بالا، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی با تغییر در جریان مخالفت می‌کند. شکل ۳۶ـ۲ رابطهٔ بین علامت di/dt و علامت $\mathscr{E}_L$ را به‌صورت خلاصه نشان می‌دهد. در شکل ۳۶ـ۲ (الف)،



شکل ۳۶ـ۲ (الف) یک جریان کاهش‌یابنده در القاگر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی القا می‌کند که با کاهش جریان مقابله کند. (ب) یک جریان افزایش‌یابنده در القاگر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی القا می‌کند که با افزایش جریان مقابله کند.

اختلاف پتانسیلهای القایی چنان‌اند که V_b بیشتر از V_a است، به‌طوری که $V_b - V_a = |L\,di/dt|$. چون i کاهش می‌یابد، di/dt منفی است، و بنابراین رابطهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$V_b - V_a = -L\,di/dt \qquad (۲\text{ـ}۳۶)$$

در شکل ۳۶ـ۲ (ب)، di/dt مثبت و V_a بیشتر از V_b است، به‌طوری که معادلهٔ (۳۶ـ۲) در این مورد نیز به همان صورت درست است. معادلهٔ (۳۶ـ۲) به‌ویژه در هنگام استفاده از قضیهٔ حلقه برای تحلیل مدارهایی که شامل القاگرند، مفید است.

۳۶ـ۲ محاسبهٔ ضریب القا

می‌خواهیم از معادلهٔ (۳۶ـ۱) برای یافتن ضریب القای القاگر با شکل و اندازهٔ مشخص استفاده کنیم. روش ما در این مورد، استفاده از میدان مغناطیسی القاگر حامل جریان برای یافتن شارگذرنده از قطعه است، و پس از آن استفاده از قانون فاراده برای یافتن نیروی محرکهٔ الکتریکی متناظر با تغییر جریان. در این صورت معادلهٔ (۳۶ـ۱) ضریب القا را به‌دست می‌دهد. در بخش ۳۰ـ۳ از روش مشابهی برای یافتن ظرفیت استفاده کردیم. در آنجا اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ باردار را محاسبه کردیم و سپس از تناسب بین ΔV_C و q بهره گرفتیم تا ظرفیت C را معین کنیم.

فرض کنید جریان در القاگر، میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را ایجاد کند. این میدان را می‌توان از اندازه و شکلِ هندسی القاگر و از چگونگی توزیع جریان محاسبه کرد. با دانستن $\vec{\mathbf{B}}$ می‌توانیم شار مغناطیسی F_B را که از هر دورِ سیم‌پیچ پیچه می‌گذرد معین کنیم. برای مواردی که در اینجا بررسی می‌کنیم، شارگذرنده از تمامی Nدور سیم‌پیچِ پیچه دارای مقدار یکسانی است، به‌طوری که شار کل برابر با $N\Phi_B$ است. این کمیت را با عنوان عدد پیوند شار القاگر می‌شناسیم.

نیروی محرکهٔ الکتریکی را می‌توانیم از قانون فاراده به‌دست آوریم،

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \qquad (۳\text{ـ}۳۶)$$

معادله‌های (۳۶ـ۱) و (۳۶ـ۳) نیروی محرکهٔ الکتریکی در یک القاگر را به مشتق جریان (معادلهٔ ۳۶ـ۱) یا مشتق خاصیتی که متناسب با جریان است (Φ_B در معادلهٔ ۳۶ـ۳) ارتباط می‌دهد. از مقایسهٔ این دو معادله (و درنظرگرفتن مقدارهای مربوط به همهٔ کمیتها) در می‌یابیم که

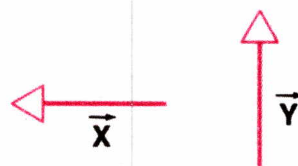
$$L\frac{di}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

شناسایی هستند؟ اشکال هندسی دیگری بجز آهنربای میله‌ای یا نعل‌اسبی را در نظر بگیرید.

۱۳. دو وضعیت زیر را در نظر بگیرید: (الف) یک تک‌قطبی مغناطیسی (فرضی) را از یک حلقهٔ رسانای تک‌دور در امتداد محورش، با سرعت ثابت می‌گذرانیم؛ (ب) یک آهنربای میله‌ای کوتاه (یک دوقطبی مغناطیسی) را به همان ترتیب از همان حلقه می‌گذرانیم. مقدار بار منتقل‌شده از هر مقطع این حلقه را در این دو فرایند به‌صورت کیفی مقایسه کنید. آزمایشهایی که برای آشکارسازی تک‌قطبیهای مغناطیسی احتمالی طراحی شده‌اند از این اختلافها بهره می‌گیرند.

۱۴. با آزمایش مشخص شده است که هر دو سر یک میلهٔ آهنی کوتاه قطب شمال مغناطیسی است. مقداری برادهٔ آهن روی این میله می‌پاشیم. (در ساده‌ترین حالت) این براده‌ها کجا به‌هم می‌چسبند؟ طرحی تقریبی از خطوط $\vec{B}$ در داخل و خارج میله رسم کنید.

۱۵. با شروع از بردارهای $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ در مکانها و جهتهای نشان داده‌شده در شکل ۳۵ـ۲۳، $\vec{X}$ ثابت است و $\vec{Y}$ می‌تواند آزادانه بچرخد. در هر یک از حالتهای زیر چه اتفاقی خواهد افتاد؟ (الف) $\vec{X}$ دوقطبی الکتریکی و $\vec{Y}$ دوقطبی مغناطیسی است؛ (ب) $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ هر دو دوقطبی مغناطیسی‌اند؛ (ج) $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ هر دو دوقطبی الکتریکی‌اند. همین پرسشها را وقتی که $\vec{Y}$ ثابت است و $\vec{X}$ می‌تواند آزادانه بچرخد پاسخ دهید.



شکل ۳۵ـ۲۳ پرسش ۱۵.

۱۶. فرض کنید تولیدکنندهٔ قطب‌نما هستید. (الف) روشهایی که می‌توانید برای مغناطیده کردن عقربه‌ها به‌کار ببرید تشریح کنید. (ب) معمولاً یک سر عقربه را که به سوی شمال قرار می‌گیرد یک رنگ مشخص می‌زنند. بدون آویختن عقربه در میدان مغناطیسی زمین، چگونه می‌توان دریافت که کدام سر عقربه را باید رنگ کرد؟ (ج) آیا سر رنگ‌شده قطب شمال است یا قطب جنوب؟

۱۷. آیا انتظار دارید که مغناطیدگی مادهٔ پارامغناطیسی در حالت اشباع با مغناطیدگی مادهٔ فرومغناطیسی اشباع‌شده با اندازه‌های کم‌وبیش یکسان تفاوت زیادی داشته باشد؟ چرا یا، اگر پاسخ شما منفی است، چرا نه؟

۱۸. آیا می‌توانید دلیلی ارائه دهید که چرا در اعماق بیش از ۲۰ km از سطح زمین مواد فرومغناطیسی کاملاً پارامغناطیسی می‌شوند؟

۱۹. می‌خواهیم نمونه‌ای از مادهٔ فرومغناطیسی را، که با قرارگرفتن در میدان خارجی مغناطیده شده و این خاصیت را حفظ کرده است، وامغناطیده کنیم. آیا برای رسیدن به این هدف باید دمای نمونه را تا دمای ذوب افزایش دهیم؟

۲۰. مغناطیدگی القایی در یک کرهٔ دیامغناطیسی مشخص توسط میدان مغناطیسی خارجی، برخلاف مواد پارامغناطیسی، با دما تغییر نمی‌کند. این رفتار را، با توجه به توصیفی که دربارهٔ سرچشمهٔ ایجاد خاصیت دیامغناطیس کردیم، تشریح کنید.

۲۱. توضیح دهید که چرا آهنربا یک جسم نامغناطیدهٔ آهنی مانند میخ را جذب می‌کند.

۲۲. آیا هیچ نیرو یا گشتاور نیروی خالصی بر (الف) یک تیغهٔ آهنی نامغناطیده یا (ب) یک آهنربای دائمی میله‌ای وقتی در میدان مغناطیسی یکنواخت قرار می‌گیرد، اثر می‌کند؟

۲۳. میخی روی یک میز بدون اصطکاک در نزدیکی یک آهنربای قوی قرار دارد. میخ را رها می‌کنیم که حرکت‌کرده جذب آهنربا شود. سرچشمهٔ انرژی جنبشی میخ قبل از برخورد با آهنربا چیست؟

۲۴. گفته می‌شود که ابررساناها کاملاً دیامغناطیس‌اند. در این‌باره توضیح دهید.

۲۵. توضیح دهید که چرا یک آهنربای میله‌ای کوچک که به‌طور قائم روی جامی از سرب ابررسانا قرارگرفته است نیازی به نیروهای تماسی جهت نگه‌داشتن آن وجود ندارد.

۲۶. منحنیهای مغناطیدگی مربوط به مادهٔ پارامغناطیس (شکل ۳۵ـ۱۰) و مادهٔ فرومغناطیس (شکل ۳۵ـ۱۱) را با هم مقایسه کنید. منحنی مربوط به مادهٔ دیامغناطیس چگونه خواهد بود؟

۲۷. چرا براده‌های آهن در جهت میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند؟ به هر حال، آنها به‌طور ذاتی مغناطیده نیستند.

۲۸. میدان مغناطیسی زمین را می‌توان با تقریب خوبی با یک دوقطبی مغناطیسی مستقر در مرکز زمین یا در حوالی آن نشان داد. قطبهای مغناطیسی زمین را می‌توان به‌عنوان (الف) نقطه‌هایی در نظر گرفت که محور این دوقطبی از سطح زمین می‌گذرد یا (ب) نقطه‌هایی در سطح زمین در نظر گرفت که در آنجا عقربهٔ مغناطیسی آویخته به‌صورت عمودی قرار می‌گیرد. آیا این نقطه‌ها الزاماً یکسان خواهند بود؟

۲۹. آیا در ایالات متحده هیچ مکانی وجود دارد که در آن، عقربهٔ قطب‌نما به سمت قطب شمال جغرافیایی قرار گیرد؟

۳۰. "دوستی" قطب‌نمای مورد علاقهٔ شما را قرض می‌کند و همهٔ عقربه را با رنگ سرخ رنگ‌آمیزی می‌کند. وقتی متوجه این موضوع می‌شوید که در غاری گم شده‌اید و تنها چیزهایی را که همراه دارید عبارت‌اند از دو چراغ‌قوه، چند متر سیم و (البته) این کتاب. چگونه می‌توانید بفهمید که کدام سر عقربهٔ قطب شمال آن است؟

۳۱. اگر زمین تنها آهنربای موجود باشد، چگونه می‌توانید میلهٔ آهنی را مغناطیده کنید؟

۳۲. برای محافظت حجم معینی از فضا از میدانهای مغناطیسی خارجی ثابت چه‌کار می‌کنید؟ اگر فکر می‌کنید که این کار عملی نیست علت آن را بیان کنید.

۳۳. پرتوهای کیهانی ذرات بارداری هستند که از برخی چشمه‌های خارجی به جو زمین برخورد می‌کنند. متوجه می‌شویم که پرتوهای کیهانی کم‌انرژی که به نزدیکی قطبهای مغناطیسی شمال و جنوب زمین می‌رسند بیشتر از ناحیهٔ استوای (مغناطیسی) است. چرا چنین است؟

۳۴. مواد دیامغناطیسی به‌وسیلهٔ میدانهای مغناطیسی رانده می‌شوند. چرا مادهٔ دیامغناطیسی "سرونه" نمی‌شود که مانند سایر دوقطبیهای مغناطیسی جذب شود؟

۳۵. چگونه می‌توان گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین را اندازه گرفت؟

۳۶. سه دلیل برای اینکه شار Φ_B میدان مغناطیسی زمین در محدودهٔ آلاسکا بیشتر از محدودهٔ تگزاس است ارائه دهید.

۳۷. شفقهای قطبی اغلب نه در قطبهای شمال و جنوب مغناطیسی که در عرض مغناطیسی °۲۳ نسبت به این قطبها (که مثلاً در نیمکرهٔ شمالی ژئومغناطیسی مداری که از خلیج هودسن می‌گذرد) دیده می‌شوند. آیا می‌توانید دلیلی، هر چند کیفی، ارائه دهید که چرا شدت فعالیت شفقی نباید در خود قطبها از همه جا بیشتر باشد؟

۳۸. آیا سازوکاری به نظرتان می‌رسد که به‌وسیلهٔ آن یک توفان مغناطیسی، یعنی، یک اختلال شدید در میدان مغناطیسی زمین، بتواند در ارتباطهای رادیویی تداخل کند؟

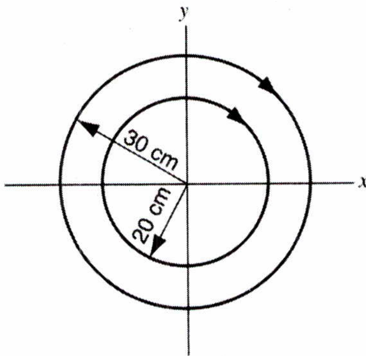
تمرینها

۳۵ـ۱ دوقطبی مغناطیسی

۱. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $\mathrm{J/T}$ ۱۰^۲۲ × ۸٫۰ است. فرض کنید این گشتاور به‌وسیلهٔ بارهای الکتریکی جاری در مادهٔ مذاب بیرون از هستهٔ مرکزی پدید آمده باشد. اگر شعاع مسیر دایره‌ای بارهای الکتریکی km ۳۵۰۰ باشد، جریان مورد نیاز را محاسبه کنید.

۲. شعاع یک پیچهٔ دایره‌ای ۱۶۰ دوری cm ۱٫۹۳ است. (الف) جریان مورد نیاز برای ایجاد یک گشتاور مغناطیسی به اندازهٔ $\mathrm{A\cdot m^2}$ ۲٫۳۳ را محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ گشتاور نیروی وارد بر پیچهٔ حامل این جریان در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به شدت mT ۳۴٫۶ را معین کنید.

۳. دو حلقهٔ دایره‌ای هم‌مرکز به شعاعهای ۲۰٫۰ و ۳۰٫۰ سانتی‌متر در صفحهٔ xy قرار دارند و در هر کدام جریان ساعتگرد A ۷٫۰۰ جاری است (شکل ۳۵ـ۲۴). (الف) گشتاور مغناطیسی این سیستم را مشخص کنید. (ب) در صورتی‌که جهت جریان در حلقهٔ بیرونی برعکس شود، محاسبه‌ها را تکرار کنید.



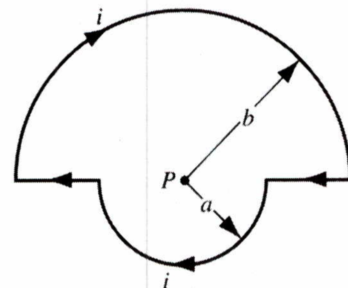
شکل ۳۵ـ۲۴ تمرین ۳.

۴. حلقهٔ سیم دایره‌ای به شعاع cm ۱۶٫۰ حامل جریان A ۲٫۵۸ است. این حلقه چنان قرار گرفته است که عمود بر سطح آن با میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت T ۱٫۲۰ زاویهٔ °۴۱٫۰ می‌سازد. (الف) گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه را محاسبه کنید. (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه را معین کنید.

۵. میدان مغناطیسی B برای نقطه‌های مختلف واقع بر محور یک حلقهٔ جریان مربع‌شکل به ضلع a در مسئلهٔ ۴ فصل ۳۳ داده شده است. (الف) نشان دهید که میدان محوری برای این حلقه برای $z \gg a$ همان میدان مربوط به دوقطبی مغناطیسی است. (ب) گشتاور دوقطبی مغناطیسی این حلقه را معین کنید.

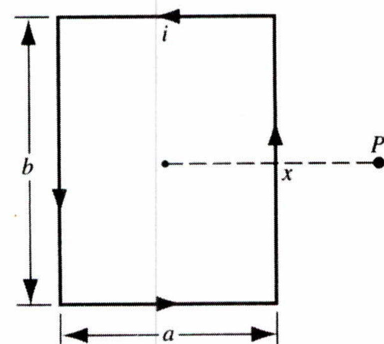
۶. یک حلقهٔ سیم دایره‌ای به شعاع cm ۸٫۰ حامل جریان A ۰٫۲۰ است. یک بردار یکهٔ موازی با گشتاور دوقطبی $\vec{\mu}$ حلقه با عبارت $\hat{\mathbf{j}}$۰٫۸۰ − $\hat{\mathbf{i}}$۰٫۶۰ مشخص شده است. اگر این حلقهٔ جریان در میدان مغناطیسی T ($\hat{\mathbf{k}}$۰٫۳۰ + $\hat{\mathbf{i}}$۰٫۲۵) = $\vec{\mathbf{B}}$ قرار گرفته باشد (الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه و (ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقهٔ جریان را معین کنید.

۷. مدار بسته‌ای با شعاعهای a و b، مطابق شکل ۳۵ـ۲۵، که حامل جریان i است، در اختیار دارید. گشتاور دوقطبی مغناطیسی این مدار را معین کنید.



شکل ۳۵ـ۲۵ تمرین ۷.

۸. حلقهٔ مستطیلی شکل ۳۵ـ۲۶ را که حامل جریان i است در نظر بگیرید. نقطهٔ P به فاصلهٔ x از مرکز حلقه واقع شده است. با فرض اینکه نقطهٔ P در فاصلهٔ بسیار دوری از حلقه قرارگرفته باشد، عبارتی را برای میدان مغناطیسی ناشی از حلقهٔ جریان در نقطهٔ P به‌دست آورید. با درنظرگرفتن اینکه $\mu = iA = iab$ است، عبارتی شبیه معادلهٔ (۳۵ـ۴) برای میدان ناشی از یک دوقطبی دوردست در نقطه‌هایی در صفحهٔ حلقه جریان (عمود بر محور حلقهٔ جریان) به‌دست آورید. (راهنمایی: اضلاع متقابل مستطیل را می‌توان با هم در نظر گرفت، ولی جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ ناشی از هر طرف را باید به‌دقت بررسی کرد.)



شکل ۳۵ـ۲۶ تمرین ۸.

۳۵ـ۲ نیروی وارد بر دوقطبی در میدان نایکنواخت

۳۵ـ۳ مغناطیس اتمی و هسته‌ای

۹. در پایین‌ترین حالت انرژی در اتم هیدروژن محتمل‌ترین فاصلهٔ بین تک‌الکترون چرخان در مدار و پروتون مرکزی برابر $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\text{m}$ است. (الف) میدان الکتریکی و (ب) میدان مغناطیسی ناشی از پروتون در این فاصله را که در امتداد محور اسپین پروتون اندازه‌گیری می‌شود، محاسبه کنید. برای گشتاور مغناطیسی پروتون جدول ۳۵ـ۱ را ببینید.

۱۰. فرض کنید تمام هسته‌های هیدروژن (پروتونهای) موجود در $۱٫۵۰\,\text{g}$ آب را بتوان همسوکرد. میدان مغناطیسی حاصل را در فاصلهٔ $۵٫۳۳\,\text{m}$ از نمونه در امتداد محور همسویی محاسبه کنید.

۱۱. بار الکتریکی q به‌طور یکنواخت روی حلقهٔ نازکی به شعاع r توزیع شده است. این حلقه حول محوری که از مرکزش می‌گذرد و بر صفحهٔ آن عمود است با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. (الف) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی ناشی از این بار چرخان برابر است با

$$\mu = \frac{۱}{۲} q\omega r^{۲}$$

(ب) نشان دهید که اگر تکانهٔ زاویه‌ای حلقه برابر L باشد، داریم

$$\mu/L = q/۲m$$

۳۵ـ۴ مغناطش

۱۲. گشتاور دوقطبی یک اتم آهن در یک میلهٔ آهنی $۲٫۲۲\mu_{\text{B}}$ است، فرض کنید گشتاور دوقطبی تمام اتمهای موجود در این میله که طولش $۴٫۸۶\,\text{cm}$ و سطح مقطع آن $۱٫۳۱\,\text{cm}^۲$ است، همسو شوند. (الف) گشتاور دوقطبی این میله چقدر است؟ (ب) چه گشتاور نیرویی باید به این آهنربا وارد شود تا آن را عمود بر یک میدان خارجی به شدت $۱٫۵۳\,\text{T}$ نگه دارد؟

۱۳. طول آهنربایی به شکل میلهٔ استوانه‌ای $۴٫۸\,\text{cm}$ و قطر آن $۱٫۱\,\text{cm}$ است. این آهنربا دارای مغناطیدگی یکنواخت $۵٫۳\,\text{kA/m}$ است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن را محاسبه کنید.

۱۴. از سیملوله‌ای با ۱۶ دور سیم‌پیچ در سانتی‌متر جریانی به شدت $۱٫۳\,\text{A}$ می‌گذرد. (الف) اگر یک میلهٔ کُرمی که فضای داخل سیملوله را کاملاً پر می‌کند در آن قرار دهیم شدت میدان مغناطیسی در آن چقدر افزایش می‌یابد؟ (ب) مغناطیدگی میله را مشخص کنید. (جدول ۳۵ـ۲ را ببینید.)

۳۵ـ۵ مواد مغناطیسی

۱۵. یک میدان مغناطیسی به شدت $۰٫۵۰\,\text{T}$ به یک گاز پارامغناطیسی اعمال شده که گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی اتمهای آن $۱٫۲ \times ۱۰^{-۲۳}\,\text{J/T}$ است. در چه دمایی میانگین انرژی جنبشی انتقالی اتمهای این گاز برابر با انرژی لازم برای عوض‌کردن جای قطبهای دوقطبی در این میدان مغناطیسی خواهد شد؟

۱۶. اندازه‌گیریهای انجام‌شده در معدنها و درگمانه‌های اکتشاف نشان می‌دهند که دمای زمین با عمق آن با آهنگ متوسط $30\ \mathrm{C^\circ/km}$ افزایش می‌یابد. اگر دما در سطح زمین $20^\circ\mathrm{C}$ باشد، در چه عمقی آهن دیگر فرومغناطیس نیست؟ (دمای کوری آهن با فشار بسیار کم تغییر می‌کند).

۱۷. نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی که از منحنی مغناطیدگی شکل ۳۵ـ۱۰ پیروی می‌کند در دمای اتاق ($300\ \mathrm{K}$) قرار دارد. چه میدان مغناطیسیی باید اعمال کنیم تا میزان اشباع مغناطیسی این نمونه (الف) ۵۰٪ (ب) ۹۰٪ شود؟ (ج) آیا در آزمایشگاه می‌توان به این میدانها دست یافت؟

۱۸. نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی که از منحنی مغناطیدگی شکل ۳۵ـ۱۰ پیروی می‌کند در یک میدان مغناطیسی به شدت $1{,}8\ \mathrm{T}$ قرار داده‌ایم. در چه دمایی میزان اشباع مغناطیسی این نمونه (الف) ۵۰٪ و (ب) ۹۰٪ خواهد بود؟

۱۹. می‌خواهیم یک نمک پارامغناطیسی را که از منحنی مغناطیدگی شکل ۳۵ـ۱۰ پیروی می‌کند بررسی کنیم تا ببینیم از قانون کوری پیروی می‌کند یا خیر. نمونه را در یک میدان مغناطیسی به شدت $0{,}50\ \mathrm{T}$ قرار می‌دهیم که در خلال مدت آزمایش ثابت باقی می‌ماند. سپس مغناطیدگی M این نمونه را از دمای ۱۰ تا $300\ \mathrm{K}$ اندازه می‌گیریم. آیا در این شرایط شاهد برقراری قانون کوری خواهیم بود؟

۲۰. مغناطیدگی اشباع برای فلز فرومغناطیسی نیکل برابر $511\ \mathrm{kA/m}$ است. گشتاور مغناطیسی یک تک‌اتم نیکل را محاسبه کنید. (داده‌های مورد نیاز را از پیوست د بردارید.)

۲۱. جفت‌شدگی یادشده در بخش ۳۵ـ۵ که به‌عنوان عامل به‌وجودآورندهٔ خاصیت فرومغناطیسی ذکر شد، انرژی برهم‌کنش مغناطیسی متقابل بین دو دوقطبی مغناطیسی بنیادی نیست. برای نشان دادن این موضوع، (الف) میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ $10\ \mathrm{nm}$ از یک اتم و روی محور دوقطبی آن با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $1{,}5 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/T}$ (کُبالت) و (ب) کمینهٔ انرژی لازم برای اینکه یک دوقطبی همانند دوقطبی اول را، در این میدان سروته کنیم، محاسبه کنید. این نتیجه‌ها را با نتیجه‌های مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۴ مقایسه کنید. از این قیاس چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۵ـ۶ خواص مغناطیسی سیاره‌ها

۲۲. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ـ۶ دیدیم که مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین در توسان آریزونا $43\mu\mathrm{T}$ است. فرض کنید که این مقدار، میانگین مؤلفهٔ قائم میدان مغناطیسی زمین در سراسر ایالت آریزونا به وسعت ۲۹۵۰۰۰ کیلومترمربع باشد، و با استفاده از این داده‌ها شار مغناطیسی خالصی که از بقیهٔ سطح زمین می‌گذرد (تمام سطح زمین بجز ایالت آریزونا) محاسبه کنید. آیا این شار به طرف خارج از زمین است یا به سمت داخل آن؟

۲۳. اندازهٔ گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $8{,}0 \times 10^{22}\ \mathrm{J/T}$ است. (الف) اگر سرچشمهٔ این مغناطیس یک کرهٔ آهنی مغناطیده در مرکز زمین بوده، شعاع این کره باید چقدر باشد؟ (ب) این کره باید چه کسری از کل حجم زمین را در برمی‌گرفت؟ چگالی هستهٔ داخلی زمین $14\ \mathrm{g/cm^3}$ است. گشتاور دوقطبی مغناطیسی هر اتم آهن $2{,}1 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/T}$ است.

۲۴. از نتیجه‌های نشان داده‌شده در مسئلهٔ ۹ استفاده کنید و میدان مغناطیسی زمین را (اندازه و میل) در (الف) استوای مغناطیسی، (ب) نقطه‌ای با عرض مغناطیسی 60°، و (ج) قطب شمال مغناطیسی پیش‌بینی کنید.

۲۵. ارتفاعی از سطح زمین را به‌دست آورید که در آن میدان مغناطیسی از نظر اندازه نصف شدت در سطح زمین در همان عرض مغناطیسی باشد. (از تقریب با میدان دوقطبی در مسئلهٔ ۹ استفاده کنید.)

۲۶. با استفاده از تقریب میدان دوقطبی برای میدان مغناطیسی زمین (مسئلهٔ ۹)، بیشینهٔ شدت میدان مغناطیسی را روی مرز هسته‌ـ جُبّه، که در ۲۹۰۰ کیلومتری زیر سطح زمین قرار دارد، محاسبه کنید.

۲۷. با استفاده از میدان دوقطبی نمایش داده‌شده در مسئلهٔ ۹ اندازه و زاویهٔ میل میدان مغناطیسی زمین در قطب شمال جغرافیایی را محاسبه کنید. (راهنمایی: زاویهٔ بین محور مغناطیسی و محور چرخش زمین $11{,}5^\circ$ است.) چرا مقدارهای محاسبه‌شده احتمالاً با مقدارهای اندازه‌گیری‌شده سازگار نیستند؟

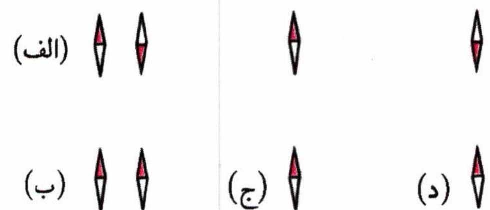
۳۵ـ۷ قانون گاؤس برای مغناطیس

۲۸. یک سطح گاؤسی به شکل استوانهٔ قائم با مقطع دایره‌ای به شعاع $13\ \mathrm{cm}$ و به طول $80\ \mathrm{cm}$ را در نظر بگیرید. در یک قاعدهٔ استوانه شار مغناطیسی $25\mu\mathrm{Wb}$ به طرف داخل وجود دارد. در قاعدهٔ دیگر این استوانه میدان مغناطیسی یکنواخت $1{,}6\ \mathrm{mT}$ وجود دارد که عمود بر سطح و به طرف خارج است. شار گذرندهٔ خالص از سطح جانبی خمیدهٔ این استوانه را محاسبه کنید.

۲۹. شار مغناطیسی از هر یک از پنج‌وجه یکی از دو عضو یک جفت تاس بازی از رابطهٔ $\Phi_B = \pm N\ \mathrm{Wb}$ به‌دست می‌آید، که در

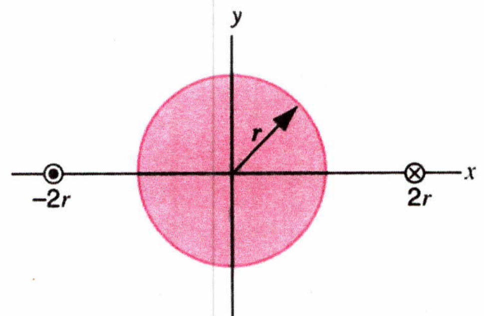
آن N (از ۱ تا ۵) تعداد خالهای روی هر وجه است. برای Nهای زوج شار مثبت (به طرف خارج) و برای Nهای فرد شار منفی (به طرف داخل) است. شار گذرنده از وجه ششم این تاس چقدر است؟

۳۰. شکل ۳۵ـ۲۷ چهار آرایش مختلف برای زوج عقربه‌های کوچک قطب‌نما را در فضایی نشان می‌دهد که در آنجا هیچ میدان مغناطیسی خارجی وجود ندارد. تعیین کنید که در هر یک از این چهار مورد تعادل پایدار است یا ناپایدار. برای هر زوج فقط گشتاور نیرویی را در نظر بگیرید که به‌واسطهٔ میدان مغناطیسی یک عقربه به عقربهٔ دیگر وارد می‌شود. دربارهٔ پاسخ خود توضیح دهید.



شکل ۳۵ـ۲۷ تمرین ۳۰.

۳۱. همان‌طورکه در شکل ۳۵ـ۲۸ نشان داده‌ایم، دو رشته سیم موازی با محور z که در فاصلهٔ ۴r از هم قرار دارند حامل جریانهای مساوی i در جهتهای مخالف‌اند. محور یک استوانهٔ دوار به شعاع r و طول L منطبق بر محور z در وسط دو رشته سیم قرار دارد. با استفاده از قانون گاوس برای مغناطیس، شار مغناطیسی خالص خروجی از نیم‌استوانهٔ بالای محور x را محاسبه کنید. (راهنمایی: شاری که از قسمتی از صفحهٔ xz می‌گذرد که در محدودهٔ استوانه قرار گرفته مشخص کنید.)



شکل ۳۵ـ۲۸ تمرین ۳۱.

مسئله‌ها

۱. یک قرص نازک پلاستیکی به شعاع R حامل بار q است که به‌طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. اگر این قرص با بسامد زاویه‌ای ω حول محورش بچرخد، نشان دهید که گشتاور دوقطبی مغناطیسی این قرص برابر است با:

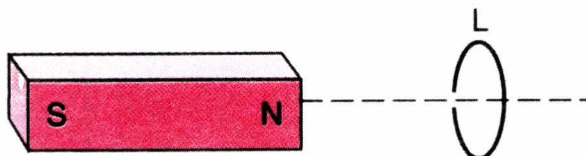
$$\mu = \frac{\omega q R^{۲}}{۴}$$

(راهنمایی: قرص چرخان هم‌ارز آرایه‌ای از حلقه‌های جریان است.)

۲. (الف) گشتاور مغناطیسی کرهٔ یکنواخت باردارشدهٔ چرخان را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی آن را می‌توان به‌صورت $\mu = qL/۲m$ نوشت که در آن L تکانهٔ زاویه‌ای و m جرم کره است. (ج) نشان دهید که این آرایه مثال خوبی برای ساختار الکترون نیست. (راهنمایی: کرهٔ یکنواخت‌باردارشده را باید به حلقهٔ جریانهای بینهایت کوچکی تقسیم کرد و عبارتی برای گشتاور مغناطیسی آن، از طریق انتگرال‌گیری، به‌دست آورد.)

۳. الکترونی با انرژی جنبشی K_{e} در یک مدار دایره‌ای عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت، و فقط تحت تأثیر نیروی وارد از طرف میدان حرکت می‌کند. (الف) نشان دهید که مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی ناشی از حرکت مداری برابر $\mu = K_{\mathrm{e}}/B$ است و جهت این گشتاور برخلاف جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ است. (ب) اندازه و جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی یون مثبتی با انرژی جنبشی K_{i} در این شرایط چقدر است؟ (ج) گاز یونیده‌ای دارای ۵٫۲۸ $\times$ ۱۰^{۲۱} الکترون در هر مترمکعب و همان تعداد یون در مترمکعب است. فرض کنید میانگین انرژی جنبشی الکترونها ۶٫۲۱ $\times$ ۱۰$^{-۲۰}$ J و میانگین انرژی جنبشی یونها ۷٫۵۸ $\times$ ۱۰$^{-۲۱}$ J باشد. مغناطیدگی گاز را برای یک میدان مغناطیسی به شدت ۱٫۱۸ T محاسبه کنید.

۴. یک مادهٔ پارامغناطیسی (به‌طور ضعیفی) جذب یک قطب آهنربا می‌شود. در شکل ۳۵ـ۲۹ مدل این پدیده را نشان داده‌ایم. "مادهٔ پارامغناطیسی" یک حلقهٔ جریان L است، که روی محور یک آهنربای میله‌ای قرار گرفته و به قطب شمال آن نزدیک‌تر از قطب جنوب است. چون میدان $\vec{\mathbf{B}}$ ناشی از آهنربای میله‌ای گشتاور نیروی $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}}$ را بر حلقهٔ جریان وارد می‌کند، گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در جهت موازی با $\vec{\mathbf{B}}$ قرار می‌گیرد. (الف) خطوط میدان $\vec{\mathbf{B}}$ ناشی از آهنربای میله‌ای را رسم کنید. (ب) جهت جریان i را در حلقه نشان دهید. (ج)



شکل ۳۵ـ۲۹ مسئله‌های ۴ و ۵.

با استفاده از قسمتهای (الف) و (ب) و فرمول $d\vec{\mathbf{F}}_B = id\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$ نشان دهید که جهت نیروی برایند وارد بر حلقهٔ L به سمت قطب شمال آهنربای میله‌ای است.

۵. قطب آهنربایی، یک مادهٔ دیامغناطیسی را (به‌طور ضعیف) دفع می‌کند. در شکل ۳۵ـ۲۹ مُدل این پدیده را نشان داده‌ایم. "مادهٔ دیامغناطیسی" یک حلقهٔ جریان L است، که روی محور یک آهنربای میله‌ای قرارگرفته و به قطب شمال آن نزدیکتر از قطب جنوب است. چون این ماده، دیامغناطیس است گشتاور مغناطیسی حلقه، $\vec{\mu}$، به‌صورت پادموازی با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ آهنربای میله‌ای قرار می‌گیرد. (الف) طرحی را ترسیم کنید که خطهای میدان $\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به آهنربای میله‌ای را نشان دهد. (ب) جهت جریان i را در حلقه نشان دهید. (ج) با استفاده از فرمول $d\vec{\mathbf{F}}_B = id\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$ و قسمتهای (الف) و (ب) نشان دهید که نیروی برایند وارد بر L به طرف خارج از قطب شمال آهنربای میله‌ای است.

۶. جسم جامدی را در نظر بگیرید که حاوی N اتم در واحد حجم است، و گشتاور دوقطبی مغناطیسی هر کدام از این اتمها $\vec{\mu}$ است. فرض کنید که جهت $\vec{\mu}$ فقط می‌تواند موازی یا پادموازی با میدان مغناطیسی خارجی $\vec{\mathbf{B}}$ باشد (این عبارت در صورتی درست است که $\vec{\mu}$ فقط ناشی از اسپین یک تک‌الکترون باشد). بنابر قانونهای مکانیک آماری، می‌توان نشان داد که احتمال حضور یک اتم در حالتی با انرژی U با $e^{-U/kT}$ متناسب است که در آن T دما و k ثابت بولتزمن است. به این ترتیب، چون $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ است، کسری از اتمها که گشتاور دوقطبی آنها موازی با $\vec{\mathbf{B}}$ است با $e^{\mu B/kT}$ و کسری از اتمها که گشتاور دوقطبی آنها با میدان $\vec{\mathbf{B}}$ پادموازی است با $e^{-\mu B/kT}$ متناسب است. (الف) نشان دهید که مغناطیدگی این جامد برابر است با $M = N\mu \tanh(\mu B/kT)$. در اینجا tanh تابع تانژانت هذلولوی است $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (ب) نشان دهید که برای $\mu B \ll kT$ مغناطیدگی قسمت (الف) به‌صورت زیر در می‌آید $M = N\mu^۲ B/kT$. (ج) نشان دهید که به‌ازای $\mu B \gg kT$ مغناطیدگی قسمت (الف) به‌صورت $M = N\mu$ در می‌آید. (د) نشان دهید که قسمتهای (ب) و (ج) از نظر کیفی با شکل ۳۵ـ۱۰ سازگارند.

۷. اتمی را در نظر بگیرید که در آن الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع r و با بسامد زاویه‌ای $\omega_\circ$ می‌چرخد. یک میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ مدار وجود دارد. بر اثر نیروی مغناطیسی، الکترون در مداری با همان شعاع r ولی با بسامد زاویه‌ای جدید $\omega = \omega_\circ + \Delta\omega$ می‌چرخد. (الف) نشان دهید که، وقتی میدان مغناطیسی اعمال می‌شود، تغییر در شتاب مرکزگرای الکترون برابر $۲r\omega_\circ\Delta\omega$ است. (ب) با فرض اینکه این تغییر در شتاب مرکزگرا به‌طور کامل ناشی از نیروی مغناطیسی باشد، معادلهٔ (۳۵ـ۲۰) را به‌دست آورید.

۸. گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $۸٫۰ \times ۱۰^{۲۲}\,\mathrm{J/T}$ است. (الف) اگر می‌خواستیم این دوقطبی را با برقراری جریان در یک تک‌حلقه در محل استوای مغناطیسی زمین ایجاد کنیم، چه جریانی باید از این تک‌حلقه می‌گذراندیم؟ (ب) آیا می‌توان از این آرایش برای حذف مغناطیس زمین در فضا و در فاصله‌های خیلی دور از سطح زمین استفاده کرد؟ (ج) در سطح زمین چطور؟

۹. میدان مغناطیسی زمین را می‌توان با میدان مغناطیسی یک دوقطبی تقریب زد که مؤلفه‌های افقی و قائم آن در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از مرکز زمین از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$B_{\text{افقی}} = \frac{\mu_\circ \mu}{۴\pi r^۳}\cos L_\mathrm{m}, \qquad B_{\text{قائم}} = \frac{\mu_\circ \mu}{۲\pi r^۳}\sin L_\mathrm{m}$$

که در اینجا L_m عرض مغناطیسی است (عرضی که از استوای مغناطیسی به طرف شمال یا جنوب مغناطیسی اندازه‌گیری شده است). گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $۸٫۰ \times ۱۰^{۲۲}\,\mathrm{A \cdot m^۲}$ است. (الف) نشان دهید که شدت میدان در عرض مغناطیسی L_m از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_\circ \mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱ + ۳\sin^۲ L_\mathrm{m}}$$

(ب) نشان دهید که زاویهٔ میل ϕ_i میدان مغناطیسی با رابطهٔ زیر به عرض مغناطیسی L_m مربوط می‌شود

$$\tan\phi_\mathrm{i} = ۲\tan L_\mathrm{m}$$

۳۶

القاوری

در فصل ۳۰، رفتار خازن را مطالعه کردیم، که بار الکتریکی را انباشته می‌کند و از آن‌رو میدانی الکتریکی پدید می‌آورد که در آن انرژی ذخیره می‌شود. در این فصل قطعه‌ای به نام القاگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن انرژی در میدان مغناطیسی احاطه‌کنندهٔ سیمهای حامل جریان ذخیره می‌شود.

القاوری القاگر را از طریق کاربرد قانون فاراده، که در آن جریان متغیر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌وجود می‌آورد، معین می‌کنیم. القاوری معیاری است از توانایی ذخیرهٔ انرژی القاگر در میدان مغناطیسیِ جریان. در مدار، القاگر "اینرسی" یا "لختی" را فراهم می‌آورد که با تغییر جریان مخالفت می‌کند. در اینجا، همچنین مدارهایی را تحلیل می‌کنیم که فقط شامل خازن و القاگرند. در این مدارها انرژی ذخیره‌شده می‌تواند بین دو جزء مدار به‌صورت نوسانی جابه‌جا شود.

۳۶ـ۱ القاوری

القاگر عنصری از مدار است که انرژی را در میدان مغناطیسیِ احاطه‌کنندهٔ سیمهای حامل جریانش ذخیره می‌کند، درست به همان صورت که خازن انرژی را در میدان الکتریکیِ بین صفحه‌های باردارش ذخیره می‌کند. هر القاگر به‌وسیلهٔ ضریب القای خودش مشخص می‌شود، که به خواص هندسی آن بستگی دارد؛ مانند آنچه در فصل ۳۰ در مورد خازنها مشاهده کردیم؛ در آنجا نیز ظرفیت خازن به خواص هندسی آن بستگی داشت.

در شکل ۳۶ـ۱ یک القاگر را، مانند سیملولهٔ ایده‌آل، نشان داده‌ایم که حامل جریان i است و در داخل خود میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌وجود می‌آورد. اگر جریان را تغییر دهیم، و از آن طریق میدان $\vec{\mathbf{B}}$ و شار مغناطیسی گذرنده از سیملوله را نیز تغییر دهیم، قانون فاراده نشان می‌دهد که یک نیروی محرکهٔ الکتریکی در القاگر به‌وجود می‌آید.

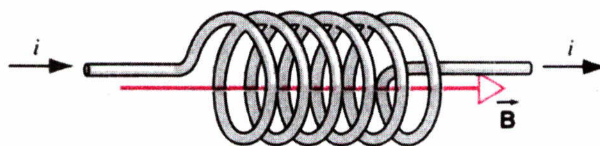
ضریب القای L را به‌صورت ضریب تناسبی تعریف می‌کنیم* که آهنگ تغییر جریان را به نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی ارتباط می‌دهد:

$$\mathscr{E}_L = L\frac{di}{dt} \qquad (۳۶\text{ـ}۱)$$

این معادله شبیه معادله‌ای است که از آن برای تعریف ظرفیت استفاده کردیم ($\Delta V_C = q/C$). همانند ظرفیت، ضریب القا را همواره یک کمیت مثبت در نظر می‌گیریم.

معادلهٔ (۳۶ـ۱) نشان می‌دهد که یکای SI برای ضریب القا عبارت است از ولت·ثانیه بر آمپر. به این صورتِ ترکیبیِ یکاها، نام

* اگر بخواهیم دقیق باشیم، L را "خودالقاوری" می‌گوییم، به این معنی که تغییر جریان در یک قطعه، خود سبب ایجاد نیروی محرکهٔ الکتریکی در دو سر آن قطعه می‌شود. کمیت مشابهی را که به دو عنصر حامل جریان نزدیک به‌هم وابسته است "القاوری متقابل" می‌گوییم. در این حالت تغییر در جریان یک عنصر سبب ایجاد نیروی محرکهٔ الکتریکی در عنصر دیگر می‌شود.



شکل ۳۶ـ۱ یک القاگر دلخواه، که به‌صورت یک سیملوله نمایش داده شده است. جریان i میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌وجود می‌آورد.

خاص هانری (با علامت اختصاری H) داده شده است، به‌طوری که

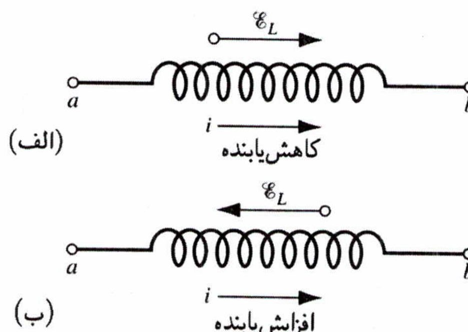
$$۱\ \text{هانری} = \frac{۱\ \text{ولت·ثانیه}}{\text{آمپر}}$$

این یکا به افتخار ژوزف هانری (۱۷۹۷ تا ۱۸۷۸) فیزیکدان آمریکایی و معاصر فاراده چنین نامیده شده است. در نمودار مدار الکتریکی، القاگر را با نماد نمایش می‌دهیم، که شبیه شکل سیملوله است.

برای یافتن ارتباط بین علامت $\mathscr{E}_L$ و علامت di/dt، از قانون لنز استفاده می‌کنیم. فرض کنید در سیملولهٔ شکل ۳۶ـ۱ جریان i را کاهش دهیم. این کاهشِ جریان همان تغییری است که، بنابر قانون لنز، القاوری باید با آن مقابله کند. برای مقابله با اُفت جریان، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی باید یک جریان اضافی را در همان جهت i فراهم سازد.

حال اگر، برعکس، جریان را افزایش دهیم، قانون لنز نشان می‌دهد که القاوری با این افزایش مقابله می‌کند، به این ترتیب که یک جریان اضافی در جهت مخالف با i فراهم می‌کند.

در هر یک از موارد بالا، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی با تغییر در جریان مخالفت می‌کند. شکل ۳۶ـ۲ رابطهٔ بین علامت di/dt و علامت $\mathscr{E}_L$ را به‌صورت خلاصه نشان می‌دهد. در شکل ۳۶ـ۲ (الف)،



شکل ۳۶ـ۲ (الف) یک جریان کاهش‌یابنده در القاگر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی القا می‌کند که با کاهش جریان مقابله کند. (ب) یک جریان افزایش‌یابنده در القاگر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی القا می‌کند که با افزایش جریان مقابله کند.

اختلاف پتانسیلهای القایی چنان‌اند که V_b بیشتر از V_a است، به‌طوری که $V_b - V_a = |L\,di/dt|$. چون i کاهش می‌یابد، di/dt منفی است، و بنابراین رابطهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$V_b - V_a = -L\,di/dt \qquad (۳۶\text{ـ}۲)$$

در شکل ۳۶ـ۲ (ب)، di/dt مثبت و V_a بیشتر از V_b است، به‌طوری که معادلهٔ (۳۶ـ۲) در این مورد نیز به همان صورت درست است. معادلهٔ (۳۶ـ۲) به‌ویژه در هنگام استفاده از قضیهٔ حلقه برای تحلیل مدارهایی که شامل القاگرند، مفید است.

۳۶ـ۲ محاسبهٔ ضریب القا

می‌خواهیم از معادلهٔ (۳۶ـ۱) برای یافتن ضریب القای القاگر با شکل و اندازهٔ مشخص استفاده کنیم. روش ما در این مورد، استفاده از میدان مغناطیسی القاگر حامل جریان برای یافتن شارگذرنده از قطعه است، و پس از آن استفاده از قانون فاراده برای یافتن نیروی محرکهٔ الکتریکی متناظر با تغییر جریان. در این صورت معادلهٔ (۳۶ـ۱) ضریب القا را به‌دست می‌دهد. در بخش ۳۰ـ۳ از روش مشابهی برای یافتن ظرفیت استفاده کردیم. در آنجا اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ باردار را محاسبه کردیم و سپس از تناسب بین ΔV_C و q بهره گرفتیم تا ظرفیت C را معین کنیم.

فرض کنید جریان در القاگر، میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ را ایجاد کند. این میدان را می‌توان از اندازه و شکلِ هندسی القاگر و از چگونگی توزیع جریان محاسبه کرد. با دانستن $\vec{\mathbf{B}}$ می‌توانیم شار مغناطیسی F_B را که از هر دورِ سیم‌پیچِ پیچه می‌گذرد معین کنیم. برای مواردی که در اینجا بررسی می‌کنیم، شارگذرنده از تمامی Nدور سیم‌پیچِ پیچه دارای مقدار یکسانی است، به‌طوری که شار کل برابر با $N\Phi_B$ است. این کمیت را با عنوان عدد پیوند شار القاگر می‌شناسیم.

نیروی محرکهٔ الکتریکی را می‌توانیم از قانون فاراده به‌دست آوریم،

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \qquad (۳۶\text{ـ}۳)$$

معادله‌های (۳۶ـ۱) و (۳۶ـ۳) نیروی محرکهٔ الکتریکی در یک القاگر را به مشتق جریان (معادلهٔ ۳۶ـ۱) یا مشتق خاصیتی که متناسب با جریان است (Φ_B در معادلهٔ ۳۶ـ۳) ارتباط می‌دهد. از مقایسهٔ این دو معادله (و درنظرگرفتن مقدارهای مربوط به همهٔ کمیتها) در می‌یابیم که

$$L\frac{di}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

(ب) در مورد میدان مغناطیسی، از معادلهٔ (۳۶ـ۲۲) داریم

$$U_B = u_B l^۳ = \frac{B^۲}{۲\mu_۰} l^۳ = \frac{(۱٫۰\ \mathrm{T})^۲ (۰٫۱\ \mathrm{m})^۳}{(۲)(۴\pi \times ۱۰^{-۷} \mathrm{T \cdot m/A})}$$
$$= ۴۰۰\ \mathrm{J}$$

برای میدانهایی که معمولاً در آزمایشگاهها در دسترس‌اند، مقدار انرژی خیلی بیشتری را می‌توان در میدان مغناطیسی ذخیره کرد تا در میدان الکتریکی؛ در این مثال نسبت ذخیرهٔ انرژی در میدانها در حدود $۱۰^۷$ است. برعکس، برای ایجاد یک میدان مغناطیسی قابل قبول در آزمایشگاه انرژی خیلی بیشتری مورد نیاز است تا برای برقراری یک میدان الکتریکی با شدتی معقول و مشابه.

۳۶ـ۵ نوسانهای الکترومغناطیسی: بررسی کیفی

اکنون ویژگیهای مدارهایی را مطالعه می‌کنیم که هم دارای خازن C هستند و هم القاگر L. چنین مداری یک نوسانگر الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهد، که در آن جریان برحسب زمان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند، درست همان‌طور که جابه‌جایی نوسانگر مکانیکی برحسب زمان تغییر می‌کند. در واقع، خواهیم دید که، بین نوسانگرهای الکترومغناطیسی و مکانیکی شباهتهایی وجود دارد. این شباهتها به ما کمک می‌کند تا براساس بررسیهای قبلی نوسانگرهای مکانیکی (فصل ۱۷) شناختی از نوسانگرهای الکترومغناطیسی به‌دست آوریم.

فعلاً، فرض می‌کنیم مدار شامل هیچ مقاومتی نیست. مدار دارای مقاومت را در بخش ۳۶ـ۷ مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مدار مشابه نوسانگر میراست که آن را در بخش ۱۷ـ۷ بررسی کردیم. همچنین فرض می‌کنیم که هیچ چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار وجود نداشته باشد؛ مدارهای نوسان‌کننده‌ای را که شامل نیروهای محرکهٔ الکتریکی هستند نیز در بخش ۳۶ـ۷ بررسی می‌کنیم. این مدارها مشابه نوسانگرهای مکانیکی واداشته هستند که آنها را در بخش ۱۷ـ۸ مطالعه کردیم.

اگر هیچ چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی در مدار وجود نداشته باشد، انرژی مدار ناشی از انرژیی است که در ابتدا در یکی یا در هر دو جزء آن ذخیره شده است. فرض کنید خازن C (به‌وسیلهٔ یک چشمهٔ خارجی که مورد توجه ما نیست) به‌صورتی پُر شده باشد که بار روی صفحه‌های آن به q_m برسد که در آن زمان از چشمهٔ خارجی قطع و به القاگر L وصل می‌شود. مدار LC در شکل ۳۶ـ۸(الف) نشان داده شده است. در آغاز، انرژی ذخیره‌شده در خازن، یعنی U_E، چنین است:

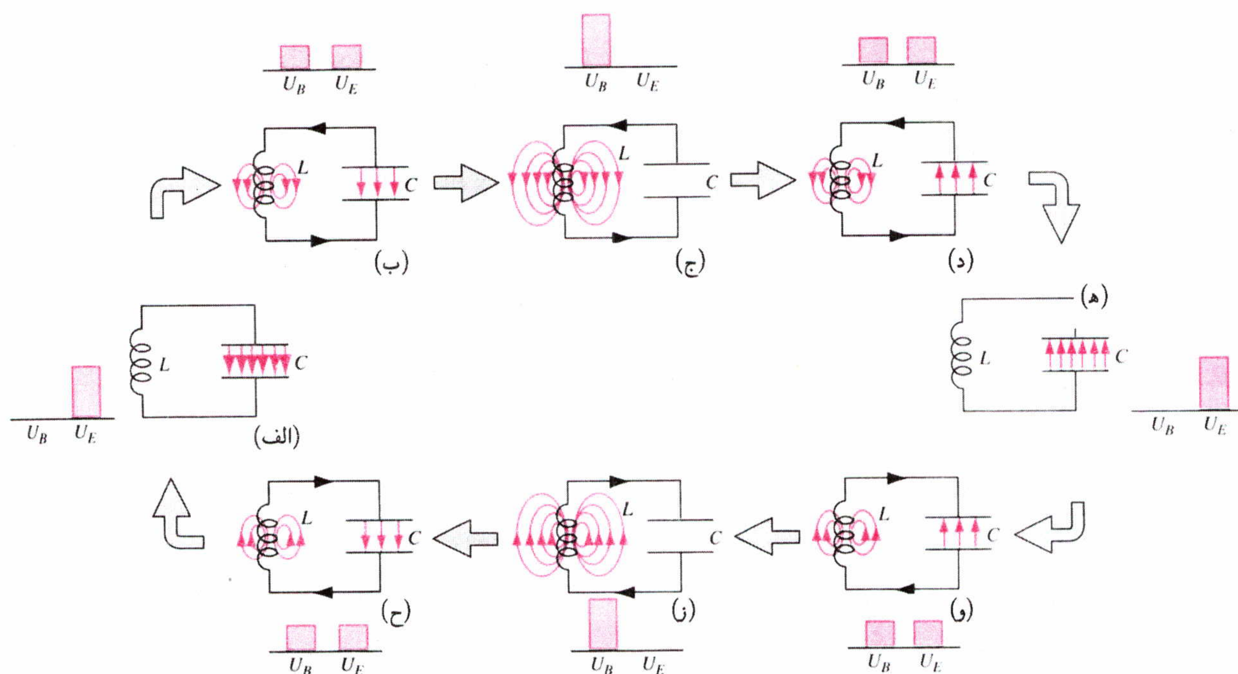
$$U_E = \frac{۱}{۲} \frac{q_\mathrm{m}^۲}{C} \qquad (۳۶\text{ـ}۲۴)$$

در حالی‌که انرژی ذخیره‌شده در القاگر، یعنی $U_B = \frac{۱}{۲} L i^۲$ (معادلهٔ ۳۶ـ۲۱)، در آغاز کار صفر است، زیرا در آغازِ کار جریان در مدار برابر صفر است.

اکنون خازن از طریق القاگر شروع به خالی‌شدن می‌کند، حاملهای بار مثبت، مطابق شکل ۳۶ـ۸(ب)، در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کنند. حالا جریان $i = dq/dt$ از القاگر می‌گذرد، و انرژی ذخیره‌شده در آن از صفر افزایش پیدا می‌کند. همزمان با آن تخلیهٔ بار خازن سبب کاهش انرژی ذخیره‌شده در آن می‌شود. اگر مدار بدون مقاومت باشد، هیچ‌گونه انرژی تلف نمی‌شود و کاهش انرژی ذخیره‌شده در خازن درست با افزایش انرژی ذخیره‌شده در القاگر جبران می‌شود، به‌طوری که انرژی کل ثابت باقی می‌ماند. در عمل، میدان الکتریکی کاهش می‌یابد و میدان مغناطیسی افزوده می‌شود، انرژی از یک میدان به میدان دیگر منتقل می‌شود.

در زمان متناظر با شکل ۳۶ـ۸(ج)، خازن کاملاً تخلیه شده و انرژی ذخیره‌شده در خازن برابر صفر است. در این حالت جریان در القاگر به بیشینهٔ مقدارش رسیده و تمام انرژی موجود در مدار در انرژی میدان مغناطیسی القاگر ذخیره شده است. توجه کنید، به‌رغم آنکه $q = ۰$ است، در این لحظه dq/dt مخالف صفر است زیرا بار جریان دارد.

جریان در القاگر، مطابق شکل ۳۶ـ۸(د)، به انتقال بار الکتریکی از صفحهٔ بالایی خازن به صفحهٔ پایینی ادامه می‌دهد؛ اکنون انرژی از القاگر به خازن باز می‌گردد و این کار با افزایش شدت میدان الکتریکی در داخل خازن صورت می‌گیرد. سرانجام (شکل ۳۶ـ۸(هـ) را ببینید) تمام انرژی دوباره به خازن که در جهت عکس شکل ۳۶ـ۸(الف) باردار شده است منتقل می‌شود. این روند با تخلیهٔ خازن ادامه می‌یابد تا وقتی که کل انرژی در القاگر و میدان مغناطیسی ذخیره شود و انرژی متناظر با آن به مقدار بیشینه‌اش برسد (شکل ۳۶ـ۸(ز)). سرانجام، جریان در القاگر یک بار دیگر خازن را به‌طور کامل پر می‌کند و مدار به وضعیت اولیه‌اش باز می‌گردد (شکل ۳۶ـ۸(الف)). این فرایند مجدداً از سر گرفته می‌شود، و چرخه به‌صورت نامحدود تکرار می‌شود. در نبود مقاومت، که عامل اتلاف انرژی است، بار و جریان در مدار در هر چرخه به بیشینهٔ مقدار یکسانی باز می‌گردند.



شکل ۳۶ـ۸ هشت مرحلهٔ مربوط به یک تک‌چرخهٔ نوسان در مدار LC بدون مقاومت. نمودار ستونی انرژیهای ذخیره‌شدهٔ مغناطیسی و الکتریکی را نشان می‌دهند.

نوسان مدار LC با بسامد معین f (که برحسب هرتز اندازه‌گیری می‌شود) متناظر با بسامد زاویه‌ای ω (مساوی با $۲\pi f$ که برحسب رادیان بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود) صورت می‌گیرد. چنانچه در بخش بعد خواهیم دید، ω به‌وسیلهٔ L و C معین می‌شود. با انتخاب مناسب L و C، می‌توان مدارهای نوسانگری ساخت که بسامد آنها گسترهٔ پایین‌تر از بسامدهای صوتی (۱۰ Hz) تا فراتر از بسامدهای میکروموجی (۱۰ GHz) را در بر می‌گیرد.

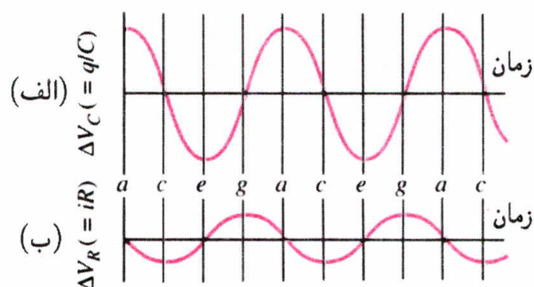
برای تعیین بار q برحسب زمان، می‌توان اختلاف پتانسیل متغیر $\Delta V_C(t)$ بین دو سر خازن C را اندازه گرفت؛ رابطهٔ بین این اختلاف پتانسیل با بار خازن q به‌صورت زیر است

$$\Delta V_C = \frac{1}{C} q$$

جریان در مدار را می‌توان با قرار دادن یک مقاومت بسیار کوچک R، که تأثیر آن در مدار ناچیز است، تعیین کرد. اختلاف پتانسیل $\Delta V_R(t)$ بین دو سر مقاومت R، بنابر رابطهٔ زیر با جریان متناسب است

$$\Delta V_R = iR$$

اگر بخواهیم $\Delta V_C(t)$ و $\Delta V_R(t)$ را مثلاً روی صفحهٔ نوسان‌نما نمایش دهیم، احتمالاً نتیجه شبیه نمودارهای شکل ۳۶ـ۹ است.



شکل ۳۶ـ۹ (الف) اختلاف پتانسیل دو سر خازن در مدار شکل ۳۶ـ۸ برحسب زمان. این کمیت با بار خازن متناسب است. (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت بسیار کوچکی که در مدار شکل ۳۶ـ۸ قرار داده شده است. این کمیت با جریان در مدار متناسب است. حروف روی شکل مراحل متناظر با نوسان شکل ۳۶ـ۸ را مشخص می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶ـ۸ یک خازن ۱٫۵‌μF را با اختلاف پتانسیل ۵۷ V پر کرده‌ایم. سپس باتری را از خازن جدا و یک پیچهٔ ۱۲ mH را به دو سر خازن متصل می‌کنیم، تا نوسانهای LC صورت گیرند. بیشینهٔ شدت جریان در پیچه چقدر است؟ فرض کنید این مدار شامل هیچ مقاومتی نیست.

حل. از اصل پایستگی انرژی می‌دانیم که بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده در خازن باید با بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده در القاگر برابر باشد (ولی به‌خاطر داشته باشید که دو بیشینه به‌طور همزمان به‌وقوع نمی‌پیوندند).

با استفاده از معادله‌های (۳۶ـ۲۱) و (۳۶ـ۲۴)، می‌رسیم به

$$\frac{q_{\rm m}^2}{2C} = \frac{1}{2}Li_{\rm m}^2$$

که در اینجا $i_{\rm m}$ بیشینهٔ جریان و $q_{\rm m}$ بیشینهٔ بار است. توجه داشته باشید که بیشینهٔ جریان و بیشینهٔ بار الکتریکی همزمان اتفاق نمی‌افتند بلکه با هم به اندازهٔ یک‌چهارم چرخه فاصله دارند؛ شکلهای ۳۶ـ۸ و ۳۶ـ۹ را ببینید. از حل این معادله برای $i_{\rm m}$ و جایگزین کردن $q_{\rm m}$ با CV، در می‌یابیم

$$i_{\rm m} = V\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\,{\rm V})\sqrt{\frac{1.5\times10^{-6}{\rm F}}{12\times10^{-3}{\rm H}}} = 0.64\,{\rm A}$$

شباهت با حرکت هماهنگ ساده

شکل ۱۲ـ۵ نشان می‌دهد که سیستم نوسان‌کنندهٔ جرم‌ـفنر، مانند مدار نوسان‌کنندهٔ LC، دارای دو نوع انرژی است. یکی انرژی پتانسیل فنر متراکم یا کشیده شده است؛ دیگری انرژی جنبشی جرم متحرک. این انرژیها با فرمولهای شناخته‌شدهٔ ستون سمت راست جدول ۳۶ـ۱ ارائه شده‌اند. این جدول نشان می‌دهد که خازن به گونه‌ای شبیه فنر است و القاگر به نوعی شبیه جسم دارای جرم (وزنه) و بعضی از کمیتهای الکترومغناطیسی با برخی از کمیتهای مکانیکی "متناظر"ند، یعنی

q متناظر با x است، i متناظر با v است،
$1/C$ متناظر با k است، L متناظر با m است. (۳۶ـ۲۵)

مقایسهٔ شکل ۳۶ـ۸، که نوسانهای مدار LC بدون مقاومت را نشان می‌دهد، با شکل ۱۲ـ۵، که نمایشگر نوسانهای سیستم جرم‌ـفنر بدون اصطکاک است، نشان می‌دهد که این تناظر تا چه حد نزدیک است. توجه کنید که در این شکلها v و i با هم و نیز x و q با هم متناظرند. همچنین توجه کنید که چگونه در هر دو مورد انرژی بین دو

جدول ۳۶ـ۱ انرژی در سیستمهای نوسان‌کننده

مکانیکی		الکترومغناطیسی	
فنر	$U_s = \frac{1}{2}kx^2$	خازن	$U_E = \frac{1}{2}C^{-1}q^2$
جرم	$K = \frac{1}{2}mv^2$	القاگر	$U_B = \frac{1}{2}Li^2$
	$v = \frac{dx}{dt}$		$i = \frac{dq}{dt}$

شکل مغناطیسی و الکتریکی برای سیستم LC و جنبشی و پتانسیل برای سیستم جرم‌ـفنر جابه‌جا می‌شود.

در بخش ۱۷ـ۳ دیدیم که بسامد زاویه‌ای طبیعی نوسانگر هماهنگ سادهٔ مکانیکی برابر است با

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

شباهت بین این دو سیستم ایجاب می‌کند که برای یافتن بسامد نوسان مدار LC (بدون مقاومت) k را با $1/C$ و m را با L جایگزین کنیم، که از اینجا نتیجه می‌گیریم

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (۳۶ـ۲۶)$$

این معادله را می‌توان از تحلیل دقیق نوسان الکترومغناطیسی که در بخش بعد نشان می‌دهیم، نیز به‌دست آورد.

۳۶ـ۶ نوسانهای الکترومغناطیسی: بررسی کمّی

اکنون با بهره‌گیری از اصل پایستگی انرژی در مورد مدار LC (بدون مقاومت) عبارتی را برای بسامد نوسان به‌دست می‌آوریم. انرژی کل موجود، U، در مدار نوسان‌کنندهٔ LC در هر لحظه برابر است با

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (۳۶ـ۲۷)$$

که نشان می‌دهد در هر زمان دلخواه بخشی از انرژی در میدان مغناطیسی القاگر و بخشی در میدان الکتریکی خازن ذخیره می‌شود. اگر فرض کنیم که مقاومت مدار صفر باشد، هیچ‌گونه انرژی تلف نمی‌شود و U برحسب زمان ثابت می‌ماند، اگرچه i، q تغییر می‌کنند. به عبارت دقیق‌تر، dU/dt باید برابر صفر باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{t} = 0 \qquad (۳۶ـ۲۸)$$

فرض می‌کنیم که q بار موجود روی یک صفحهٔ مشخص از خازن (مثلاً، صفحهٔ بالایی شکل ۳۶ـ۸) باشد و در آن صورت i آهنگ جریان بار الکتریکی به صفحهٔ موردنظر را نشان می‌دهد (به‌طوری که وقتی بار مثبت به صفحه وارد می‌شود $i > 0$ است). در این حالت داریم

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

با جایگزین‌کردن این مقدارها در معادلهٔ (۳۶ـ۲۸) می‌رسیم به

$$\frac{d^۲q}{dt^۲} + \frac{۱}{LC}q = ۰ \qquad (۳۶\text{ـ}۲۹)$$

معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) نوسانهای مدار LC (بدون مقاومت) را توصیف می‌کند. برای حل این معادله، به شباهت آن با معادلهٔ (۱۷ـ۴) توجه کنید:

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{k}{m}x = ۰ \qquad (۳۶\text{ـ}۳۰)$$

که نوسانهای مکانیکی ذرهٔ متصل به فنر را توصیف می‌کند. اساساً، از مقایسهٔ این دو معادله است که تناظرهای معادلهٔ (۳۶ـ۲۵) حاصل می‌شود.

جواب معادلهٔ (۳۶ـ۳۰) که در فصل ۱۷ به‌دست آمده چنین است.

$$x = x_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi)$$

که در این عبارت x_{m} دامنهٔ حرکت و ϕ یک ثابت فاز دلخواه است. چون q متناظر با x است، می‌توان جواب معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) را به‌صورت زیر نوشت

$$q = q_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۳۱)$$

در اینجا ω هنوز بسامد زاویه‌ای مجهول نوسانهای الکترومغناطیسی است.

می‌توان با جایگزین‌کردن معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) و مشتق دوم آن در معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) بررسی کرد که آیا واقعاً معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) جواب معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) هست یا خیر. برای به‌دست‌آوردن مشتق دوم، می‌نویسیم

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_{\text{m}}\sin(\omega t + \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۳۲)$$

یا

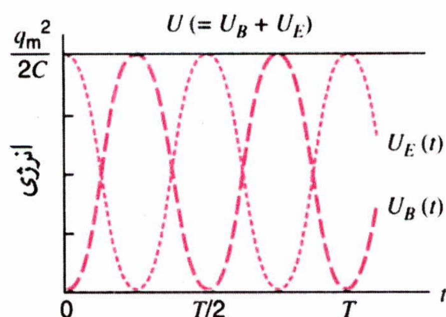
$$\frac{d^۲q}{dt^۲} = -\omega^۲ q_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۳۳)$$

از قرار دادن q و $d^۲q/dt^۲$ در معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) نتیجه می‌گیریم که

$$-\omega^۲ q_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi) + \frac{۱}{LC}q_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi) = ۰$$

با حذف عامل مشترک $q_{\text{m}}\cos(\omega t + \phi)$ و بازآرایی جملات تساوی می‌رسیم به

$$\omega = \sqrt{\frac{۱}{LC}} \qquad (۳۶\text{ـ}۳۴)$$



شکل ۳۶ـ۱۰ انرژی مغناطیسی و انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در مدار LC برحسب تابعی از زمان. T (مساوی $۲\pi/\omega$) دورهٔ تناوب این نوسان است.

به این ترتیب، اگر به‌جای ω مقدار $۱/\sqrt{LC}$ را قرار دهیم معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) واقعاً جوابی برای معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) است. رابطه‌ای که به این ترتیب برای ω به‌دست آوردیم با معادلهٔ (۳۶ـ۲۶) که از تناظر بین نوسانهای مکانیکی و الکترومغناطیسی به آن رسیدیم، سازگار است.

ثابت فاز ϕ در معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) را شرایط در لحظهٔ $t = ۰$ تعیین می‌کند. اگر شرایط اولیه به‌صورت شکل ۳۶ـ۸(الف) باشد، در آن صورت ϕ را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) در لحظهٔ $t = ۰$ بار $q = q_{\text{m}}$ را به‌دست دهد. اگر ϕ را مساوی ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° اختیار کنیم، چه شرایط اولیهٔ فیزیکی حاصل می‌شود؟ کدام‌یک از حالتهای نشان داده‌شده در شکل ۳۶ـ۸ متناظر با فازهای ϕ منتخب در بالاست؟

انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در مدار LC، با استفاده از معادلهٔ (۳۶ـ۳۱)، برابر است با

$$U_E = \frac{۱}{۲}\frac{q^۲}{C} = \frac{q_{\text{m}}^۲}{۲C}\cos^۲(\omega t + \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۳۵)$$

و انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده، با استفاده از معادلهٔ (۳۶ـ۳۲)، برابر است با

$$U_B = \frac{۱}{۲}Li^۲ = \frac{۱}{۲}L\omega^۲ q_{\text{m}}^۲\sin^۲(\omega t + \phi)$$

با قرار دادن ω از معادلهٔ (۳۶ـ۳۴) در معادلهٔ اخیر، نتیجه می‌گیریم که

$$U_B = \frac{q_{\text{m}}^۲}{۲C}\sin^۲(\omega t + \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۳۶)$$

شکل ۳۶ـ۱۰ نمودارهای مربوط به $U_E(t)$ و $U_B(t)$ را برای حالت $\phi = ۰$ نشان می‌دهد. توجه کنید که (۱) بیشینهٔ مقدارهای مربوط به U_E و U_B یکسان (مساوی $q_{\text{m}}^۲/۲C$) است؛ (۲) حاصل جمع

U_E و U_B مقداری ثابت (مساوی $q_{\rm m}^2/2C$) است؛ (۳) وقتی U_E بیشینه است U_B صفر است و برعکس؛ و (۴) U_B و U_E در هر چرخه دو بار به مقدار بیشینه می‌رسند. این بررسی، تحلیل کیفی ارائه‌شده در بخش ۳۶ـ۵ را تأیید می‌کند. این بحث را با مبحث ارائه‌شده در بخش ۱۷ـ۴ در ارتباط با تبادل انرژی در نوسانگر هماهنگ سادهٔ مکانیکی مقایسه کنید.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶ـ۹ (الف) در مدار نوسان‌کنندهٔ LC، وقتی انرژی به تساوی بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تقسیم شده باشد، چه مقدار بار، برحسب بار بیشینه، روی صفحهٔ خازن قرار دارد؟ (ب) در چه زمان، t، این شرط برقرار می‌شود؟ فرض کنید که در آغاز خازن کاملاً پُر باشد و نیز فرض کنید که $L = 12\ {\rm mH}$ و $C = 1{,}7\mu{\rm F}$ است.

حل. (الف) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده U_E و بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده $U_{\rm m}$ در خازن به‌ترتیب عبارت‌اند

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{و} \quad U_{\rm m} = \frac{q_{\rm m}^2}{2C}$$

با قرار دادن $U_E = \frac{1}{2}U_{\rm m}$، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{q_{\rm m}^2}{2C}$$

یا

$$q = \frac{q_{\rm m}}{\sqrt{2}}$$

(ب) چون در معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) می‌دانیم $\phi = 0$ است، زیرا در $t = 0$ داریم $q = q_{\rm m}$، نتیجه می‌گیریم که

$$q = q_{\rm m}\cos\omega t = \frac{q_{\rm m}}{\sqrt{2}}$$

که از اینجا درمی‌یابیم

$$\omega t = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

یا، با استفاده از $\omega = 1/\sqrt{LC}$

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12\times10^{-3}{\rm H})(1{,}7\times10^{-6}{\rm F})}}{4}$$
$$= 1{,}1\times10^{-4}{\rm s} = 110\,\mu{\rm s}$$

۳۶ـ۷ نوسانهای میرا و واداشته

در هر مدار LC واقعی همواره یک مقاومت R وجود دارد. وقتی این مقاومت را در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که انرژی الکترومغناطیسی کل U ثابت نیست بلکه با گذشت زمان به‌واسطهٔ اتلاف انرژی به‌صورت انرژی داخلی، مقاومت، کم می‌شود. چنانکه خواهیم دید، این نوسانگر کاملاً شبیه نوسانگر میرای جرم‌ـفنر بخش ۱۷ـ۷ است. مانند قبل، می‌دانیم که

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} \qquad (۳۶\text{ـ}۳۷)$$

ولی U دیگر ثابت نیست، بلکه داریم

$$\frac{dU}{dt} = -i^2R \qquad (۳۶\text{ـ}۳۸)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که انرژی Uی ذخیره‌شده با گذشت زمان کاهش می‌یابد و با آهنگ i^2R به انرژی داخلی مقاومت تبدیل می‌شود. با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۳۶ـ۳۷) و ترکیب نتیجه با معادلهٔ (۳۶ـ۳۸)، می‌رسیم به

$$-i^2R = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

با جایگزین‌کردن i با dq/dt و di/dt با d^2q/dt^2 و تقسیم طرفین معادله بر i، نتیجه می‌گیریم

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (۳۶\text{ـ}۳۹)$$

که نوسانهای میرای LC را توصیف می‌کند. اگر در معادلهٔ (۳۶ـ۳۹)، قرار دهیم $R = 0$، این معادله همان‌طور که انتظار داریم به معادلهٔ (۳۶ـ۲۹) تبدیل می‌شود، که نوسانهای نامیرای LC را توصیف می‌کند.

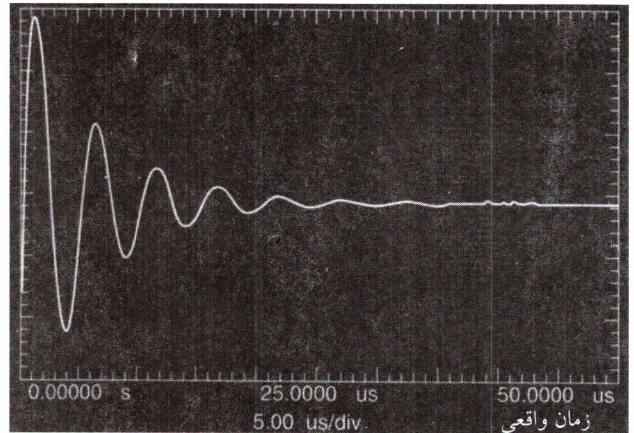
در اینجا، بدون اثبات، می‌گوییم که می‌توان جواب عمومی معادلهٔ (۳۶ـ۳۹) را به شکل زیر نوشت

$$q = q_{\rm m}e^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۴۰)$$

که در آن

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \qquad (۳۶\text{ـ}۴۱)$$

با استفاده از شباهتهای معادلهٔ (۳۶ـ۲۵)، می‌بینیم که معادلهٔ (۳۶ـ۴۰) دقیقاً هم‌ارز معادلهٔ (۱۷ـ۳۹)، یعنی معادلهٔ جابه‌جایی در حرکت هماهنگ سادهٔ میرا برحسب زمان است. از مقایسهٔ معادلهٔ (۳۶ـ۴۱)



شکل ۳۶ـ۱۱ تصویری از یک ردّ نوسان‌نما که نوسان یک مدار LC میرا را نشان می‌دهد. به علت اتلاف انرژی در مقاومت موجود در مدار دامنهٔ نوسان کاهش می‌یابد.

با معادلهٔ (۱۷ـ۴۰) درمی‌یابیم که مقاومت R با ثابت میرایی b نوسانگر مکانیکی میرا متناظر است.

شکل ۳۶ـ۱۱ تغییرات جریان در مدار LC میرا را برحسب زمان نشان می‌دهد. (این شکل را با شکل ۱۷ـ۱۶(ب) مقایسه کنید.) جریان به‌صورت سینوسی با بسامد ω' نوسان می‌کند و دامنهٔ جریان با گذشت زمان به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. بسامد ω' مسلماً از بسامد ω (مساوی $1/\sqrt{LC}$) مربوط به نوسانهای نامیرا کوچکتر است، ولی در اغلب موارد می‌توان با خطای اندک ω' را برابر ω درنظر گرفت.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶ـ۱۰ در یک مدار داریم $L = ۱۲\,\text{mH}$، $C = ۱{,}۶\mu\text{F}$، و $R = ۱{,}۵\Omega$. (الف) در چه مدت زمان، t، دامنهٔ نوسانهای بار به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد؟ (ب) این زمان متناظر با چند دورهٔ تناوب نوسان مدار است؟

حل. (الف) این واقعه وقتی رخ می‌دهد که ضریب دامنه در معادلهٔ (۳۶ـ۴۰)، یعنی $e^{-Rt/۲L}$، برابر با ۱/۲ شود، یا

$$e^{-Rt/۲L} = \frac{۱}{۲}$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی از طرفین این تساوی نتیجه می‌گیریم

$$-Rt/۲L = \ln\frac{۱}{۲} = -\ln ۲$$

یا، از حل این معادله برحسب t، داریم

$$t = \frac{۲L}{R}\ln ۲ = \frac{(۲)(۱۲\times ۱۰^{-۳}\text{H})}{۱{,}۵\Omega}\ln ۲ = ۰{,}۰۱۱\,\text{s}$$

(ب) تعداد نوسانها عبارت است از زمان سپری‌شده تقسیم بر دورهٔ تناوب، اما، دورهٔ تناوب و بسامد زاویه‌ای با عبارت $T = ۲\pi/\omega$ به یکدیگر مربوط می‌شوند. بسامد زاویه‌ای این نوسانگر عبارت است از

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۱۲\times ۱۰^{-۳}\text{H})(۱{,}۶\times ۱۰^{-۶}\text{F})}} = ۷۲۰۰\,\text{rad/s}$$

در نتیجه دورهٔ تناوب این حرکت نوسانی برابر است با

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{۷۲۰۰\,\text{rad/s}} = ۸{,}۷\times ۱۰^{-۴}\text{s}$$

سرانجام، زمان سپری‌شده تا رسیدن به نصف دامنه برحسب دورهٔ تناوب عبارت است از

$$\frac{t}{T} = \frac{۰{,}۰۱۱\,\text{s}}{۸{,}۷\times ۱۰^{-۴}\text{s}} \approx ۱۳$$

دامنهٔ نوسان پس از گذشت حدود ۱۳ چرخهٔ نوسان به نصف مقدارش فرو می‌افتد. میرایی در این مثال، بسیار خفیف‌تر از چیزی است که در شکل ۳۶ـ۱۱ رخ می‌دهد. در این شکل دامنهٔ نوسان در حدود یک چرخه به نصف فرو می‌افتد.

در این مثال به‌جای ω' از ω استفاده کردیم. از معادلهٔ (۳۶ـ۴۱)، درمی‌یابیم که $\omega - \omega' = ۰{,}۲۷\,\text{rad/s}$ است و بنابراین در استفاده از ω خطای ناچیزی مرتکب می‌شویم.

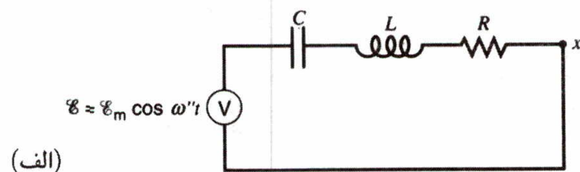
نوسانهای واداشته و تشدید

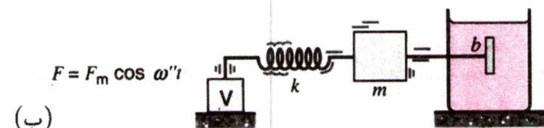
مدار LC میرایی را در نظر بگیرید که حاوی مقاومت R است. اگر میرایی کوچک باشد، مدار با بسامد $\omega = ۱/\sqrt{LC}$ نوسان می‌کند، که آن را بسامد طبیعی سیستم می‌خوانیم.

اکنون، فرض کنید این مدار شامل نیروی محرکهٔ الکتریکی متغیر برحسب زمان به‌صورت زیر نیز باشد

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_\text{m}\cos\omega'' t \qquad (۳۶\text{ـ}۴۲)$$

این نیروی محرکهٔ الکتریکی توسط مولد خارجی تأمین می‌شود. در این معادله ω''، که می‌توان آن را به دلخواه تغییر داد، بسامد چشمهٔ خارجی است. این‌گونه نوسانها را نوسانهای واداشته می‌نامیم. وقتی نیروی محرکهٔ الکتریکی توصیف‌شده در معادلهٔ (۳۶ـ۴۲) را برای اولین بار اعمال می‌کنیم، جریانهای متغیرگذرایی در مدار پدید می‌آید. اما، ما به جریانهای





شکل ۳۶ـ۱۲ (الف) نوسانهای الکترومغناطیسی یک مدار که با بسامد زاویه‌ای ω'' وادار به نوسان می‌شود. (ب) نوسانهای مکانیکی یک سیستم فنرـجرم که با بسامد زاویه‌ای ω'' وادار به نوسان می‌شود. اجزای متناظر دو سیستم در برابر هم رسم شده‌اند.

سینوسی علاقه‌مندیم که به دنبال از بین رفتن این جریانهای گذرای اولیه در مدار باقی می‌مانند. بدون توجه به اینکه بسامد طبیعی مدار چقدر است، این نوسانهای بار الکتریکی، جریان، یا اختلاف پتانسیل در مدار باید با بسامد عامل وادارندهٔ خارجی، یعنی ω''، رخ دهند.

در شکل ۳۶ـ۱۲ سیستم نوسان‌کنندهٔ الکترومغناطیسی را با سیستم مکانیکی متناظر مقایسه می‌کنیم. ارتعاشگر V، که نیروی متناوب خارجی را اعمال می‌کند، متناظر مولد V است که نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب خارجی را اعمال می‌کند. "همسانی" سایر کمیتها مانند قبل است (جدول ۳۶ـ۱ را ببینید): جابه‌جایی با بار الکتریکی و سرعت با جریان. ضریب القای L، که با تغییر جریان مخالفت می‌کند متناظر با جرم (لَختی) m است که مخالف تغییر سرعت است. ثابت فنر k و عکس ظرفیت خازن C^{-1} نمایشگر "سِفتی" سیستمهای مربوطه‌اند، و به‌ترتیب پاسخ (جابه‌جایی) فنر را به نیرو و پاسخ (بار) خازن را به نیروی محرکهٔ الکتریکی نشان می‌دهند.

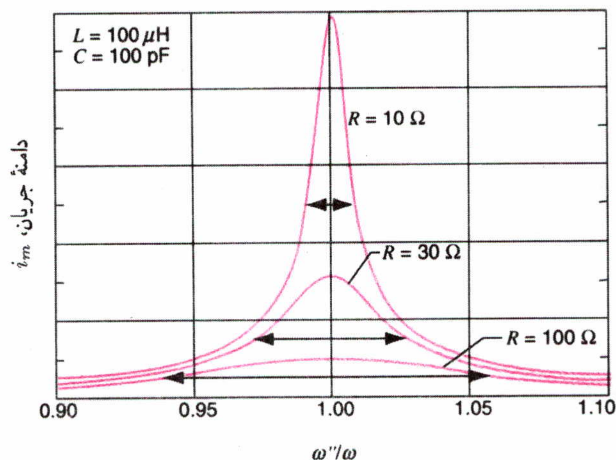
در فصل ۳۷ جواب جریان در مدار شکل ۳۶ـ۱۲(الف) را به‌دست خواهیم آورد، که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$i = i_{\rm m} \sin(\omega'' t - \phi) \qquad (۳۶\text{ـ}۴۳)$$

دامنهٔ جریان $i_{\rm m}$ در معادلهٔ (۳۶ـ۴۳) معیاری از پاسخ مدار ۳۶ـ۱۲(الف) به نیروی محرکهٔ الکتریکی وادارنده است. منطقی است فرض کنیم (مثلاً از تجربهٔ هُل‌دادن تاب) که در صورت نزدیکی بسامد وادارندهٔ ω'' به بسامد طبیعی سیستم، یعنی ω، $i_{\rm m}$ زیاد باشد. به عبارت دیگر، انتظار داریم که نمودار $i_{\rm m}$ برحسب ω'' وقتی

$$\omega'' = \omega = 1/\sqrt{LC} \qquad (۳۶\text{ـ}۴۴)$$

دارای یک بیشینه باشد که آن را شرط تشدید می‌خوانیم.



شکل ۳۶ـ۱۳ منحنیهای تشدید برای مدار نوسان‌کنندهٔ واداشتهٔ شکل ۳۶ـ۱۲(الف). سه منحنی مربوط به سه مقدار متفاوت مقاومت موجود در مدار است. پیکانهای افقی عرض یا "تیزی" هر یک از این تشدیدها را نشان می‌دهند.

شکل ۳۶ـ۱۳ سه نمودار مربوط به $i_{\rm m}$ را برحسب نسبت ω''/ω نشان می‌دهد، که هر یک از آنها مربوط به مقادیر متفاوت مقاومت R است. می‌بینیم که وقتی شرط تشدید معادلهٔ (۳۶ـ۴۴) برقرار باشد هر یک از نمودارها واقعاً دارای یک مقدار بیشینه می‌شوند. توجه کنید که با کاهش R، قلّهٔ تشدید، چنانکه پیکانهای افقی در تراز نیم‌بیشینه نشان می‌دهند، تیزتر می‌شود.

شکل ۳۶ـ۱۳ تجربهٔ متعارف تنظیم یک دستگاه گیرندهٔ رادیویی را نشان می‌دهد. با چرخاندن پیچ تنظیم رادیو، بسامد طبیعی ω یک مدار LC داخلی را میزان می‌کنیم تا با بسامد ω'' مربوط به سیگنال گسیل‌شده از آنتن ایستگاه فرستنده برابر شود؛ در واقع در جستجوی یک حالت تشدید هستیم. در شهرهای بزرگ، که سیگنالهای متعدد با بسامد نزدیک به یکدیگر وجود دارند، تیزی فرایند تنظیم حائز اهمیت می‌شود.

شکل ۳۶ـ۱۳ مانند شکل ۱۷ـ۱۹ است، که قله‌های تشدیدی مربوط به نوسانهای واداشتهٔ یک نوسانگر مکانیکی مانند نوسانگر شکل ۳۶ـ۱۲(ب) را نشان می‌دهد. در این مورد نیز، پاسخ بیشینه وقتی رخ می‌دهد که $\omega'' = \omega$ و قله‌های پاسخ با کاهش عامل میرایی (ضریب b) تیزتر می‌شوند. توجه کنید که شباهت منحنیهای شکل ۳۶ـ۱۳ و شکل ۱۷ـ۱۹ کامل نیست. شکل ۳۶ـ۱۳ دامنهٔ جریان را نشان می‌دهد در صورتی که شکل ۱۷ـ۱۹ نشان‌دهندهٔ منحنی جابه‌جایی است. متغیر مکانیکی متناظر با جریان جابه‌جایی نیست بلکه سرعت است. با این همه، هر دو مجموعه منحنی پدیدهٔ تشدید را نشان می‌دهند.

چندگزینه‌ای

۳۶ـ۱ القاوری

۳۶ـ۲ محاسبهٔ ضریب القا

۱. دو القاگر همسان با ضریب القای L به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند.

(۱) اگر این القاگرها خیلی از هم دور باشند، ضریب القای مؤثر این مجموعه برابر خواهد شد با

(الف) $L/۲$ (ب) $L/\sqrt{۲}$ (ج) $\sqrt{۲}L$ (د) $۲L$

(۲) اگر این دو القاگر را به یکدیگر نزدیک کنیم، آنگاه ضریب القای مؤثر آنها

(الف) افزایش خواهد یافت. (ب) کاهش خواهد یافت.

(ج) ثابت می‌ماند.

(د) تغییر خواهد کرد، ولی پاسخ به پرسش بالا به چگونگی آرایش نسبی القاگرها وابسته است.

۲. دو القاگر همسان با ضریب القای L به‌طور موازی به‌هم متصل شده‌اند.

(۱) اگر این القاگرها خیلی دور از هم باشند، ضریب القای مؤثر این مجموعه برابر خواهد شد با

(الف) $L/۲$ (ب) $L/\sqrt{۲}$ (ج) $\sqrt{۲}L$ (د) $۲L$

(۲) اگر این دو القاگر را به یکدیگر نزدیک کنیم، آنگاه ضریب القای مؤثر آنها

(الف) افزایش خواهد یافت. (ب) کاهش خواهد یافت.

(ج) ثابت می‌ماند.

(د) تغییر خواهد کرد، ولی پاسخ به پرسش بالا به چگونگی آرایش نسبی القاگرها وابسته است.

۳. ضریب القای یک سیم تک‌حلقه‌ای برابر $L_{\circ}$ است. اگر یک حلقه سیم دیگر به بالای حلقهٔ اول افزوده شود، ضریب القای جدید به‌صورت زیر است

(الف) $۴L_{\circ}$ (ب) $۲L_{\circ}$ (ج) $\sqrt{۲}L_{\circ}$ (د) $L_{\circ}^{۲}$

۴. چگونه ضریب القا به‌ازای واحد طول در سیملولهٔ واقعی در نزدیکی مرکزش را می‌توان با ضریب القا به‌ازای واحد طول در نزدیکی دو سر آن مقایسه کرد؟

(الف) ضریب القا به‌ازای واحد طول در نزدیکی مرکز بیشتر است.

(ب) ضریب القا به‌ازای واحد طول در نزدیکی دو سر بیشتر است.

(ج) ضریب القا به‌ازای واحد طول در همه جا یکسان است.

۵. القاگر را می‌توان از یک "لغزانک [1]" فلزی که اساساً یک سیملولهٔ انعطاف‌پذیر است ساخت. اگر طول لغزانک به دو برابر طول اولیه افزایش پیدا کند، آنگاه ضریب القای آن

(الف) به $۲/L_{\circ}$ تغییر خواهد کرد. (ب) به $۴/L_{\circ}$ تغییر خواهد کرد.

(ج) به $\sqrt{L_{\circ}}$ تغییر می‌کند. (د) ثابت باقی می‌ماند.

۶. ضریب القای القاگری برابر با $L_{\circ}$ است. یک القاگر دیگر با این القاگر همسان است جز اینکه دو برابر بزرگتر است؛ القاگر دوم با ضریب ۲ بزرگنمایی شده است. نسبت ضریب القای القاگر دوم به اول چقدر است؟

(الف) ۴ (ب) ۲ (ج) ۱ (د) ۱/۲

(ه) پاسخ به این پرسش بستگی به شکل هندسی القاگر دارد.

۳۶ـ۳ مدارهای LR

۷. یک مقاومت، القاگر، کلید، و باتری به‌صورت سری به‌هم متصل شده‌اند. در آغاز کلید باز است. سپس کلید را می‌بندیم و اجازه می‌دهیم که جریان جاری شود.

(۱) قبل از اینکه سیستم به حالت پایا برسد، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت است.

(۲) قبل از اینکه سیستم به حالت پایا برسد، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر

(الف) افزایش می‌یابد. (ب) کاهش می‌یابد. (ج) ثابت است.

۸. یک القاگر ایده‌آل به‌طور سری به یک مقاومت و یک باتری ایده‌آل متصل شده است. باتری با آهنگ $P(t)$ برای مدار انرژی تأمین می‌کند، مقاومت با آهنگ $P_R(t)$ انرژی تلف می‌کند و القاگر با آهنگ $P_L(t)$ انرژی ذخیره می‌کند. در مورد ارتباط بین $P_R(t)$ و $P_L(t)$ می‌توان استنباط کرد

(الف) $P_R(t) > P_L(t)$ برای تمام زمانهای t که مدار در حال پرشدن است.

(ب) $P_R(t) = P_L(t)$ برای تمام زمانهای t که مدار در حال پرشدن است.

(ج) $P_R(t) < P_L(t)$ برای تمام زمانهای t که مدار در حال پرشدن است.

(د) $P_R(t) > P_L(t)$ فقط در نزدیکی آغاز فرایند پرشدن.

(ه) $P_R(t) < P_L(t)$ فقط در نزدیکی آغاز فرایند پرشدن.

1. Slinky

۳۶ـ۴ ذخیرهٔ انرژی در میدان مغناطیسی

۹. دوباره دو القاگر پرسش چندگزینه‌ای ۶ را در نظر بگیرید و فرض کنید حامل جریانهای یکسانی هستند.

(۱) نسبت چگالی انرژی مغناطیسی مربوط به القاگر بزرگنمایی‌شده به القاگر اصلی چقدر است؟

(الف) ۱/۴ (ب) ۱/۲ (ج) ۲ (د) ۴

(۲) نسبت کل انرژی ذخیره‌شده در القاگر بزرگنمایی‌شده به القاگر اصلی چقدر است؟

(الف) ۱/۴ (ب) ۱/۲ (ج) ۲ (د) ۴

۳۶ـ۵ نوسانهای الکترومغناطیسی: بررسی کیفی

۱۰. یک مدار LC ساده تشکیل شده است از القاگر L و خازن C که به‌طور سری به‌هم بسته شده‌اند. این مدار با بسامد $f_\circ$ نوسان می‌کند. یک القاگر یکسان دیگر و یک خازن یکسان دیگر را به‌صورت سری به این مدار اضافه می‌کنیم؛ فرض کنید القاگرها به‌قدر کافی از هم دورند که میدانهای مغناطیسی آنها در هم تداخل نمی‌کنند. بسامد نوسان این سیستم جدید چقدر است؟

(الف) $4f_\circ$ (ب) $2f_\circ$ (ج) $f_\circ$ (د) $f_\circ/2$ (هـ) $f_\circ/4$

۱۱. بسامد یک نوسانگر LC برابر $f_\circ$ است. سپس فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن را به دوبرابر فاصلهٔ اولیه افزایش می‌دهیم. بسامد این نوسانگر جدید چقدر است؟

(الف) $2f_\circ$ (ب) $\sqrt{2}f_\circ$ (ج) $f_\circ/\sqrt{2}$ (د) $f_\circ/2$

۱۲. کدام‌یک از تغییرات زیر بسامد نوسانگر LC را افزایش می‌دهد؟ (ممکن است که بیش از یک پاسخ درست وجود داشته باشد!)

(الف) قرار دادن یک تیغهٔ دی‌الکتریک در داخل خازن

(ب) قرار دادن یک مادهٔ پارامغناطیس در داخل القاگر

(ج) قرار دادن یک مادهٔ فرومغناطیس در داخل القاگر

(د) قرار دادن یک مادهٔ دیامغناطیس در داخل القاگر

۳۶ـ۶ نوسانهای الکترومغناطیسی: بررسی کمّی

۱۳. یک مدار LC با بسامد f نوسان می‌کند. وقتی که جریان در القاگر $i = i_{\max}/2$ است، بار روی خازن چقدر است؟

(الف) $q = q_{\max}$ (ب) $q = \sqrt{3}q_{\max}/2$

(ج) $q = \sqrt{2}q_{\max}/2$ (د) $q = q_{\max}/2$.

۱۴. یک مدار LC در آغاز با بسامد f و بیشینهٔ جریان $i_{\max}$ نوسان می‌کند. اگر کل انرژی موجود در مدار دوبرابر شود، آنگاه

(۱) دورهٔ تناوب نوسان با مضرب زیر افزایش خواهد یافت

(الف) ۴ (ب) $\sqrt{8}$ (ج) ۲ (د) $\sqrt{2}$

(هـ) ۱ (تغییر نمی‌کند).

(۲) بیشینهٔ مقدار بار روی خازن با مضرب زیر افزایش خواهد یافت

(الف) ۴ (ب) $\sqrt{8}$ (ج) ۲ (د) $\sqrt{2}$

(هـ) ۱ (تغییر نمی‌کند).

(۳) بیشینهٔ جریان جاری در مدار با مضرب زیر افزایش خواهد یافت

(الف) ۴ (ب) $\sqrt{8}$ (ج) ۲ (د) $\sqrt{2}$

(هـ) ۱ (تغییر نمی‌کند).

۳۶ـ۷ نوسانهای میرا و واداشته

۱۵. در چه زمانی انرژی مدار LRC با سریع‌ترین آهنگ کاهش می‌یابد؟

(الف) وقتی که بار روی خازن بیشینه است.

(ب) وقتی که بار روی خازن کمینه است.

(ج) هنگامی که نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در القاگر بیشینه است.

(د) وقتی که گرمای ژول در مقاومت کمینه است.

پرسشها

۱. نشان دهید که هر دو عبارت مربوط به L، یعنی $N\phi_B/i$ (معادلهٔ ۳۶ـ۴) و $\mathscr{E}_L/(di/dt)$ (معادلهٔ ۳۶ـ۱) دارای ابعاد یکسان‌اند.

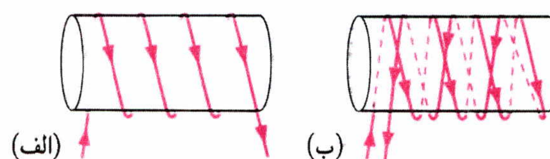
۲. اگر شار عبوری از هر یک از حلقه‌های یک پیچه یکسان باشد، ضریب القای پیچه را می‌توان از عبارت $L = N\phi_B/i$ (معادلهٔ ۳۶ـ۴) محاسبه کرد. اگر این فرض معتبر نباشد، چگونه می‌توان ضریب القای L پیچه را محاسبه کرد؟

۳. مثالهایی ارائه دهید که نشان دهند چگونه شار عبوری از پیچه را می‌توان با کشیدن یا متراکم کردن آن تغییر داد.

۴. می‌خواهید پیچه‌ای را بپیچید که مقاومت داشته باشد ولی اصولاً هیچ‌گونه القاوری نداشته باشد. چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

۵. روی یک استوانهٔ بلند یک رشته سیم را به‌صورت یک لایه از سمت چپ به سمت راست چنان پیچیده‌ایم که، مطابق شکل ۳۶ـ۱۴(الف)، حاوی n دور در واحد طول باشد و ضریب القای آن برابر با L_1 شود. حال اگر عمل پیچیدن سیم به دور استوانه را در همان جهت ادامه دهیم ولی مطابق شکل ۳۶ـ۱۴(ب)، از راست به چپ باز گردیم، به‌طوری که لایهٔ دومی به سیم‌پیچ اضافه شود که آن هم شامل n دور

سیم بر واحد طول باشد، مقدار ضریب القا چقدر می‌شود؟ در این باره توضیح دهید.



شکل ۳۶ـ۱۴ پرسش ۵.

۶. بگویید چرا انتظار دارید که ضریب القای یک کابل هم‌محور با افزایش شعاع رسانای خارجی آن، وقتی شعاع رسانای مرکزی ثابت است، افزایش یابد.

۷. یک قطعه سیم مسی به طول l در اختیار دارید. چگونه می‌توانید ترتیبی بدهید که بیشترین ضریب القا را به‌دست آورید؟

۸. بگویید چگونه یک رشته سیم بلند و مستقیم می‌تواند آثار القاوری نشان بدهد. چگونه می‌توانید در پی این آثار بگردید؟

۹. جریان پایایی در یک پیچه با ثابت زمانی القایی بسیار طولانی برقرار شده است. وقتی با یک کلید جریان قطع می‌شود، قوس الکتریکی شدیدی بین تیغه‌های کلید پدید می‌آید. بگویید چرا این واقعه رخ می‌دهد. (توجه: قطع جریان در مدارهای شدیداً القایی ممکن است ویرانگر و خطرناک باشد.)

۱۰. فرض کنید یک پیچهٔ ایده‌آل (یعنی، یک پیچهٔ اساساً بی‌مقاومت) را به دو سر یک باتری ایده‌آل (باز هم، اساساً بی‌مقاومت) وصل کرده‌اید. چون در این مدار هیچ‌گونه مقاومتی وجود ندارد ممکن است فکر کنید که جریان ناگهان بسیار زیاد می‌شود. از طرف دیگر، ممکن است فکر کنید که، چون ثابت زمانی القایی (مساوی L/R) خیلی بزرگ است، جریان خیلی کُند افزایش می‌یابد، البته اگر اصلاً جریانی برقرار بشود. واقعاً چه اتفاقی می‌افتد؟

۱۱. در یک مدار LR مانند مدار شکل ۳۶ـ۴، آیا نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی هیچ‌گاه می‌تواند بیشتر از نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری بشود؟

۱۲. در یک مدار LR مانند مدار شکل ۳۶ـ۴، آیا جریان در مقاومت همواره برابر با جریان در القاگر است؟

۱۳. در مدار شکل ۳۶ـ۴، در لحظه‌ای که کلید روی نقطهٔ a بسته می‌شود نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی بیشینه است. چگونه ممکن است چنین چیزی رخ دهد، زیرا در آن لحظه اصلاً جریانی در القاگر برقرار نیست؟

۱۴. آیا زمان لازم برای اینکه در یک مدار LR مشخص، جریان به کسر معینی از مقدار تعادلش برسد به مقدار نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت اعمال‌شده بستگی دارد؟

۱۵. اگر جریان در چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی در جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی باشد، انرژی چشمه کاهش می‌یابد؛ اگر جریان در جهت مخالف جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی باشد (مانند پُرکردن باتری)، انرژی چشمه افزایش می‌یابد. آیا این گزاره‌ها در مورد القاگر شکل ۳۶ـ۲ کاربرد دارند؟

۱۶. آیا نیروی محرکهٔ الکتریکی در القاگر می‌تواند در همان جهت نیروی محرکهٔ الکتریکی چشمه باشد، که به القاگر انرژی مغناطیسی تحویل می‌دهد؟

۱۷. در شکل ۳۶ـ۴، کلید را که برای مدتی "طولانی" در a بسته بود در b قرار می‌دهیم. برای انرژی ذخیره‌شده در القاگر چه اتفاقی خواهد افتاد؟

۱۸. پیچه‌ای دارای ضریب القای (اندازه‌گیری‌شدهٔ) L و مقاومت (اندازه‌گیری‌شدهٔ) R است. آیا ثابت زمانی القایی آن الزاماً با رابطهٔ $\tau_L = L/R$ مشخص می‌شود؟ به خاطر داشته باشید که آن معادله را در وضعیتی به‌دست آوردیم که (شکل ۳۶ـ۴ را ببینید) در آن اجزای القاینده و مقاوم از نظر فیزیکی از هم جدا بودند. در این مورد بحث کنید.

۱۹. شکل ۳۶ـ۵(الف) و شکل ۳۱ـ۲۱(ب) به‌ترتیب نمودارهای $\Delta V_R(t)$ مدار LR و مدار RC هستند. چرا این دو منحنی تا این اندازه با هم تفاوت دارند؟ هر یک از نمودارها را برحسب فرایندهای فیزیکی در مدار ذی‌ربط بررسی کنید.

۲۰. دو سیملولهٔ A و B دارای قطر و طول یکسان بوده و هر کدام دارای یک لایهٔ سیم‌پیچ از سیم مسی هستند که سیمهای مجاور با یکدیگر در تماس‌اند و ضخامت لایهٔ عایق ناچیز است. سیملولهٔ A حاوی تعداد زیادی دور از یک سیم نازک و سیملولهٔ B دارای تعداد کمتری دور از یک سیم ضخیم‌تر است. (الف) ضریب القای کدام سیملوله بیشتر است؟ (ب) ثابت زمانی القایی کدام سیملوله بیشتر است؟ پاسخهای خود را ارزیابی کنید.

۲۱. آیا می‌توانید با بحثی مبتنی بر کاربرد دقیق و ماهرانهٔ آهنرباهای میله‌ای نشان دهید که می‌توان انرژی را در میدان مغناطیسی ذخیره کرد؟

۲۲. تمام شباهتهایی را که می‌توانید بین یک خازن با صفحه‌های موازی (برای میدان الکتریکی) و یک سیملولهٔ بلند (برای میدان مغناطیسی) تصور کنید، نام ببرید.

۲۳. در هر یک از عملیات زیر انرژی مصرف می‌شود. بخشی از این انرژی برگرداندنی (قابل تبدیل) به انرژی الکتریکی است که می‌توان از آن برای انجام کار مفید استفاده کرد و بخشی از آن را نمی‌توان، بلکه به‌صورتهای مختلف تلف می‌شود. درکدام‌یک از موارد زیر انرژی الکتریکی برگرداندنی کوچکترین کسر را خواهد داشت: (الف) پُرکردن خازن؛ (ب) پُرکردن باتری انبارشی؛ (ج) برقراری جریان در مقاومت؛ (د) برقراری میدان مغناطیسی؛ و (ه) جابه‌جا کردن رسانا در میدان مغناطیسی؟

۲۴. جهت جریان را در یک سیملوله برعکس می‌کنیم. این کار چه تغییراتی در میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ و چگالی انرژی u_B در نقطه‌های مختلف محور سیملوله به‌وجود آورد؟

۲۵. در ابزارهای تجاری مانند موتورها و مولدها که انرژی الکتریکی و مکانیکی را به هم تبدیل می‌کنند بیشتر از میدانهای مغناطیسی بهره می‌گیریم تا میدانهای الکتروستاتیکی. چرا باید چنین باشد؟

۲۶. چرا نوسان مدار شکل ۳۶ـ۸ وقتی که خازن کاملاً خالی شد متوقف نمی‌شود؟

۲۷. چگونه می‌توان یک مدار LC را با شرایط اولیهٔ شکل ۳۶ـ۸(ج) به نوسان درآورد؟ یک طرح کلیدزنی طراحی کنید که این کار را انجام دهد.

۲۸. منحنی شکل ۳۶ـ۹(ب) با مشتق منحنی شکل ۳۶ـ۹(الف) متناسب است. توضیح دهید چرا.

۲۹. در یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC، که بدون مقاومت فرض شده است، چه عاملی (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ نوسانها را مشخص می‌کند؟

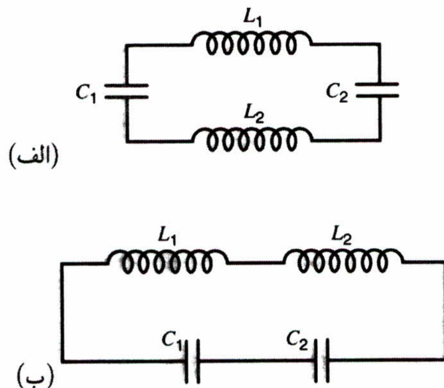
۳۰. در ارتباط با شکلهای ۳۶ـ۸(ج) و ۳۶ـ۸(ز)، بگویید چگونه امکان دارد، درحالی‌که هیچ باری روی خازن وجود ندارد، در القاگر جریان برقرار است.

۳۱. اگر قرار باشد که در شکل ۳۶ـ۸ نوسانها در جهت پادساعتگرد صورت گیرند، چه تغییراتی الزامی است؟

۳۲. در شکل ۳۶ـ۸، کدام ثابت فازهای ϕ در معادلهٔ (۳۶ـ۳۱) این امکان را فراهم می‌آورند که هرکدام از هشت گام نشان داده‌شده در آن شکل را به‌عنوان شرایط اولیه انتخاب کنیم؟

۳۳. اگر بخواهید یک مدار LC از نوع نشان داده‌شده در شکل ۳۶ـ۸ بسازید که با بسامد (الف) $0{,}1$ Hz یا (ب) ۱۰ GHz نوسان کند، با چه مشکل ساختاری مواجه خواهید شد؟

۳۴. دو القاگر L_1 و L_2 و دو خازن C_1 و C_2 را می‌توان به‌صورت شکلهای ۳۶ـ۱۵(الف) یا ۳۶ـ۱۵(ب) به‌طور سری به‌هم متصل کرد. آیا بسامدهای این دو مدار نوسان‌کننده یکسان است؟ دو حالت زیر را بررسی کنید: (الف) $C_1 = C_2$، $L_1 = L_2$ و (ب) $C_1 \neq C_2$ و $L_1 \neq L_2$

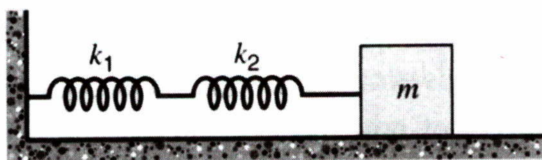


شکل ۳۶ـ۱۵ پرسش ۳۴.

۳۵. در تشابه مکانیکی مدار نوسان‌کنندهٔ LC، کدام کمیت مکانیکی نظیر اختلاف پتانسیل است؟

۳۶. در مقایسهٔ سیستم نوسان‌کنندهٔ الکترومغناطیسی با سیستم نوسان‌کنندهٔ مکانیکی، کدام خواص مکانیکی مشابه خواص الکترومغناطیسی زیرند: ظرفیت، مقاومت، بار، انرژی میدان الکتریکی، انرژی میدان مغناطیسی، ضریب القا و جریان؟

۳۷. دو فنر را به‌هم وصل کرده به جسمی به جرم m می‌بندیم، این مجموعه می‌تواند روی یک سطح افقی بدون اصطکاک، همانند شکل ۳۶ـ۱۶، نوسان کند. مشابه الکترومغناطیسی این سیستم نوسانگر مکانیکی را ترسیم کنید.



شکل ۳۶ـ۱۶ پرسش ۳۷.

۳۸. بگویید چرا ممکن نیست (الف) مدار LC واقعی بدون مقاومت، (ب) القاگر واقعی بدون ظرفیت ذاتی، یا (ج) خازن واقعی بدون القاوری ذاتی داشته باشیم. اعتبار عملی مدار LC شکل ۳۶ـ۸ را که در آن هر سه واقعیت بالا نادیده گرفته شده است بررسی کنید.

۳۹. تمام مدارهای واقعی LC باید شامل مقداری مقاومت باشند. ولی، می‌توانید یک نوسانگر صوتی خاص خریداری کنید که در آن خروجی به‌طور نامحدود دامنهٔ ثابتی داشته باشد و، مانند شکل ۳۶ـ۱۱، کاهش نیابد. این واقعه چگونه رخ می‌دهد؟

۴۰. اگر در شکل ۳۶ـ۱۳ منحنی تشدید به‌ازای $R = ۰$ رسم شود، چه شکلی خواهد داشت؟

۴۱. آیا می‌توانید هیچ‌گونه دلیل فیزیکی برای پذیرش این فرض که در معادله‌های (۳۶ـ۴۰) و (۳۶ـ۴۱) R "کوچک" است ارائه دهید؟ (راهنمایی: بررسی کنید که اگر میرایی R آن‌قدر زیاد باشد که قبل از اینکه معادلهٔ (۳۶ـ۴۰) حتی یک چرخهٔ نوسان را بپیماید، بار q اساساً به صفر برسد، چه واقعه‌ای پیش می‌آید. آیا چنین چیزی ممکن است؟ اگر چنین بشود، فکر می‌کنید که شکل ۳۶ـ۱۱ به چه صورت درخواهد آمد؟)

۴۲. اختلاف بین مدارهای نوسان‌کنندهٔ آزاد، میرا، و واداشته کدام است؟

۴۳. همهٔ سیستمهای مکانیکی و الکتریکی را که فکر می‌کنید دارای یک بسامد طبیعی هستند در جدولی خلاصه کنید، و اگر فرمول آن در این کتاب آمده است آن را نیز در جدول وارد کنید.

۴۴. آیا در مدار یک گیرندهٔ نوسانی رادیویی، داشتن عامل Q پایین موردنظر است یا بالا؟ دربارهٔ پاسخ خودتان توضیح دهید. (مسئلهٔ ۱۵ را ببینید.)

تمرینها

۳۶ـ۱ القاوری

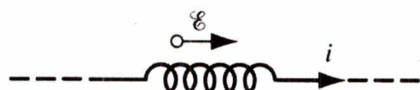
۳۶ـ۲ محاسبهٔ ضریب القا

۱. ضریب القای یک پیچهٔ تنگِ هم پیچیده شده با ۴۰۰ دور با برابر ۸٫۰ mH است. وقتی جریان در این پیچه برابر ۵٫۰ mA است، شار مغناطیسی را که از آن می‌گذرد محاسبه کنید.

۲. یک پیچهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۰٫۳ cm شامل ۳۴ دور سیم‌پیچ، تنگ هم چیده شده است. شدت میدان مغناطیسی خارجی عمود بر صفحهٔ پیچه ۲٫۶۲ mT است. (الف) اگر در پیچه هیچ جریانی وجود نداشته باشد، عدد پیوند شار چقدر است؟ (ب) هرگاه جریانی به شدت ۳٫۷۷ A در جهت خاصی در پیچه برقرار شود، شار خالص عبوری از پیچه صفر می‌شود. ضریب القای پیچه را محاسبه کنید.

۳. سیملوله‌ای با یک لایهٔ سیم عایق‌بندی‌شدهٔ مسی (به قطر ۲٫۵۲ mm) پیچیده شده است. قطر سیملوله ۴٫۱۰ cm و طول آن ۲٫۰ m است. ضریب القا به‌ازای هر متر از این سیملوله در نزدیکی مرکز آن چقدر است؟ فرض کنید که سیمهای مجاور با هم در تماس‌اند و ضخامت لایهٔ عایق‌بندی ناچیز است.

۴. در یک لحظهٔ مشخص جریان و نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی در یک القاگر به‌صورت نشان داده‌شده در شکل ۳۶ـ۱۷ هستند. (الف) آیا جریان افزایش می‌یابد یا کاهش پیدا می‌کند؟ (ب) نیروی محرکهٔ الکتریکی برابر ۱۷ V و آهنگ تغییر جریان ۲۵ kA/s است؛ مقدار ضریب القای این قطعه چقدر است؟



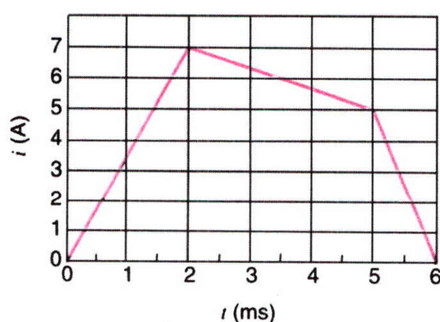
شکل ۳۶ـ۱۷ تمرین ۴.

۵. ضریب القای یک پیچه با N دور سیم که تنگِ هم پیچیده شده، چنان است که هرگاه جریان با آهنگ ۵٫۰ A/s تغییر کند، نیروی محرکهٔ الکتریکی ۳٫۰ mV در آن القا می‌شود. جریان پایای ۸٫۰ A، شار مغناطیسی ۴۰ μWb را از هر دور سیم‌پیچ عبور می‌دهد. (الف) ضریب القای پیچه را محاسبه کنید. (ب) پیچه شامل چند دور است؟

۶. چنبره‌ای با مقطع مربعی به ضلع ۵٫۲۰ و شعاع داخلی ۱۵٫۳ cm دارای ۵۳۶ دور سیم‌پیچ است و جریانی به شدت ۸۱۰ mA از آن می‌گذرد. شار مغناطیسی را که از مقطع این چنبره می‌گذرد محاسبه کنید.

۷. سیملوله‌ای به طول ۱۲۶ cm از ۱۸۷۰ دور سیم‌پیچ تشکیل شده است که جریانی به شدت ۴٫۳۶ A از آن می‌گذرد. هستهٔ این سیملوله پر از آهن شده است که ثابت تراوایی مؤثر آن ۹۶۸ است. با فرض اینکه بتوان این سیملوله را یک سیملولهٔ ایده‌آل به قطر ۵٫۴۵ cm در نظر گرفت، ضریب القای آن را محاسبه کنید.

۸. جریان i در یک القاگر ۴٫۶H برحسب زمان t طبق نمودار شکل ۳۶ـ۱۸ تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را در بازه‌های زمانی (الف) از $t = ۰$ تا $t = ۲$ ms، (ب) از $t = ۲$ ms تا $t = ۵$ ms و (ج) از $t = ۵$ ms تا $t = ۶$ ms محاسبه کنید. (رفتار مربوط به انتهای بازه‌ها را نادیده بگیرید.)



شکل ۳۶ـ۱۸ تمرین ۸.

۹. دو القاگر L_1 و L_2 را به‌طور موازی به‌هم بسته‌ایم و در فاصلهٔ بسیار زیادی از یکدیگر قرار داده‌ایم. (الف) نشان دهید که ضریب

القای معادل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

(ب) چرا برای اینکه این رابطه معتبر باشد، اجزای مدار باید در فاصلهٔ زیادی از یکدیگر قرار گیرند؟

۱۰. دو القاگر L_1 و L_2 را به‌صورت سری به‌هم بسته‌ایم و در فاصلهٔ بسیار زیادی از یکدیگر قرار داده‌ایم. (الف) نشان دهید که ضریب القای معادل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

(ب) چرا برای اینکه این رابطه معتبر باشد، اجزای مدار باید در فاصلهٔ زیادی از یکدیگر قرار گیرند؟

۳۶ـ۳ مدارهای LR

۱۱. در یک مدار LR، بلافاصله پس از حذف باتری از مدار، جریان در مدت ۱٫۵۰ s از ۱٫۱۶ A به ۱۰٫۲ mA کاهش می‌یابد. اگر L در این مدار ۹٫۴۴ H باشد، مقاومت R را معین کنید.

۱۲. مدار LR شکل ۳۶ـ۴ را در نظر بگیرید. (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی $\mathscr{E}_L$ درست در لحظه‌ای که کلید در وضعیت a بسته می‌شود، برحسب نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری $\mathscr{E}$ چقدر است؟ (ب) مقدار $\mathscr{E}_L$ پس از گذشت دو ثابت زمانی چقدر است؟ (ج) پس از گذشت چند ثابت زمانی $\mathscr{E}_L$ درست برابر با نصف نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری $\mathscr{E}$ خواهد شد؟

۱۳. عدد پیوند شار عبوری از یک پیچهٔ معین با مقاومت ۷۴۵ mΩ برابر با ۲۶٫۲ mWb است وقتی که جریان در پیچه ۵٫۴۸ A باشد. (الف) ضریب القای پیچه را محاسبه کنید. (ب) اگر ناگهان یک باتری ۶٫۰۰ V به دو سر پیچه متصل شود، چقدر طول می‌کشد تا جریان از صفر به ۲٫۵۳ A افزایش پیدا کند؟

۱۴. (الف) نشان دهید که معادلهٔ (۳۶ـ۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{di}{i - \mathscr{E}/R} = -\frac{R}{L}dt$$

(ب) از این معادله انتگرال بگیرید تا معادلهٔ (۳۶ـ۱۳) را به‌دست آورید.

۱۵. فرض کنید در مدار ۳۶ـ۴ (وقتی کلید در وضعیت a بسته شده است) نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری چنان تغییر می‌کند که جریان از رابطهٔ $i(t) = (۳٫۰\ \text{A}) + (۵٫۰\ \text{A/s})t$ به‌دست می‌آید. فرض کنید $R = ۴٫۰\,\Omega$، $L = ۶٫۰\ \text{H}$ است و عبارتی برای نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری برحسب زمان به‌دست آورید. (راهنمایی: از قاعدهٔ حلقه استفاده کنید.)

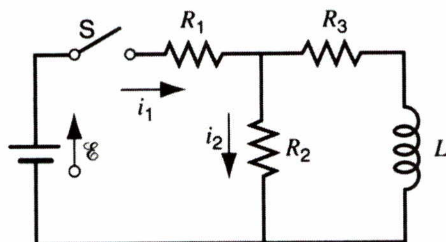
۱۶. در یک مدار LR جریان در مدت ۵٫۲۲ s به یک‌سوم مقدار حالت پایا می‌رسد. ثابت زمانی القایی این مدار را محاسبه کنید.

۱۷. اختلاف پتانسیل ۴۵ V ناگهان به پیچه‌ای با $L = ۵۰\ \text{mH}$ و $R = ۱۸۰\,\Omega$ اعمال می‌شود. پس از گذشت ۱٫۲ ms، جریان با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۱۸. در لحظهٔ $t = ۰$ یک باتری به یک القاگر و یک مقاومت که به‌طور سری به‌هم بسته شده‌اند متصل می‌شود. جدول زیر اختلاف پتانسیلهای اندازه‌گیری‌شدهٔ دو سر القاگر، برحسب ولت، را به‌صورت تابعی از زمان، برحسب ms، پس از اتصال باتری به‌دست می‌دهد. با استفاده از این جدول (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی باتری و (ب) ثابت زمانی مدار را به‌دست آورید.

t(ms)	ΔV_L(V)	t(ms)	ΔV_L(V)
۱٫۰	۱۸٫۲۴	۵٫۰	۵٫۹۸
۲٫۰	۱۳٫۸	۶٫۰	۴٫۵۳
۳٫۰	۱۰٫۴	۷٫۰	۳٫۴۳
۴٫۰	۷٫۹۰	۸٫۰	۲٫۶۰

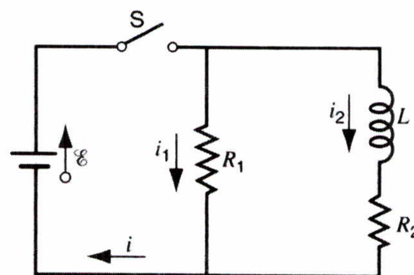
۱۹. در شکل ۳۶ـ۱۹ داریم، $\mathscr{E} = ۱۰۰\ \text{V}$، $R_1 = ۱۰\,\Omega$، $R_2 = ۲۰\,\Omega$، $R_3 = ۳۰\,\Omega$، و $L = ۲٫۰\ \text{H}$. مقدار جریانهای i_1 و i_2 را (الف) بلافاصله پس از بستن کلید S؛ (ب) پس از گذشت زمانی طولانی از بستن کلید S؛ (ج) بلافاصله پس از باز شدن کلید S؛ و (د) پس از گذشت زمانی طولانی بعد از باز شدن کلید S، معین کنید.



شکل ۳۶ـ۱۹ تمرین ۱۹.

۲۰. یک هستهٔ چنبره‌ای چوبی با مقطع مربعی، دارای شعاع داخلی ۱۰ cm و شعاع خارجی ۱۲ cm است. روی این هسته یک لایه سیم (به قطر ۰٫۹۶ mm؛ با مقاومت بر واحد طول ۲۱ mΩ/m) پیچیده‌ایم. (الف) ضریب القا و (ب) ثابت زمانی القایی این چنبره را محاسبه کنید. ضخامت لایهٔ عایق سیم را نادیده بگیرید.

۲۱. در مدار شکل ۳۶ـ۲۰ داریم، $R_1 = 5.0\,\Omega$ ،$\mathscr{E} = 10\,\text{V}$، $R_2 = 10\,\Omega$، و $L = 5.0\,\text{H}$. برای دو وضعیت متفاوت (۱) بلافاصله پس از بستن کلید S و (۲) پس از آنکه کلید S برای مدتی طولانی بسته ماند، کمیتهای زیر را محاسبه کنید (الف) جریان i_1 که از مقاومت R_1 می‌گذرد، (ب) جریان i_2 که از مقاومت R_2 می‌گذرد، (ج) جریانی که از کلید عبور می‌کند، (د) اختلاف پتانسیل دو سر R_2، (ه) اختلاف پتانسیل دو سر L و (و) di_2/dt.



شکل ۳۶ـ۲۰ تمرین ۲۱.

۳۶ـ۴ ذخیرهٔ انرژی در میدان مغناطیسی

۲۲. یک القاگر چنبره‌ای $92\,\text{mH}$ فضایی به حجم $0.022\,\text{m}^3$ را در بر می‌گیرد. اگر میانگین چگالی انرژی در این چنبره برابر $71\,\text{J/m}^3$ باشد، جریان را محاسبه کنید.

۲۳. وقتی شدت جریان $62.0\,\text{mA}$ است، انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در یک القاگر مشخص $25.3\,\text{mJ}$ است. (الف) ضریب القای این القاگر را محاسبه کنید. (ب) برای اینکه انرژی ذخیره‌شده چهار برابر شود به چه شدت جریانی نیاز داریم؟

۲۴. مقطع سیملوله به طول $85.3\,\text{cm}$ برابر $17.2\,\text{cm}^2$ است. این سیملوله دارای ۹۵۰ دور سیم و حامل جریانی به شدت $6.57\,\text{A}$ است. (الف) چگالی انرژی میدان مغناطیسی را در داخل این سیملوله محاسبه کنید. (ب) کل انرژی ذخیره‌شده در میدان مغناطیسی داخل سیملوله را به‌دست آورید. (آثار لبه‌ای مربوط به دو سر سیملوله را نادیده بگیرید.)

۲۵. چگالی انرژی مغناطیسی در مرکز مدار یک الکترون چرخان در اتم هیدروژن را معین کنید (مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۲ را ببینید).

۲۶. شدت میدان مغناطیسی در فضای بین ستاره‌ای کهکشان راه شیری در حدود $100\,\text{pT}$ است. (الف) چگالی انرژی متناظر با این میدان را برحسب eV/cm^3 محاسبه کنید. (ب) در این میدان چه مقدار انرژی در مکعبی که هر ضلع آن ۱۰ سال نوری است ذخیره شده است؟ (برای آشنایی با مقیاس اندازه‌گیری طول، توجه کنید که نزدیکترین ستاره به ما، غیر از خورشید، در فاصلهٔ ۴٫۳ سال نوری قرار دارد و "شعاع" کهکشان ما در حدود ۸۰۰۰۰ سال نوری است.)

۲۷. اگر بخواهیم چگالی انرژی ذخیره‌شده در یک میدان الکتریکی یکنواخت برابر با چگالی انرژی مربوط به یک میدان مغناطیسی به شدت $0.50\,\text{T}$ باشد، میدان الکتریکی باید چقدر باشد؟

۲۸. فرض کنید ثابت زمانی القایی مدار شکل ۳۶ـ۴ برابر $37.5\,\text{ms}$ و جریان در مدار در لحظهٔ $t = 0$، وقتی که کلید در موقعیت a قرار داده می‌شود، برابر صفر باشد. در چه زمانی آهنگ افزایش انرژی داخلیِ مقاومت با آهنگ ذخیرهٔ انرژی در القاگر برابر می‌شود؟

۲۹. پیچه‌ای را به‌طور سری به مقاومت $10.4\,\text{k}\Omega$ وصل می‌کنیم. وقتی باتری $55.0\,\text{V}$ را به این مجموعه متصل کنیم، جریان پس از $5.20\,\text{ms}$ به $1.96\,\text{mA}$ می‌رسد. (الف) ضریب القای پیچه را معین کنید. (ب) چه مقدار انرژی تا همین لحظه در پیچه ذخیره شده است؟

۳۰. در مدار شکل ۳۶ـ۴ فرض کنید $\mathscr{E} = 12.2\,\text{V}$ ،$R = 7.34\,\Omega$، و $L = 5.48\,\text{H}$ است. باتری در لحظه $t = 0$ به مدار متصل می‌شود. (الف) در دو ثانیهٔ اول باتری چه مقدار انرژی تأمین می‌کند؟ (ب) چه مقدار از این انرژی در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود؟ (ج) چه مقدار انرژی در مقاومت مصرف می‌شود؟

۳۱. شدت میدان مغناطیسی زمین در روی سطح آن در حدود $60\,\mu\text{T}$ است. با فرض اینکه این مقدار، در فاصله‌های شعاعی که در مقایسه با شعاع زمین کوچک‌اند، ثابت باشد و با نادیده گرفتن تغییرات این میدان در نواحی نزدیک به قطبهای مغناطیسی، انرژی ذخیره‌شده در یک پوستهٔ کروی بین سطح زمین و ۱۶ کیلومتر بالاتر از آن را محاسبه کنید.

۳۲. یک رشته سیم مسی حامل جریانی به شدت $10\,\text{A}$ است که به‌طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) چگالی انرژی مغناطیسی و (ب) چگالی انرژی الکتریکی را در سطح سیم محاسبه کنید. قطر این سیم $2.5\,\text{mm}$ و مقاومت آن به‌ازای واحد طول $3.3\,\Omega/\text{km}$ است.

۳۶ـ۵ نوسانهای الکترومغناطیسی: بررسی کیفی

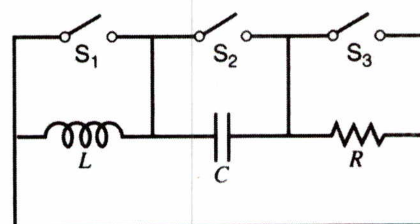
۳۳. در یک مدار LC بیشینهٔ انرژیی که القاگری با ضریب القای $1.48\,\text{mH}$ ذخیره می‌کند $11.2\,\mu\text{J}$ است. قلهٔ جریان در این مدار چقدر است؟

۳۴. اگر بیشینهٔ بار روی خازن $1.63\,\mu\text{C}$ و کل انرژی ذخیره‌شده در مدار LC برابر $142\,\mu\text{J}$ باشد، ظرفیت این مدار چقدر است؟

۳۵. از نوسانگرهای LC در مدارهای متصل به بلندگوها استفاده می‌شود تا بخشی از صداهای "موسیقی الکترونیکی" را تولید کنند. برای اینکه بتوان بسامد ۱۰ kHz را در نزدیکی حد بالایی گسترهٔ بسامدهای شنیداری تولید کرد، باید از چه القاگری همراه با یک خازن به ظرفیت ۶٫۷μF استفاده کرد.

۳۶. در یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC می‌دانیم $L = ۱٫۱۳\,\text{mH}$ و $C = ۳٫۸۸\mu\text{F}$ است. بیشینهٔ بار روی خازن ۲٫۹۴μC است. بیشینهٔ جریان را معین کنید.

۳۷. مدار نشان داده‌شده در شکل ۳۶ـ۲۱ را در نظر بگیرید. وقتی کلید S_1 بسته و دو کلید دیگر باز باشد، ثابت زمانی مدار برابر با τ_C است. وقتی کلید S_2 بسته ولی دو کلید دیگر باز باشد، ثابت زمانی مدار برابر با τ_L است، وقتی کلید S_3 بسته ولی دو کلید دیگر باز باشد، مدار با دورهٔ تناوب T نوسان می‌کند. نشان دهید که $T = ۲\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$.



شکل ۳۶ـ۲۱ تمرین ۳۷.

۳۸. یک القاگر با ضریب القای ۱۰٫۰ mH و دو خازن با ظرفیتهای ۵٫۰۰μF و ۲٫۰۰μF در اختیار دارید. فهرستی از بسامدهای تشدیدی را تهیه کنید، که می‌توانید با بستن این اجزای مدار به‌صورتهای مختلف به یکدیگر، به‌دست آورید.

۳۹. جسمی به جرم ۴۸۵ g که به فنری متصل است نوسان می‌کند. وقتی این فنر به اندازهٔ ۲٫۱۰ mm از حالت تعادل کشیده شود نیروی بازگرداننده ۸٫۱۳ N را اعمال می‌کند. (الف) بسامد زاویه‌ای نوسان را محاسبه کنید. (ب) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (ج) در مدار LC مشابه با این سیستم مکانیکی اگر L را برابر با ۵٫۲۰ H اختیار کنیم ظرفیت آن چقدر خواهد شد؟

۳۶ـ۶ نوسانهای الکترومغناطیسی: بررسی کمّی

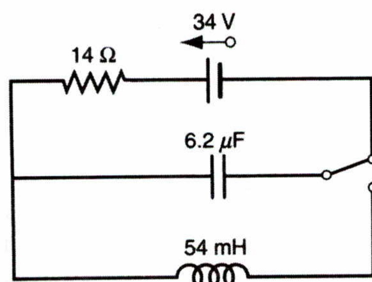
۴۰. در یک مدار LC داریم: $L = ۵۲٫۲\,\text{mH}$، $C = ۴٫۲۱\mu\text{F}$ و جریان در آغاز بیشینه است. چه مدت طول می‌کشد تا خازن برای اولین بار پُر شود؟

۴۱. در یک مدار LC، تمام انرژی در مدت ۱٫۵۲μs از انرژی الکتریکی در خازن به انرژی مغناطیسی در القاگر تبدیل می‌شود. (الف) دورهٔ تناوب نوسان چقدر است؟ (ب) بسامد نوسان چقدر است؟ (ج) چه مدت پس از آنکه انرژی مغناطیسی به بیشینهٔ مقدارش رسید دوباره بیشینه خواهد شد؟

۴۲. یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC متشکل از یک خازن با ظرفیت ۱٫۱۳ nF و یک پیچه با ضریب القای ۳٫۱۷ mH دارای اُفت پتانسیل بیشینهٔ ۲٫۸۷ V است. (الف) بیشینهٔ بار خازن، (ب) قلهٔ جریان مدار، و (ج) بیشینهٔ انرژی ذخیره‌شده در میدان مغناطیسی پیچه، را معین کنید.

۴۳. یک مدار نوسان‌کننده LC طوری طراحی شده است که در قلهٔ جریان ۳۱ mA کار کند. ضریب القای این مدار در ۴۲ mH ثابت است و بسامد آن با تغییر ظرفیت C تغییر می‌کند. (الف) اگر خازن این مدار دارای بیشینهٔ قلهٔ ولتاژ ۵۰ ولت باشد، آیا مدار می‌تواند به‌درستی و با رعایت نکات ایمنی در بسامد ۱٫۰ MHz کار کند؟ (ب) بیشینه بسامد این مدار برای عملکرد ایمن چقدر است؟ (ج) کمینهٔ ظرفیت خازن چقدر است؟

۴۴. در مدار شکل ۳۶ـ۲۲، کلید برای مدت زیادی در موقعیت a قرار داشته است. اکنون آن را در موقعیت b قرار می‌دهیم. (الف) بسامد جریان نوسانی حاصل را محاسبه کنید. (ب) دامنهٔ نوسانهای جریان چقدر خواهد شد؟



شکل ۳۶ـ۲۲ تمرین ۴۴.

۴۵. ضریب القای یک مدار LC برابر ۳٫۰ و ظرفیت آن ۱۰μF است. کمیتهای زیر را برای این مدار محاسبه کنید: (الف) بسامد زاویه‌ای و (ب) دورهٔ تناوب نوسان. در لحظهٔ $t = ۰$ خازن با بار ۲۰۰μC پُر شده است و جریان در مدار صفر است. مقدار بار روی خازن را برحسب زمان به‌طور تقریبی رسم کنید.

۴۶. القاگری را به دو سر خازنی وصل کرده‌ایم که ظرفیت آن را می‌توان با چرخاندن یک دکمه تغییر داد. می‌خواهیم بسامد نوسانهای LC به‌طور خطی با زاویهٔ چرخش دکمه تغییر کند و با چرخاندن دکمه به اندازهٔ

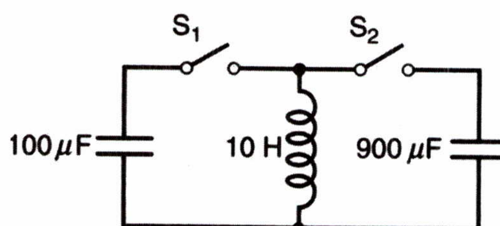
$180°$ این بسامدها از ۲۰۰ به ۴۰۰ kHz برسد. اگر $L = ۱٫۰$ mH باشد، C را برحسب تابعی از زاویهٔ چرخش °۰ تا °۱۸۰ رسم کنید.

۴۷. (الف) در یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC، در زمانی که انرژی میدان الکتریکی نصف انرژی میدان مغناطیسی است، مقدار بار موجود روی صفحه‌های خازن چقدر است؟ این بار را برحسب بیشینهٔ بار خازن بیان کنید. (ب) از زمانی که خازن کاملاً پُر است، چه کسری از دورهٔ تناوب باید سپری شود تا این وضعیت پیش آید؟

۴۸. در یک مدار LC داریم، $L = ۲۴٫۸$ mH و $C = ۷٫۷۳\mu$F. در $t = ۰$ جریان برابر ۹٫۱۶ mA، بار روی خازن برابر $۳٫۸۳\mu$C، و خازن در حال پرشدن است. (الف) انرژی کل مدار چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ بار روی خازن چقدر است؟ (ج) بیشینهٔ جریان چقدر است؟ (د) اگر بار روی خازن با عبارت $q = q_{\rm m}\cos(\omega t + \phi)$ مشخص شود، زاویهٔ فاز ϕ چقدر است؟ (ه) فرض کنید که همهٔ داده‌ها مانند قبل است بجز اینکه در لحظهٔ $t = ۰$ خازن در حال تخلیه‌شدن است. در این صورت زاویهٔ فاز ϕ چقدر است؟

۴۹. از خازن متغیری که ظرفیت آن در گسترهٔ ۱۰ تا ۳۶۵ pF تغییر می‌کند همراه با یک پیچه به‌صورت مدار LC با بسامد متغیر برای تنظیم ورودی یک رادیو استفاده می‌شود. (الف) نسبت بسامد بیشینه به بسامد کمینهٔ قابل تنظیم با این خازن چقدر است؟ (ب) اگر بخواهیم از این خازن برای تنظیم رادیو از ۰٫۵۴ تا ۱٫۶۰ MHz استفاده کنیم، نسبتی که در قسمت (الف) محاسبه کردیم بیش از حد بزرگ است. با افزودن یک خازن به‌صورت موازی با خازن متغیر می‌توان این گستره را تنظیم کرد. ظرفیت این خازن باید چقدر باشد تا این مجموعه برای گسترهٔ بسامدهای موردنظر تنظیم شود و برای این منظور از چه ضریب القایی باید استفاده کرد؟

۵۰. در شکل ۳۶ـ۲۳، خازن ۹۰۰μF در آغاز با اختلاف پتانسیل ۱۰۰ V پُر شده است و خازن ۱۰۰μF خالی است. به تفصیل بگویید که چگونه می‌توان با استفاده از کلیدهای S_1 و S_2 خازن ۱۰۰ میکروفارادی را با اختلاف پتانسیل ۳۰۰ V پُر کرد.



شکل ۳۶ـ۲۳ تمرین ۵۰.

۵۱. در یک مدار نوسان‌کنندهٔ LC داریم، $L = ۳٫۰$ mH و $C = ۲٫۷\mu$F. در لحظهٔ $t = ۰$ بار خازن صفر و جریان در مدار ۲٫۰ A است. (الف) بیشینهٔ باری که روی خازن ظاهر می‌شود چقدر است؟ (ب) برحسب دورهٔ تناوب T، چه مدت باید از $t = ۰$ بگذرد، تا انرژی ذخیره‌شده در خازن، با بیشترین آهنگ افزایش پیدا کند؟ (ج) بالاترین آهنگ جاری‌شدن انرژی به داخل خازن چقدر است؟

۳۶ـ۷ نوسانهای میرا و واداشته

۵۲. یک مدار تک‌حلقه‌ای تشکیل شده است از یک مقاومت $۷٫۲۲\Omega$، یک القاگر ۱۲٫۳ H و یک خازن $۳٫۱۸\mu$F. در آغاز بار خازن $۶٫۳۱\mu$C و جریان برابر با صفر است. بار خازن را پس از N چرخهٔ کامل نوسان محاسبه کنید. سپس N را برابر ۵، ۱۰، و ۱۰۰ اختیار کنید.

۵۳. در یک مدار LC میرا، زمان لازم را برای اینکه بیشینهٔ انرژی موجود در خازن در یک نوسان به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش یابد تعیین کنید. فرض کنید که در $t = ۰$ داریم $q = q_{\rm m}$.

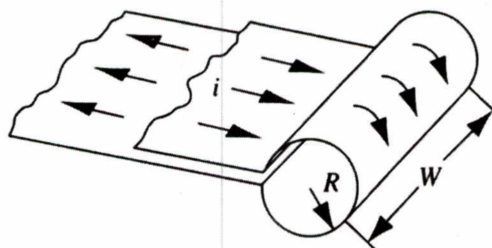
۵۴. چه مقاومت Rی را باید به یک القاگر $L = ۲۲۰$ mH و یک خازن $C = ۱۲\mu$F به‌صورت سری متصل کنیم تا بیشینهٔ بار روی خازن پس از ۵۰ چرخه به ۹۹٪ مقدار اولیه‌اش کاهش یابد؟

۵۵. در مداری داریم $L = ۱۲٫۶$ mH و $C = ۱٫۱۵\mu$F. چه مقاومتی باید در این مدار قرار دهیم تا بسامد تشدید (نامیرا) به اندازهٔ ۰٫۰۱ درصد کاهش پیدا کند؟

مسئله‌ها

۱. یک سیملولهٔ باریک و بلند را می‌توان خم کرد و به شکل چنبره درآورد. نشان دهید که اگر سیملوله به‌قدرکافی باریک و بلند باشد، معادلهٔ مربوط به ضریب القای چنبره (معادلهٔ ۳۶ـ۱۰) با معادلهٔ مربوط به سیملوله (معادلهٔ ۳۶ـ۷) که طولش متناسب اختیار شده باشد، هم‌ارز است.

۲. یک نوار پهن مسی به پهنای W را خم کرده‌ایم و آن را به‌صورت یک استوانهٔ باریک به شعاع R با دو زایدهٔ تخت، مطابق شکل ۳۶ـ۲۴، در آورده‌ایم. جریان i در گذر از نوار، به‌طور یکنواخت در سراسر پهنای آن توزیع می‌شود. به این ترتیب یک "سیملولهٔ تک‌دور" به‌وجود می‌آید. (الف) عبارتی برای اندازهٔ میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ در قسمت استوانه‌ای (در فاصلهٔ زیاد از لبه‌ها) به‌دست آورید. (راهنمایی: فرض کنید میدان در خارج از این سیملولهٔ تک‌دور بسیار کوچک باشد.) (ب) با نادیده‌گرفتن دو زایدهٔ تخت این آرایش هندسی، ضریب القای این سیملولهٔ تک‌دور را نیز معین کنید.



شکل ۳۶ـ۲۴ مسئلهٔ ۲.

۳. دو رشتهٔ سیم بلند موازی، که شعاع هر یک از آنها a و فاصلهٔ بین مرکز آنها از یکدیگر d است، حامل جریانهای مساوی در جهتهای مخالف‌اند. نشان دهید که، با چشم‌پوشی از شار موجود در خود سیمها، ضریب القای یک قطعه به طول l این جفت سیم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

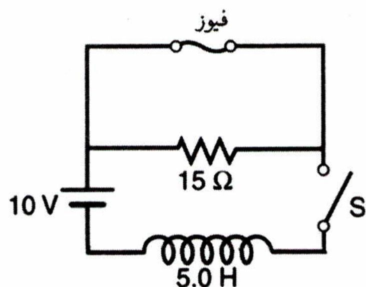
$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳ـ۴ را ببینید. (راهنمایی: شار عبوری از مستطیلی را محاسبه کنید که دو قطعه سیم دو ضلع مقابل آن را تشکیل می‌دهند.)

۴. دو رشته سیم بلند موازی مسی (۲٫۶۰ mm = قطر) حامل جریان ۱۱٫۳ A در جهتهای مخالف‌اند. (الف) اگر فاصلهٔ بین مرکزهای این دو رشته سیم ۲۱٫۸ mm باشد، شار موجود در فضای بین محورهای دو سیم به‌ازای هر متر طول را محاسبه کنید. (ب) چه کسری از این شار در داخل سیمها قرار می‌گیرد و در نتیجه خطای نسبی را که با چشم‌پوشی از این شار در محاسبهٔ ضریب القای مربوط به دو سیم موازی مرتکب می‌شویم چقدر است؟ مسئلهٔ ۳ را ببینید. (ج) محاسبه‌های قسمت (الف) را برای جریانهای موازی تکرار کنید.

۵. ضریب القای کابل هم محور شکل ۳۶ـ۷ را مستقیماً از معادلهٔ (۳۶ـ۴) به‌دست آورید. (راهنمایی: شار عبوری از سطح مستطیل شکلی به طول l و به عرض $b-a$ را که عمود بر میدان $\vec{\mathbf{B}}$ قرار دارد، محاسبه کنید).

۶. در شکل ۳۶ـ۲۵ قطعهٔ موجود در شاخهٔ بالایی یک فیوز ایده‌آل ۳٫۰ A است. مقاومت این قطعه مادامی که جریان در آن کمتر از ۳٫۰ A باشد صفر است. اگر جریان به ۳٫۰ A برسد، این فیوز می‌سوزد و از آن پس مقاومتش بینهایت می‌شود. در لحظهٔ $t = 0$ کلید S را می‌بندیم. (الف) چه موقع فیوز می‌سوزد؟ (ب) نمودار جریان i، جاری در القاگر را برحسب زمان رسم کنید. زمانی را که فیوز می‌سوزد نشانه‌گذاری کنید.



شکل ۳۶ـ۲۵ مسئلهٔ ۶.

۷. نشان دهید که ثابت زمانی القایی τ_L را می‌توان به‌صورت زمان لازم برای رسیدن جریان به مقدار تعادل در مدار LR نیز تعریف کرد؛ البته به شرطی که جریان با همان آهنگ اولیه افزایش یابد.

۸. ضریب القای پیچهٔ یک آهنربای الکتریکی ابررسانا که برای انجام تحقیقات در زمینهٔ تشدید مغناطیسی هسته‌ای (NMR) به‌کار می‌رود ۱۵۲ H است و جریانی با شدت ۳۲ A از آن می‌گذرد. این پیچه در هلیم مایع با گرمای نهان تبخیر ۸۵ J/mol غوطه‌ور است. (الف) انرژی در میدان مغناطیسی پیچه را محاسبه کنید. (ب) اگر خاصیت ابررسانایی به‌طور ناگهانی از بین برود و پیچه دارای مقاومت محدود و معینی بشود، چه مقدار هلیم تبخیر می‌شود.

۹. (الف) برای یک چنبره با سطح مقطع مستطیل، عبارتی برای چگالی انرژی برحسب فاصلهٔ شعاعی r به‌دست آورید. (ب) از چگالی انرژی روی کل حجم چنبره انتگرال بگیرید و کل انرژی ذخیره‌شده در میدان مغناطیسی چنبره را محاسبه کنید. (ج) از معادلهٔ (۳۶ـ۱۰) استفاده کنید، انرژی ذخیره‌شده در چنبره را مستقیماً از ضریب القا محاسبه، و آن را با جواب به‌دست‌آمده در قسمت (ب) مقایسه کنید.

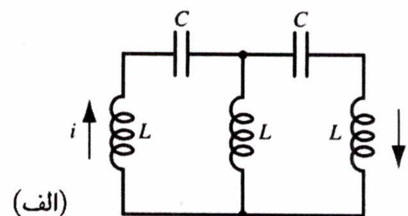
۱۰. ثابت کنید، پس از آنکه کلید S در شکل ۳۶ـ۴ از a به b تغییر کرد تمام انرژی ذخیره‌شده در القاگر سرانجام به‌صورت انرژی داخلی در مقاومت ظاهر خواهد شد.

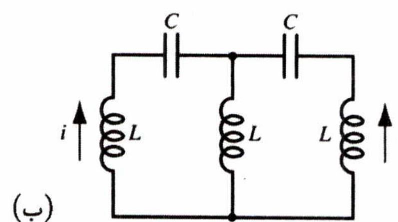
۱۱. سیم بلندی حامل جریان i است که به‌طور یکنواخت روی سطح مقطع آن توزیع شده است. (الف) نشان دهید انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در داخل سیم در قطعه‌ای به طول l برابر است با $\mu_0 i^2 l/16\pi$. (چرا این انرژی به قطر سیم بستگی ندارد؟) (ب) نشان دهید که ضریب القای مربوط به شار مغناطیسی داخل سیم برای قطعه‌ای به طول l از این سیم برابر است با $\mu_0 l/8\pi$.

۱۲. بسامد تشدید یک مدار سری شامل ضریب القای L_1 و ظرفیت C_1 برابر ω_0 است. یک مدار سری دیگر شامل ضریب القای L_2 و ظرفیت C_2 نیز همان بسامد تشدید را دارد. بسامد تشدید یک مدار

سری که شامل چهار جزء یادشده در بالا باشد، برحسب $\omega_\circ$، چقدر است؟ مقاومت را نادیده بگیرید. (راهنمایی: از فرمولهای مربوط به ظرفیتهای معادل و ضرایب القای معادل استفاده کنید.)

۱۳. سه القاگر کاملاً یکسان L و دو خازن کاملاً یکسان C به‌صورت مدار دوحلقه‌ای نشان داده‌شده در شکل ۳۶ـ۲۶ به‌هم متصل شده‌اند. (الف) فرض کنید جریانها به‌صورت شکل ۳۶ـ۲۶(الف) باشند. جریان در القاگر میانی چقدر است؟ معادله‌های حلقه‌ها را بنویسید و نشان دهید که این معادله‌ها در صورتی صادق‌اند که جریان با بسامد زاویه‌ای $\omega = ۱/\sqrt{LC}$ نوسان کند. (ب) اکنون تصور کنید که جریانها به‌صورت نشان داده‌شده در شکل ۳۶ـ۲۶(ب) باشند. جریان در القاگر میانی چقدر است؟ معادله‌های مربوط به حلقه‌ها را بنویسید و نشان دهید که این معادله‌ها در صورتی صادق‌اند که جریان با بسامد زاویه‌ای $\omega = ۱/\sqrt{۳LC}$ نوسان کند. (ج) با توجه به اینکه این مدار می‌تواند با دو بسامد متفاوت نوسان کند، نشان دهید که نمی‌توان این مدار دوحلقه‌ای را با مدار LC تک‌حلقه‌ای هم‌ارز جایگزین کرد.





شکل ۳۶ـ۲۶ مسئلهٔ ۱۳.

۱۴. (الف) با قراردادن مستقیم معادلهٔ (۳۶ـ۴۰) در معادلهٔ (۳۶ـ۳۹) نشان دهید که $\omega' = \sqrt{\omega^۲ - (R/۲L)^۲}$. (ب) در مداری که $L = ۴٫۴\,\text{H}$ و $C = ۷٫۳\mu\text{F}$ است، وقتی مقاومت از ۰ تا ۱۰۰Ω افزایش می‌یابد، بسامد نوسان به چه نسبت تغییر می‌کند؟

۱۵. در یک مدار LC میرا، نشان دهید که نسبت انرژی اتلافی به انرژی اولیه در هر چرخهٔ نوسان، $\Delta U/U$، با تقریب بسیار خوبی از رابطهٔ $۲\pi R/\omega L$ به‌دست می‌آید. کمیت $\omega L/R$ را اغلب Q (برای "کمیت") مدار می‌خوانیم. یک مدار با "Qی بالا" دارای مقاومت کمی است و اتلاف انرژی نسبی آن در هر چرخه (مساوی $۲\pi/Q$) نیز کم است.

۱۶. فرض کنید در یک مدار LC میرا، دامنهٔ نوسانهای مربوط به بار پس از n چرخه به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش پیدا کند. نشان دهید که کاهش نسبی بسامد تشدید، که بر اثر مقاومت به‌وجود می‌آید، با تقریب بسیار خوبی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{۰٫۰۰۶۱}{n^۲}$$

که مستقل از L، C، یا R است.

مسئلهٔ کامپیوتری

۱. یک سیملولهٔ استوانه‌ای واقعی به طول l، قطر $d = ۰٫۱۰l$، و n دور سیم‌پیچ به‌ازای واحد طول در اختیار داریم. با فرض اینکه میدان مغناطیسی مربوط به نقطه‌های خارج از محور استوانه با عبارت دقیق روی محور توصیف شوند (معادلهٔ ۳۳ـ۲۷ را ببینید)، ضریب القای سیملوله را به‌صورت عددی محاسبه کنید. پاسخ خود را با تقریب مربوط به سیملولهٔ ایده‌آل مقایسه کنید. در این پاسخ عددی از تغییرات میدان در نقطه‌های خارج از محور چشم‌پوشی کردیم. آیا این عمل به پاسخی منجر می‌شود که خیلی بزرگ یا خیلی کوچک است؟

۲. ضریب القای یک حلقه سیم تخت به شعاع R را محاسبه کنید. فرض کنید شعاع سیم $r = ۰٫۱۰\,R$، و اینکه سهم میدان مغناطیسی در داخل سیم در ضریب القای حلقه چشم‌پوشیدنی است.

۳۷

مدارهای جریان متناوب

مدارهای جریان متناوب (که معمولاً با نشانهٔ اختصاری AC نشان داده می‌شوند) در سیستمهای توزیع برق، رادیو، تلویزیون، و دیگر وسایل مخابراتی، و نیز گسترهٔ وسیعی از موتورهای الکتریکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. عنوان "متناوب" به این معنی است که جریان به‌طور دوره‌ای از یک جهت به جهت دیگر تغییر می‌کند. به‌طور کلی با جریانهایی کار می‌کنیم که برحسب زمان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کنند؛ ولی، همان‌طور که قبلاً در حرکت موجی دیدیم، شکل موجهای پیچیده را می‌توان ترکیبهایی از موجهای سینوسی (از طریق تحلیل فوریه) در نظر گرفت. رفتار مدارهای جریان با وابستگی زمانی دلخواه را می‌توان نخست با شناخت رفتار مدارهایی که جریان در آنها برحسب زمان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند، درک کرد.

در این فصل رفتار مدارهای ساده شامل مقاومت، القاگر، و خازن را بررسی و فرض می‌کنیم که نیروی محرکهٔ الکتریکی موجود در مدار برحسب زمان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند.

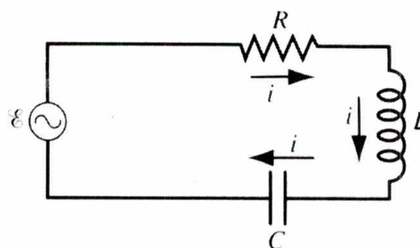
۳۷ـ۱ جریانهای متناوب

در بخش ۳۶ـ۷ مدار RLC سری را، با تمرکز بر رفتار آن در حالت تشدید، مورد بررسی قرار دادیم. در این حالت بسامد نیروی محرکهٔ الکتریکی وادارنده برابر با بسامد طبیعی یک نوسانگر LC است. در اینجا همان مدار را در نظر می‌گیریم، که در آن بسامد وادارنده ممکن است بسیار دور از بسامد تشدید باشد. مدارهای LC، نوعاً، دارای بسامدهای تشدید درگسترهٔ kHz تا MHz هستند، در حالی‌که نیروی محرکهٔ الکتریکی وادارنده، معمولاً توسط وزارت نیرو در بسامد ۵۰ Hz تأمین می‌شود. رهیافت کلی ما در این فصل برای هر بسامد وادارنده‌ای معتبر است و تشدید را هم به‌صورت یک حالت خاص در برمی‌گیرد.

می‌توانیم چنین فرض کنیم که نیروی محرکهٔ الکتریکی وادارنده از مولدی، از نوع مورد بحث در فصل ۳۴ (شکل ۳۴ـ۱۳ را ببینید)، سرچشمه می‌گیرد. مولد، نیروی محرکهٔ الکتریکی تولید می‌کند که به‌طور سینوسی برحسب زمان تغییر می‌کند (شکل ۳۴ـ۱۴)، و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_\text{m} \sin \omega t \qquad (۳۷ـ۱)$$

در اینجا $\mathscr{E}_\text{m}$ دامنهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی متغیر برحسب زمان است و ω بسامد زاویه‌ای آن (برحسب rad/s) که با رابطهٔ $\omega = ۲\pi f$ با بسامد f (برحسب هرتز) بستگی دارد. در مدار، چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی متغیر برحسب زمان با نماد —⊙— نشان داده می‌شود. وقتی که نیروی محرکهٔ الکتریکی در هر چرخه بین مقادیر مثبت و منفی تغییر می‌کند، جریان در مدار تغییر جهت می‌دهد. چنین مداری را مدار جریان متناوب (AC) می‌نامیم.



شکل ۳۷ـ۱ یک مدار تک‌حلقه‌ای متشکل از یک مقاومت، القاگر، و خازن. مولد، چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب است که جریان متناوبی در مدار برقرار می‌کند.

هدف ما در این فصل شناخت نتیجهٔ اِعمال یک نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب، به شکل معادلهٔ (۳۷ـ۱)، به مداری متشکل از اجزای مقاومتی، القایی، و خازنی است. راههای زیادی برای اتصال این اجزا در مدار وجود دارد؛ به‌عنوان مثالی از تحلیل مدارهای AC، مدار سری RLC شکل ۳۷ـ۱ را در این فصل بررسی می‌کنیم، که در آن مقاومت R، القاگر L، و خازن C را به‌صورت سری به دو سر یک نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب، از نوع نشان داده‌شده به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۳۷ـ۱)، متصل کرده‌ایم.

در مدت زمان کوتاهی پس از آنکه نیروی محرکهٔ الکتریکی در آغاز به مدار اِعمال شد، جریان به شکل نامنظم و عجیبی با زمان تغییر می‌کند. این تغییرات که حالتهای گذار خوانده می‌شوند، به سرعت از بین می‌روند و پس از آن درمی‌یابیم که جریان به‌صورت سینوسی و با همان بسامد زاویه‌ای چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی تغییر می‌کند. فرض می‌کنیم مدار را پس از آنکه در این شرایط به پایداری رسید مورد مطالعه قرار دهیم، که در این حالت می‌توان جریان را به‌صورت زیر نوشت:

$$i = i_{\rm m}\sin(\omega t - \phi) \qquad (۳۷\text{ـ}۲)$$

که در آن $i_{\rm m}$ دامنهٔ جریان (بیشینهٔ مقدار جریان) است و ϕ ثابت فاز زاویهٔ فاز است که ارتباط فاز بین $\mathscr{E}$ و i را مشخص می‌کند. (توجه کنید که در معادلهٔ (۳۷ـ۱) برای نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت فاز را برابر صفر فرض کردیم. همچنین توجه داشته باشید که در معادلهٔ (۳۷ـ۲) ثابت فاز را با علامت منفی نوشتیم؛ این گزینش ثابت فاز در بحث مربوط به ارتباط فاز بین جریان و نیروی محرکهٔ الکتریکی متداول است.) بسامد زاویه‌ای، ω، در معادلهٔ (۳۷ـ۲) همان بسامد زاویه‌ای معادلهٔ (۳۷ـ۱) است.

فرض می‌کنیم کمیتهای $\mathscr{E}_{\rm m}$، ω، R، L، و C معلوم باشند. هدف از این محاسبه‌ها یافتن $i_{\rm m}$ و ϕ است به‌طوری که معادلهٔ (۳۷ـ۲) جریان را کاملاً مشخص کند. در اینجا از یک روش کلی برای مدار سری RLC استفاده می‌کنیم؛ برای تحلیل مدارهای پیچیده‌تر (که شامل اجزایی در ترکیبهای گوناگون موازی و سری هستند) می‌توان از روش مشابهی استفاده کرد. این روش را می‌توان برای نیروهای محرکهٔ الکتریکی غیرسینوسی نیز مورد استفاده قرار داد، زیرا نیروهای محرکهٔ الکتریکی با رفتار زمانی پیچیده‌تر را می‌توان با بهره‌گیری از روش تحلیل فوریه (بخش ۱۸ـ۷ را ببینید) به‌صورت مجموعه‌ای از جملات سینوسی نوشت و جریان حاصل را نیز می‌توان به همین ترتیب به‌صورت برهم‌نهی تعداد زیادی از جملات سینوسی از نوع معادلهٔ (۳۷ـ۲) در نظر گرفت. بنابراین شناخت مدار سری RLC که با نیروی محرکهٔ الکتریکی سینوسی کار می‌کند برای درک رفتار وابسته به زمان تمام مدارها ضروری است.

۳۷ـ۲ سه جزء جداگانه

قبل از اینکه به تحلیل مدار شکل ۳۷ـ۱ بپردازیم، بحث دربارهٔ پاسخ جداگانهٔ هر یک از سه جزء مدار به یک جریان متناوب از نوع معادلهٔ (۳۷ـ۲) سودمند است. فرض می‌کنیم که با اجزای ایده‌آل سروکار داریم؛ یعنی به‌عنوان مثال، القاگر فقط دارای خاصیت القاوری است و هیچ مقاومت یا ظرفیتی ندارد.

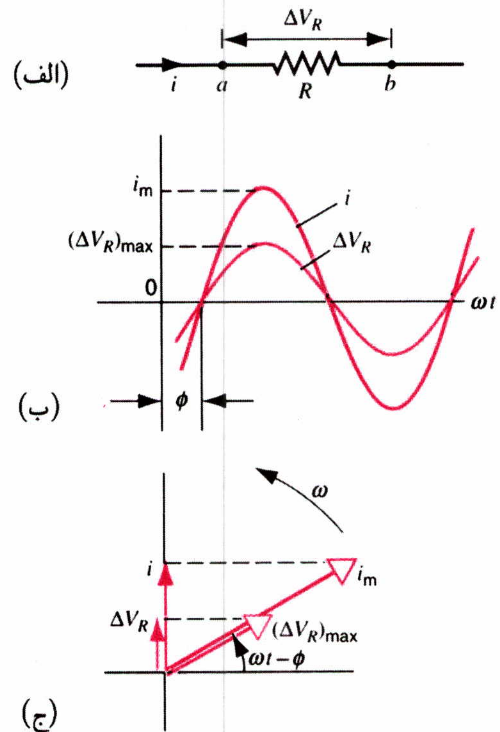
جزء مقاومتی

در شکل ۳۷ـ۲ (الف) مقاومتی را در بخشی از یک مدار نشان داده‌ایم، که در آن جریان i (که با معادلهٔ (۳۷ـ۲) مشخص شده)، به روشی که در شکل معلوم نیست، برقرار شده است. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت را به‌صورت ΔV_R (مساوی با $V_a - V_b$) تعریف می‌کنیم و می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta V_R = iR = i_{\rm m}R\sin(\omega t - \phi) \qquad (۳۷\text{ـ}۳)$$

مقایسهٔ معادله‌های (۳۷ـ۲) و (۳۷ـ۳) نشان می‌دهد که کمیتهای متغیر در زمان ΔV_R و i با یکدیگر همفازند: یعنی همزمان به بیشینهٔ مقدارشان می‌رسند. این ارتباط فازی را در شکل ۳۷ـ۲ (ب) نشان داده‌ایم.

شکل ۳۷ـ۲ (ج) روش دیگر نگاه کردن به این وضعیت را نشان می‌دهد. نمودار این شکل نمودار فازور خوانده می‌شود، که در آن فازوَرها به‌صورت پیکانهایی نشان داده شده‌اند که با بسامد زاویه‌ای ω در جهت پادساعتگرد حول مبدأ می‌چرخند. فازورها دارای این ویژگیها



شکل ۳۷ـ۲ (الف) مقاومتی در یک مدار جریان متناوب AC. (ب) جریان و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت همفازند. (ج) نمودار فازوری که جریان و اختلاف پتانسیل را نشان می‌دهد.

هستند. (۱) طول هر فازور با بیشینهٔ مقدار کمیت متناوب مورد نظر متناسب است: برای اختلاف پتانسیل، از معادلهٔ (۳۷ـ۳) می‌دانیم که $(\Delta V_R)_{\max} = i_m R$، و در مورد جریان از معادلهٔ (۳۷ـ۲) می‌دانیم که طول فازور برابر با i_m است. (۲) تصویر فازور روی محور قائم مقدار لحظه‌ای کمیت متناوب مورد نظر را به‌دست می‌دهد. پیکانهای روی محور قائم، با توجه به معادله‌های (۳۷ـ۲) و (۳۷ـ۳) به‌ترتیب i و ΔV_R را نشان می‌دهند. همفازی ΔV_R و i پیامد قرار گرفتن فازورهای آنها در شکل ۳۷ـ۲(ج) بر روی یک خط است.

نمودار فازور شباهت زیادی با شکل ۱۷ـ۱۴ دارد، که در آن ارتباطی بین حرکت دایره‌ای یکنواخت و حرکت هماهنگ ساده برقرار کردیم. شاید به خاطر داشته باشید که تصویر مکان ذره‌ای که دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت است روی هر یک از محورها یک جابه‌جایی است که، مانند حرکت هماهنگ ساده، به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند. در اینجا با چرخش فازورها، تصاویر آنها بر روی محور قائم، جریان یا ولتاژ متغیر سینوسی را به‌دست می‌دهند. چرخش فازورها را در شکل ۳۷ـ۲(ج) دنبال و خود را متقاعد کنید که این نمودار فازور معادله‌های (۳۷ـ۲) و (۳۷ـ۳) را به‌طور کامل و دقیق توصیف می‌کند.

جزء القایی

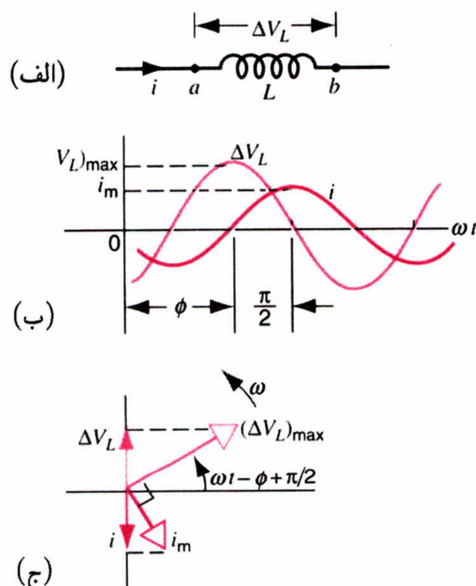
در شکل ۳۷ـ۳(الف) بخشی از مدار را نشان داده‌ایم که فقط شامل یک جزء القایی است. اختلاف پتانسیل ΔV_L (مساوی $V_a - V_b$) دو سر القاگر با معادلهٔ (۳۶ـ۲) به جریان ارتباط پیدا می‌کند

$$\Delta V_L = L\frac{di}{dt} = L i_{\mathrm{m}} \omega \cos(\omega t - \phi) \qquad (۳۷\text{ـ}۴)$$

که آن را با مشتق گرفتن از معادلهٔ (۳۷ـ۲)، برای جریان به‌دست آوردیم. اتحاد مثلثاتی $\cos\theta = \sin(\theta + \pi/۲)$ این امکان را فراهم می‌آورد که معادلهٔ (۳۷ـ۴) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Delta V_L = L i_{\mathrm{m}} \omega \sin(\omega t - \phi + \pi/۲) \qquad (۳۷\text{ـ}۵)$$

مقایسهٔ معادله‌های (۳۷ـ۲) و (۳۷ـ۵) نشان می‌دهد که کمیتهای متغیر در زمان، ΔV_L و i همفاز نیستند؛ بلکه یک‌چهارم چرخه با هم اختلاف فاز دارند، ΔV_L از i جلوتر است (یا i از ΔV_L عقب افتاده است). معمولاً می‌گوییم که در القاگر جریان به اندازهٔ ۹۰° از اختلاف پتانسیل عقب می‌افتد. این موضوع را در شکل ۳۷ـ۳(ب) نشان داده‌ایم، که در آن نمودار معادله‌های (۳۷ـ۲) و (۳۷ـ۵) را رسم کرده‌ایم. توجه داشته باشید که با گذشت زمان، شدت جریان i یک‌چهارم چرخه پس از آنکه ΔV_L به بیشینهٔ مقدارش رسید، بیشینه می‌شود.



شکل ۳۷ـ۳ (الف) القاگری در یک مدار AC. (ب) جریان ۹۰° از اختلاف پتانسیل دو سر القاگر عقب می‌افتد. (ج) یک نمودار فازور که جریان و اختلاف پتانسیل را نشان می‌دهد.

این ارتباط فازی بین i و ΔV_L در نمودار فازور شکل ۳۷ـ۳(ج) نشان داده شده است. وقتی فازورها به‌صورت پادساعتگرد می‌چرخند، بدیهی است که فازور i یک‌چهارم چرخه بعد از فازور ΔV_L می‌آید، یعنی نسبت به آن تأخیر دارد.

در تحلیل مدارهای AC، بهتر است که واکنایی القایی X_L را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$X_L = \omega L \qquad (۳۷\text{ـ}۶)$$

برحسب این کمیت، معادلهٔ (۳۷ـ۵) را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\Delta V_L = i_{\rm m} X_L \sin(\omega t - \phi + \pi/۲) \qquad (۳۷\text{ـ}۷)$$

از مقایسهٔ معادله‌های (۳۷ـ۳) و (۳۷ـ۷)، می‌بینیم که یکای SI مربوط به X_L باید همان یکای R، یعنی اهم، باشد. این ارتباط را می‌توان مستقیماً از مقایسهٔ معادلهٔ (۳۷ـ۶) و عبارت مربوط به ثابت زمانی القایی، $\tau_L = L/R$، مشاهده کرد. گرچه هر دوی این کمیتها برحسب اهم اندازه‌گیری می‌شوند، ولی واکنایی با مقاومت یکسان نیست.

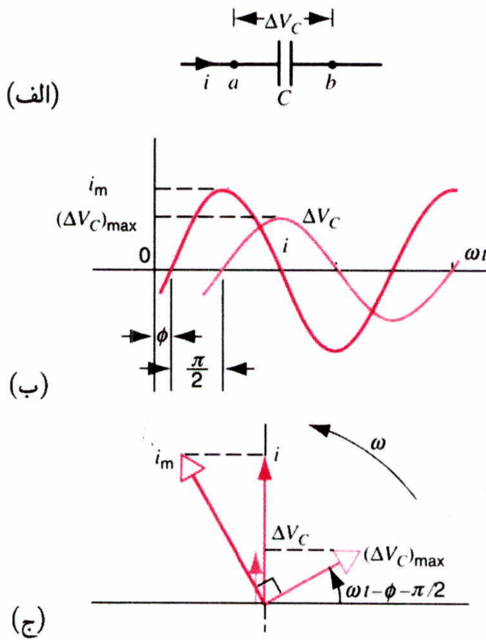
با استفاده از معادلهٔ (۳۷ـ۷)، بیشینهٔ مقدار ΔV_L برابر است با

$$(\Delta V_L)_{\rm max} = i_{\rm m} X_L \qquad (۳۷\text{ـ}۸)$$

جزء خازنی

در شکل ۳۷ـ۴(الف) بخشی از مدار را نشان داده‌ایم که فقط شامل یک جزء خازنی است. در اینجا هم جریان i را، که با معادلهٔ (۳۷ـ۲) مشخص شده است، عاملی برقرار می‌کند که در شکل نشان داده نشده است.* فرض می‌کنیم بار موجود روی صفحهٔ طرف چپ برابر با q باشد، به‌طوری که یک جریان مثبت به داخل این صفحه بار q را افزایش می‌دهد؛ یعنی $i = dq/dt$ ایجاب می‌کند که به‌ازای $i > ۰$ باید $dq > ۰$ باشد. اختلاف پتانسیل ΔV_C (مساوی با $V_a - V_b$)

* درنظرگرفتن خازن به‌عنوان جزئی از مدار حامل جریان ممکن است در آغاز دشوار باشد؛ بدیهی است که بار الکتریکی در خازن جریان پیدا نمی‌کند. شاید درنظرگرفتن جریان بار به‌صورت زیر مفید باشد؛ جریان i بار q را وارد صفحهٔ سمت چپ خازن می‌کند، بنابراین باید یک بار $q-$ از بخشی از مدار که فراتر از صفحهٔ سمت راست خازن است به صفحهٔ سمت راست خازن جاری شود. این جریان بار $q-$ از راست به چپ کاملاً معادل جریان بار $q+$ از چپ به راست است، که با جریان روی صفحهٔ طرف چپ کاملاً یکسان است. به این ترتیب جریان در یک طرف خازن ممکن است در طرف دیگر آن ظاهر شود، با آنکه هیچ مسیر رسانایی بین دو صفحهٔ خازن وجود ندارد!



شکل ۳۷ـ۴ (الف) خازنی در یک مدار AC. (ب) جریان به اندازهٔ °۹۰ از اختلاف پتانسیل دو سر خازن جلو می‌افتد. (ج) یک نمودار فازور که جریان و اختلاف پتاسیل را نمایش می‌دهد.

بین دو سر خازن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i\, dt}{C} \qquad (۳۷\text{ـ}۹)$$

با انتگرال‌گیری از جریان i، معادلهٔ (۳۷ـ۲)، داریم

$$\Delta V_C = -\frac{i_{\rm m}}{\omega C}\cos(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{i_{\rm m}}{\omega C}\sin(\omega t - \phi - \pi/۲) \qquad (۳۷\text{ـ}۱۰)$$

که در اینجا از اتحاد مثلثاتی $\cos\theta = -\sin(\theta - \pi/۲)$ استفاده کردیم.

از مقایسهٔ معادله‌های (۳۷ـ۲) و (۳۷ـ۱۰)، می‌بینیم که i و ΔV_C به اندازهٔ °۹۰ با هم اختلاف فاز دارند، که در اینجا i جلوتر از ΔV_C است. شکل ۳۷ـ۴(ب) نمودارهای i و ΔV_C را برحسب زمان نشان می‌دهد؛ توجه کنید که در این شکل منحنی جریان i یک‌چهارم چرخه یا °۹۰ زودتر (یا قبل) از ΔV_C به بیشینهٔ مقدارش می‌رسد. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که در، جریان خازن °۹۰ جلوتر از اختلاف پتانسیل است.

ارتباط فاز دو نمودار فازور شکل ۳۷ـ۴(ج) نشان داده شده است. وقتی که فازورها پادساعتگرد می‌چرخند، واضح است که فازور i یک‌چهارم چرخه جلوتر از فازور ΔV_C است.

جدول ۳۷ـ۱ رابطه‌های مربوط به فاز و دامنهٔ جریانها و ولتاژهای متناوب

جزء مدار	نماد	پاگیری[الف] (امپدانس)	فاز جریان	رابطهٔ مربوط به دامنه
مقاومت	R	R	همفاز با ΔV_R	$(\Delta V_R)_{\max} = i_{\mathrm{m}} R$
القاگر	L	X_L	تأخر فاز ۹۰° با ΔV_L	$(\Delta V_L)_{\max} = i_{\mathrm{m}} X_L$
خازن	C	X_C	تقدم فاز ۹۰° با ΔV_C	$(\Delta V_C)_{\max} = i_{\mathrm{m}} X_C$

الف) پاگیری واژه‌ای کلی است که شامل مقاومت و واکنایی می‌شود.

مانند واکنایی القایی، مناسب است که یک واکنایی خازنی، X_C، را نیز به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (۳۷\text{ـ}۱۱)$$

که برحسب آن می‌توان معادلهٔ (۳۷ـ۱۰) را به‌صورت زیر نوشت

$$\Delta V_C = i_{\mathrm{m}} X_C \sin(\omega t - \phi - \pi/2) \qquad (۳۷\text{ـ}۱۲)$$

از مقایسهٔ معادله‌های (۳۷ـ۳) و (۳۷ـ۱۲)، می‌بینیم که یکای X_C نیز باید اهم باشد. این نتیجه را می‌توان از مقایسهٔ معادلهٔ (۳۷ـ۱۱) با عبارت مربوط به ثابت زمانی خازنی، یعنی $\tau_C = RC$ نیز به‌دست آورد.

بیشینهٔ مقدار ΔV_C از معادلهٔ (۳۷ـ۱۲) به‌دست می‌آید

$$(\Delta V_C)_{\max} = i_{\mathrm{m}} X_C \qquad (۳۷\text{ـ}۱۳)$$

نتیجه‌های به‌دست‌آمده برای هر یک از سه جزء منفرد مدار در جدول ۳۷ـ۱ خلاصه شده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۱ در شکل ۳۷ـ۳(الف) فرض کنید $L = ۲۳۰\ \mathrm{mH}$، $f = ۶۰\ \mathrm{Hz}$، و $(\Delta V_L)_{\max} = ۳۶\ \mathrm{V}$. (الف) واکنایی القایی X_L را تعیین کنید. (ب) دامنهٔ جریان را در مدار به‌دست آورید.

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۷ـ۶) داریم

$$X_L = \omega L = ۲\pi f L = (۲\pi)(۶۰\ \mathrm{Hz})(۲۳۰\times۱۰^{-۳}\mathrm{H}) = ۸۷\Omega$$

(ب) از معادلهٔ (۳۷ـ۸)، دامنهٔ جریان در مدار چنین است

$$i_{\mathrm{m}} = \frac{(\Delta V_L)_{\max}}{X_L} = \frac{۳۶\ \mathrm{V}}{۸۷\Omega} = ۰٫۴۱\ \mathrm{A}$$

مشاهده می‌کنیم که، گرچه واکنایی مقاومت نیست، اما واکنایی القایی برای القاگر همان نقش مقاومت الکتریکی را برای مقاومت دارد. توجه کنید که با دوبرابر شدن بسامد، واکنایی القایی دوبرابر می‌شود و دامنهٔ جریان به نصف کاهش می‌یابد. می‌توان این موضوع را به‌صورت فیزیکی هم فهمید: برای رسیدن به مقدار یکسان برای ΔV_L، باید جریان را با همان آهنگ تغییر دهید ($\Delta V_L = L\, di/dt$). اگر بسامد را دوبرابر کنید، زمان تغییر نصف می‌شود به‌طوری که بیشینهٔ جریان نیز نصف می‌شود. در جمع‌بندی می‌توان گفت: در القاگرها، هر چه بسامد بیشتر باشد، واکنایی بیشتر است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۲ در شکل ۳۷ـ۴(الف)، فرض کنید $C = ۱۵\mu\mathrm{F}$، $f = ۶۰\ \mathrm{Hz}$، و $(\Delta V_C)_{\max} = ۳۶\ \mathrm{V}$. (الف) واکنایی خازنی X_C را معین کنید. (ب) دامنهٔ جریان را در مدار به‌دست آورید.

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۷ـ۱۱)، داریم

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{۲\pi f C} = \frac{1}{(۲\pi)(۶۰\ \mathrm{Hz})(۱۵\times۱۰^{-۶}\mathrm{F})} = ۱۷۷\Omega$$

(ب) از معادلهٔ (۳۷ـ۱۳)، برای دامنهٔ جریان، داریم

$$i_{\mathrm{m}} = \frac{(\Delta V_C)_{\max}}{X_C} = \frac{۳۶\ \mathrm{V}}{۱۷۷\Omega} = ۰٫۲۰\ \mathrm{A}$$

توجه کنید که اگر بسامد را دوبرابر کنیم، واکنایی خازنی به نصف کاهش می‌یابد و دامنهٔ جریان دوبرابر خواهد شد. می‌توان این موضوع را به‌صورت فیزیکی نیز درک کرد: برای رسیدن به مقدار یکسان ΔV_C باید همان مقدار بار را به خازن تحویل داد ($\Delta V_C = q/C$). اگر بسامد دوبرابر شود، برای تحویل این مقدار بار زمان موجود نصف می‌شود و بنابراین بیشینهٔ جریان باید دوبرابر شود. در جمع‌بندی می‌توان گفت: در خازنها هر چه بسامد بیشتر باشد، واکنایی کمتر است.

۳۷ـ۳ مدار RLC تک‌حلقه‌ای

با پایان‌یافتن تحلیل اجزای جداگانهٔ مدار یعنی R، L، و C اکنون می‌توان به تحلیل مدار شکل ۳۷ـ۱ پرداخت، که در آن هر سه جزء وجود دارد. نیروی محرکهٔ الکتریکی با معادلهٔ (۳۷ـ۱) مشخص شده است.

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\rm m} \sin \omega t$$

و جریان در این مدار به شکل معادلهٔ (۳۷ـ۲) است، یعنی

$$i = i_{\rm m} \sin(\omega t - \phi)$$

هدف ما یافتن $i_{\rm m}$ و ϕ است.

این کار را با استفاده از قاعدهٔ حلقه (بخش ۳۱ـ۳) در مورد مدار شکل ۳۷ـ۱ آغاز می‌کنیم، که از اینجا می‌رسیم به

$$\mathscr{E} - \Delta V_R - \Delta V_L - \Delta V_C = 0$$

$$\mathscr{E} = \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C \qquad (۳۷ـ۱۴)$$

معادلهٔ (۳۷ـ۱۴) را می‌توان با استفاده از روشهای گوناگونی مانند تحلیل مثلثاتی، تحلیل نموداری با استفاده از فازورها، و تحلیل دیفرانسیلی برای یافتن دامنهٔ جریان $i_{\rm m}$ و فاز ϕ حل کرد.

تحلیل مثلثاتی

تا اینجا رابطه‌هایی بین اختلاف پتانسیل دو سر هر جزء و جریانی که از آن جزء می‌گذرد به‌دست آوردیم. بنابراین معادله‌های (۳۷ـ۳)، (۳۷ـ۷)، و (۳۷ـ۱۲) را در معادلهٔ (۳۷ـ۱۴) قرار می‌دهیم و از آن نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\rm m} \sin \omega t &= i_{\rm m} R \sin(\omega t - \phi) \\ &+ i_{\rm m} X_L \sin(\omega t - \phi + \pi/2) \\ &+ i_{\rm m} X_C \sin(\omega t - \phi - \pi/2) \qquad (۳۷ـ۱۵)\end{aligned}$$

که در این معادله، از معادلهٔ (۳۷ـ۱) برای نیروی محرکهٔ الکتریکی استفاده کردیم. با بهره‌گیری از اتحادهای مثلثاتی معادلهٔ (۳۷ـ۱۵) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\rm m} \sin \omega t &= i_{\rm m} R \sin(\omega t - \phi) + i_{\rm m} X_L \cos(\omega t - \phi) \\ &- i_{\rm m} X_C \cos(\omega t - \phi) \\ &= i_{\rm m}[R \sin(\omega t - \phi) \\ &+ (X_L - X_C)\cos(\omega t - \phi)] \qquad (۳۷ـ۱۶)\end{aligned}$$

که می‌توان آن را با اندکی عملیات به‌صورت زیر نوشت (تمرین ۱۲ را ببینید)

$$\mathscr{E}_{\rm m} \sin \omega t = i_{\rm m} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \sin \omega t \qquad (۳۷ـ۱۷)$$

مشروط بر اینکه داشته باشیم

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (۳۷ـ۱۸)$$

دامنهٔ جریان مستقیماً از معادلهٔ (۳۷ـ۱۷) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}i_{\rm m} &= \frac{\mathscr{E}_{\rm m}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \\ &= \frac{\mathscr{E}_{\rm m}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad (۳۷ـ۱۹)\end{aligned}$$

این کار، تحلیل مدار سری RLC را تکمیل می‌کند، زیرا به هدفمان که بیان دامنهٔ جریان و فاز ϕ برحسب پارامترهای مدار ($\mathscr{E}_{\rm m}$، ω، R، L، و C) باشد، رسیده‌ایم. توجه کنید که فاز ϕ به دامنهٔ $\mathscr{E}_{\rm m}$ نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده بستگی ندارد. با تغییر $\mathscr{E}_{\rm m}$ جریان $i_{\rm m}$ تغییر می‌کند ولی ϕ تغییر نمی‌کند؛ مقیاس نتیجه تغییر می‌کند ولی سرشت آن تغییر نمی‌کند.

کمیتی که در مخرج کسر معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) قرار دارد پاگیری z مدار سری RLC نامیده می‌شود:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (۳۷ـ۲۰)$$

و بنابراین معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$i_{\rm m} = \frac{\mathscr{E}_{\rm m}}{Z} \qquad (۳۷ـ۲۱)$$

که یادآور رابطهٔ $i = \mathscr{E}/R$، برای مدار مقاومتی تک‌حلقه‌ای با نیروی محرکهٔ الکتریکی پایاست. بدیهی است که یکای SI پاگیری اهم است.

معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) دامنهٔ جریان معادلهٔ (۳۶ـ۴۳) را به‌دست می‌دهد و شکل ۳۶ـ۱۳ نمودار مربوط به معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) است. جریان $i_{\rm m}$ وقتی به بیشینهٔ مقدارش می‌رسد که پاگیری Z به کمینهٔ مقدارش یعنی R برسد، که این حالت وقتی رخ می‌دهد که $X_L = X_C$ شود، یا

$$\omega L = 1/\omega C$$

به‌طوری که

$$\omega = 1/\sqrt{LC} \qquad (۳۷ـ۲۲)$$

حاصل کنید که فازها با نتیجه‌گیریهای بخش ۳۷ـ۲ سازگارند. ΔV_R همفاز با جریان است، ΔV_L به اندازهٔ 90° جلوتر از جریان و ΔV_C به اندازهٔ 90° از جریان عقب است.

بنابر معادلهٔ (۳۷ـ۱۴)، جمع جبری تصویرهای (لحظه‌ای) ΔV_R، ΔV_L، و ΔV_C روی محور قائم مقدار (لحظه‌ای) $\mathscr{E}$ را به‌دست می‌دهد. از طرف دیگر، گفتیم که جمع برداری دامنه‌های فازور $(\Delta V_R)_{\max}$ و $(\Delta V_L)_{\max}$، و $(\Delta V_C)_{\max}$ فازوری به‌دست می‌دهد که دامنهٔ آن برابر $\mathscr{E}_{\rm m}$ در معادلهٔ (۳۷ـ۱) است. تصویر $\mathscr{E}_{\rm m}$ روی محور قائم $\mathscr{E}$ متغیر با زمان معادلهٔ (۳۷ـ۱) را به‌دست می‌دهد؛ یعنی، همان‌طور که معادلهٔ (۳۷ـ۱۴) نشان می‌دهد برابر است با $\Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C$. در عملیات برداری، جمع (جبری) تصویرهای هر چند بردار روی یک خط مستقیم مشخص برابر است با تصویر جمع (برداری) آن بردارها روی همان خط.

در شکل ۳۷ـ۵(ج)، نخست جمع برداری $(\Delta V_L)_{\max}$ و $(\Delta V_C)_{\max}$ را به‌دست آوردیم که حاصل آن فازور $(\Delta V_L)_{\max} - (\Delta V_C)_{\max}$ است. سپس جمع برداری این فازور را با $(\Delta V_R)_{\max}$ به‌دست آوردیم. چون این دو فازور عمود بر هم هستند، دامنهٔ حاصل‌جمع آنها، که همان دامنهٔ فازور $\mathscr{E}_{\rm m}$ باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\rm m} &= \sqrt{[(\Delta V_R)_{\max}]^2 + [(\Delta V_L)_{\max} - (\Delta V_C)_{\max}]^2}\\ &= \sqrt{(i_{\rm m}R)^2 + (i_{\rm m}X_L - i_{\rm m}X_C)^2}\\ &= i_{\rm m}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (۳۷\text{ـ}۲۳)\end{aligned}$$

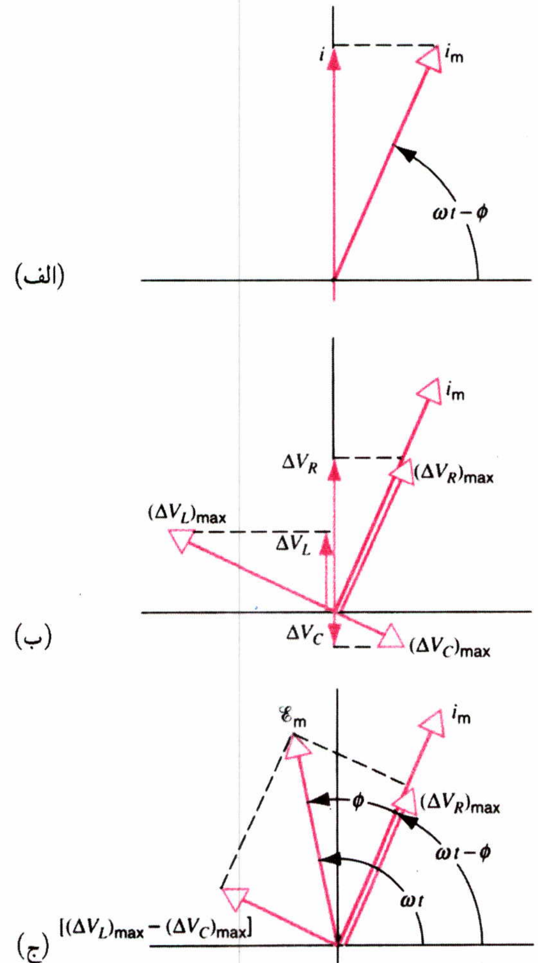
که در اینجا از معادله‌های (۳۷ـ۳)، (۳۷ـ۸) و (۳۷ـ۱۳) برای دامنهٔ فازورها استفاده کردیم. معادلهٔ (۳۷ـ۲۳) همان معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) است که آن را از تحلیل مثلثاتی به‌دست آوردیم.

همان‌طور که در شکل ۳۷ـ۵(ج) نشان داده شده است، ϕ زاویهٔ بین فازورهای $i_{\rm m}$ و $\mathscr{E}_{\rm m}$ است، و از آن شکل می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(\Delta V_L)_{\max} - (\Delta V_C)_{\max}}{(\Delta V_R)_{\max}}\\ &= \frac{i_{\rm m}(X_L - X_C)}{i_{\rm m}R} = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (۳۷\text{ـ}۲۴)\end{aligned}$$

که همان معادلهٔ (۳۷ـ۱۸) است.

شکل ۳۷ـ۵(ب) را به‌طور اختیاری با $X_L > X_C$ رسم کردیم؛ یعنی فرض کردیم که مدار شکل ۳۷ـ۱ بیشتر القایی است تا خازنی.



شکل ۳۷ـ۵ (الف) فازور نشانگر جریان متناوب در مدار RLC شکل ۳۷ـ۱. (ب) فازورهای نشانگر اختلاف پتانسیلهای دو سر مقاومت، خازن و القاگر. به اختلاف فاز آنها نسبت به جریان توجه کنید. (ج) فازور نشانگر نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب را به نمودار افزوده‌ایم.

که همان شرط تشدید است که در معادلهٔ (۳۶ـ۴۴) ارائه شد. گرچه معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) یک نتیجهٔ کلی برای تمام بسامدهای وادارنده است، شرط تشدید را هم به‌صورت یک حالت خاص شامل می‌شود.

تحلیل نموداری

استفاده از نمودار فازور برای تحلیل مدار سری RLC، آموزنده است. در شکل ۳۷ـ۵(الف) فازور جریان را نشان داده‌ایم. طول این فازور برابر با $i_{\rm m}$ است و تصویر آن بر روی محور قائم برابر $i_{\rm m}\sin(\omega t - \phi)$ است، که همان جریان i وابسته به زمان است. در شکل ۳۸ـ۵(ب) فازورهای نشانگر اختلاف پتانسیلهای دو سر هر کدام از اجزای مدار RLC، یعنی، R، L، و C را رسم کرده‌ایم. به بیشینهٔ مقدارها و تصویرهای متغیر با زمان آنها روی محور قائم توجه کنید. اطمینان

با این فرض، $i_{\rm m}$ عقبتر از $\mathscr{E}_{\rm m}$ است (گرچه این تأخیر فاز به اندازهٔ یک‌چهارم چرخه برای جزء کاملاً القایی نشان داده‌شده در شکل ۳۷ـ۳ نیست). زاویهٔ فاز ϕ در معادلهٔ (۳۷ـ۲۳) و از آن‌رو در معادلهٔ (۳۷ـ۲) مثبت ولی کمتر از $+۹۰^\circ$ است.

از طرف دیگر، اگر داشتیم $X_C > X_L$، مدار بیشتر خازنی بود تا القایی و در این حالت $i_{\rm m}$ جلوتر از $\mathscr{E}_{\rm m}$ بود اگر چه این تقدم فاز به اندازهٔ یک‌چهارم چرخه برای جزء کاملاً خازنی شکل ۳۷ـ۴ نیست). هماهنگ با این تغییر از تأخیر به تقدم، زاویهٔ ϕ در معادلهٔ (۳۷ـ۲۳) (و از آن‌رو در معادلهٔ (۳۷ـ۲)) خودبه‌خود منفی می‌شود.

تعبیر دیگری از شرط تشدید با بهره‌گیری از نمودار فازور شکل ۳۷ـ۵ حاصل می‌شود. در حالت تشدید $X_L = X_C$ و بنابر معادلهٔ (۳۷ـ۲۴)، $\phi = ۰$ است. در این حالت، فازورهای $(\Delta V_L)_{\rm max}$ و $(\Delta V_C)_{\rm max}$ در شکل ۳۷ـ۵ با هم برابر و در جهت مخالف هستند و بنابراین $i_{\rm m}$ همفاز با $\mathscr{E}_{\rm m}$ است.

بار دیگر تأکید می‌کنیم، به خاطر داشته باشید که، گرچه روشهایی که در اینجا مطرح کردیم برای هر مدار AC معتبر است، این نتیجه‌ها فقط برای مدار RLC برقرار است. به‌علاوه، به خاطر داشته باشید که مدار را فقط در وضعیت حالت پایا، پس از آنکه تغییرات زودگذر حالت گذار از بین رفتند، بررسی می‌کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ در شکل ۳۷ـ۱، فرض کنید که $R = ۱۶۰\,\Omega$، $C = ۱۵\mu{\rm F}$، $L = ۲۳۰\,{\rm mH}$، $f = ۶۰\,{\rm Hz}$، و $\mathscr{E}_{\rm m} = ۳۶\,{\rm V}$ است. (الف) واکنایی القایی X_L، (ب) واکنایی خازن X_C، (ج) پاگیری Z مدار، (د) دامنهٔ جریان $i_{\rm m}$، و (ه) ثابت فاز ϕ را معین کنید.

حل. (الف) مانند مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۱، $X_L = ۸۷\Omega$. (ب) مانند مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۲، $X_C = ۱۷۷\Omega$. توجه کنید که $X_C > X_L$ است، در نتیجه مدار بیشتر وضعیت خازنی دارد تا القایی. (ج) از معادلهٔ (۳۷ـ۲۰) داریم

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲}$$

$$= \sqrt{(۱۶۰\Omega)^۲ + (۸۷\Omega - ۱۷۷\Omega)^۲} = ۱۸۴\Omega$$

(د) از معادلهٔ (۳۷ـ۲۱) داریم

$$i_{\rm m} = \frac{\mathscr{E}_{\rm m}}{Z} = \frac{۳۶\,{\rm V}}{۱۸۴\Omega} = ۰٫۱۹۶\,{\rm A}$$

(ه) از معادلهٔ (۳۷ـ۲۴)، می‌دانیم که

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{۸۷\Omega - ۱۷۷\Omega}{۱۶۰\Omega} = -۰٫۵۶۳$$

و از اینجا

$$\phi = \tan^{-۱}(-۰٫۵۶۳) = -۲۹٫۴^\circ$$

همان‌طور که جدول ۳۷ـ۱ و شکل ۳۷ـ۵ نشان می‌دهند، ثابت فاز منفی برای یک بار خازنی مناسب است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۴ (الف) در مدار مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ بسامد تشدید برحسب هرتز چقدر است؟ (ب) دامنهٔ جریان در حالت تشدید چقدر است؟

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۷ـ۲۲)، می‌دانیم که

$$\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۰٫۲۳\,{\rm H})(۱۵\times ۱۰^{-۶}{\rm F})}} = ۵۳۸\,{\rm rad/s}$$

آنگاه، از اینجا داریم

$$f = \frac{\omega}{۲\pi} = ۸۶\,{\rm Hz}$$

(ب) در حالت تشدید $X_L = X_C$، و در نتیجه $Z = R$ است. از معادلهٔ (۳۷ـ۲۱) داریم

$$i_{\rm m} = \frac{\mathscr{E}_{\rm m}}{R} = \frac{۳۶\,{\rm V}}{۱۶۰\Omega} = ۰٫۲۳\,{\rm A}$$

بسامد ۶۰ هرتز مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ نسبتاً به بسامد تشدید نزدیک است.

تحلیل دیفرانسیلی (اختیاری)

با جایگزین‌کردن $\Delta V_L = L\,di/dt$ و $\Delta V_C = q/C$، معادلهٔ (۳۷ـ۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathscr{E} = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \qquad (۳۷\text{ـ}۲۵)$$

یا، با بهره‌گیری از $i = dq/dt$، همراه با معادلهٔ (۳۷ـ۱) برای نیروی محرکهٔ الکتریکی، می‌رسیم به

$$L\frac{d^۲q}{dt^۲} + R\frac{dq}{dt} + \frac{۱}{C}q = \mathscr{E}_{\rm m}\sin\omega t \qquad (۳۷\text{ـ}۲۶)$$

این معادله همان صورت مربوط به معادلهٔ یک نوسانگر مکانیکی واداشته را دارد که در بخش ۱۷ـ۸ بررسی کردیم (معادلهٔ (۱۷ـ۴۲) را ببینید). با استفاده از شباهتهای معادله‌ها داریم

$$x \to q, \quad m \to L, \quad b \to R, \quad k \to 1/C$$

که از آنها در بخشهای ۳۶ـ۵ تا ۳۶ـ۷ نیز استفاده کردیم، بلافاصله می‌توانیم نتیجهٔ داده‌شده در معادلهٔ (۱۷ـ۴۳) برای نوسانگر مکانیکی واداشتهٔ میرا را برای نوسانگر الکترومغناطیسی واداشتهٔ میرا (یعنی، دارای مقاومت) بپذیریم و به‌صورت مناسب به‌کار ببریم:

$$q = -\frac{\mathscr{E}_\mathrm{m}}{\omega Z}\cos(\omega t - \phi) \qquad (۳۷\text{ـ}۲۷)$$

که، باید نشان دهیم ωZ معادل G است که با معادلهٔ (۱۷ـ۴۴) تعریف شده است. برای یافتن جریان از معادلهٔ (۳۷ـ۲۷) مشتق می‌گیریم، که از این عمل معادلهٔ (۳۷ـ۱) را به‌دست می‌آوریم، $i = i_\mathrm{m}\sin(\omega t - \phi)$، که در اینجا $i_\mathrm{m} = \mathscr{E}_\mathrm{m}/Z$ است. همچنین، باید نشان دهیم که فاز β که با معادلهٔ (۱۷ـ۴۵) تعریف شده است، وقتی کمیتهای مکانیکی را با کمیتهای متناظر الکترومغناطیسی آنها جایگزین کنیم، به معادلهٔ (۳۷ـ۱۸) تبدیل می‌شود.

جستجوی شباهتها، مانند آنچه در اینجا بین تشدید مکانیکی و الکترومغناطیسی انجام شد، روش مؤثری است که نه تنها شناختی از پدیده‌های جدید به‌دست می‌دهد بلکه کار تحلیل آنها را آسان می‌کند. زیرا می‌توان از نتیجه‌های ریاضی به‌دست‌آمده برای یک سیستم در تحلیل سیستم دیگر استفاده کرد. در این مورد ویژگیهای مشترک دو سیستم را شناسایی می‌کنیم: یک جزء وادارندهٔ سینوسی؛ یک جزء دارای لختی، که در برابر تغییرات حرکت مقاومت می‌کند (m، که در برابر تغییر v و L که در برابر تغییر i مقاومت می‌کند)؛ یک جزء تلف‌کنندهٔ انرژی (b و R، هر یک برحسب جمله‌ای که نسبت به آهنگ تغییر مختصهٔ خطی است)؛ و یک جزء بازگرداننده (k و $1/C$ هر یک برحسب جمله‌ای که نسبت به خود مختصه خطی است). جلوه‌های مشترک هر دو جواب عبارت‌اند از یک نوسان سینوسی پایدار با بسامد وادارنده، البته پس ازگذشت یک دورهٔ آغازی مربوط به حالتهای گذاری سریعاً میرا؛ یک اختلاف فاز بین جزء وادارنده و مختصهٔ نوسان‌کننده که مستقل از دامنهٔ نوسان جزء وادارنده است؛ یک حالت تشدید در یک بسامد خاص که مقدار آن را فقط اجزای لخت و بازگرداننده تعیین می‌کند.

۳۷ـ۴ توان در مدارهای AC

در مدار الکتریکی، انرژی را یک چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی فراهم‌کرده، اجزای خازنی و القایی آن را ذخیره و اجزای مقاومتی آن را مصرف می‌کنند. پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که، هر زمان معین، آهنگ تأمین انرژی توسط چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی با آهنگ انبارش در اجزای خازنی و القایی به اضافهٔ آهنگ مصرف در اجزای مقاومتی برابر باشد. (فرض می‌کنیم اجزای خازنی و القایی اجزایی ایده‌آل و بدون هیچ‌گونه مقاومت داخلی باشند.)

مقاومتی به‌صورت یک جزء منزوی (مانند شکل ۳۷ـ۲) در یک مدار AC در نظر بگیرید که جریان در آن از معادلهٔ (۳۷ـ۲) به‌دست می‌آید. (این مدار را در حالت پایا، یعنی مدتی به اندازهٔ کافی طولانی پس از آنکه چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی به مدار وصل شد، بررسی می‌کنیم.) درست مانند مدار DC، آهنگ اتلاف انرژی (گرمایش ژول) در مقاومت در مدار AC از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$P = i^2 R = i_\mathrm{m}^2 R \sin^2(\omega t - \phi) \qquad (۳۷\text{ـ}۲۸)$$

انرژی تلف‌شده در مقاومت برحسب زمان افت‌وخیز دارد، همچنان که انرژی ذخیره‌شده در اجزای خازنی و القایی نیز دارای افت‌وخیز است. در بیشتر مواردی که با جریانهای متناوب سروکار داریم تغییرات توان در خلال هر چرخه مورد توجه نیست؛ بلکه به میانگین توان تلف‌شده در هر چرخهٔ مشخص علاقه‌مندیم. میانگین انرژی ذخیره‌شده در اجزای القایی یا خازنی در هر چرخهٔ کامل ثابت می‌ماند؛ در واقع، انرژی از چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی به جزء مقاومتی انتقال می‌یابد و در آنجا تلف می‌شود.

به‌عنوان مثال، شرکت برق یک چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی AC را برای خانهٔ شما تأمین می‌کند که با بسامد $f = 50$ Hz تغییر می‌کند (در آمریکا ۶۰ Hz). شما به میزان میانگین توانی که مصرف می‌کنید پول برق می‌پردازید؛ برای شرکت برق اهمیتی ندارد که آیا از وسایل مقاومتی محض استفاده می‌کنید، که در آن بیشینهٔ توان همفاز با چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی تلف می‌شود، یا از وسایلی استفاده می‌کنید که مانند موتور الکتریکی تا اندازه‌ای خازنی یا القایی است و در آن بیشینهٔ جریان (و در نتیجه بیشینهٔ توان) ممکن است با چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی همفاز نباشند. اگر شرکت برق انرژی مصرفی شما را در زمانهایی کوتاهتر از ۱/۵۰ ثانیه اندازه می‌گرفت، متوجه تغییراتی می‌شد که در آهنگ مصرف انرژی شما رخ می‌داد، ولی با اندازه‌گیری در زمانی طولانیتر از ۱/۵۰ ثانیه تنها میانگین آهنگ مصرف انرژی اهمیت پیدا می‌کند.

توان میانگین را با $P_{\rm av}$ نمایش می‌دهیم با میانگین‌گیری از معادلهٔ (۳۷ـ۲۸) در زمانی که در مقایسه با دورهٔ تناوب یک چرخه بسیار طولانی است به‌دست می‌آوریم. مقدار میانگین تابع $\sin^۲$ به‌ازای هر چرخهٔ کامل برابر با ۱/۲ است. اگر تعداد چرخه‌های در نظر گرفته‌شده برای عمل میانگین‌گیری زیاد باشد، در آن‌صورت کسر چرخه‌ها بی‌اهمیت می‌شوند و می‌توانیم توان میانگین را با جایگزین کردن $\sin^۲$ در معادلهٔ (۳۷ـ۲۸) با مقدار ۱/۲ معین کنیم. در این‌صورت توان میانگین چنین است

$$P_{\rm av} = \frac{۱}{۲} i_{\rm m}^۲ R \qquad (۳۷\text{ـ}۲۹)$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$P_{\rm av} = (i_{\rm m}/\sqrt{۲})^۲ R \qquad (۳۷\text{ـ}۳۰)$$

کمیت $i_{\rm m}/\sqrt{۲}$ برابر است با ریشهٔ میانگین مربعی (rms) مقدار جریان

$$i_{\rm rms} = \frac{i_{\rm m}}{\sqrt{۲}} \qquad (۳۷\text{ـ}۳۱)$$

این، نتیجه‌ای است که اگر ابتدا جریان را به توان ۲ می‌رساندید و سپس میانگین (یا معدل) آن را روی تعداد کاملی از چرخه حساب می‌کردید، و پس از آن جذر می‌گرفتید، به‌دست می‌آوردید. (در فصل ۲۲ سرعت rms مولکولی را به همین صورت تعریف کردیم.) بهتر است که توان را برحسب مقدارهای rms بنویسیم، زیرا سنجه‌های جریان و ولتاژ AC چنان طراحی شده‌اند که مقدارهای rms را نشان بدهند. ولتاژ متداول ۲۳۰ V لوازم خانگی یک مقدار rms است؛ ولتاژ قله در این مورد عبارت است از

$$\mathscr{E}_{\rm m} = \sqrt{۲}\mathscr{E}_{\rm rms} = \sqrt{۲}(۲۳۰) = ۳۲۵\,{\rm V}$$

معادلهٔ (۳۷ـ۳۰) را می‌توان برحسب $i_{\rm rms}$ به‌صورت زیر نوشت

$$P_{\rm av} = i_{\rm rms}^۲ R \qquad (۳۷\text{ـ}۳۲)$$

معادلهٔ (۳۷ـ۳۲) مانند عبارت $P = i^۲ R$ است که توان تلف‌شده را در مقاومت مدار DC توصیف می‌کند. با جایگزینی جریانها و ولتاژهای DC با مقدارهای rms مربوط به جریانها و ولتاژهای AC، می‌توان از عبارتهای مربوط به اتلاف توان در مدارهای DC استفاده کرد و میانگین توان تلف‌شدهٔ AC را به‌دست آورد.

توان در مدار سری RLC

تا اینجا توان تلف‌شده را در یک جزء مقاومتی منزوی مدار AC در نظر گرفتیم. اکنون می‌خواهیم مدار کامل AC را از دیدگاه انرژی اتلافی بررسی کنیم. برای این منظور باز هم یک مدار سری RLC را برای مثال انتخاب می‌کنیم.

کار dW که چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ روی بار dq انجام می‌دهد برابر است با $dW = \mathscr{E}dq$. پس توان P (مساوی با dW/dt) تأمین‌شده توسط چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی عبارت است از $\mathscr{E}dq/dt = \mathscr{E}i$، یا با استفاده از معادله‌های (۳۷ـ۱) و (۳۷ـ۲)، داریم

$$P = \mathscr{E}i = \mathscr{E}_{\rm m} i_{\rm m} \sin \omega t \, \sin(\omega t - \phi) \qquad (۳۷\text{ـ}۳۳)$$

به‌ندرت به این توان لحظه‌ای، که معمولاً تابعی با افت‌وخیزهای زمانی سریع است، علاقه‌مندیم. برای یافتن میانگین، ابتدا از یک اتحاد مثلثاتی برای بسط عامل $\sin(\omega t - \phi)$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P &= \mathscr{E}_{\rm m} i_{\rm m} \sin \omega t(\sin \omega t \cos\phi - \cos\omega t \sin\phi) \\ &= \mathscr{E}_{\rm m} i_{\rm m}(\sin^۲ \omega t \cos\phi - \sin\omega t \cos\omega t \sin\phi) \end{aligned} \qquad (۳۷\text{ـ}۳۴)$$

حال وقتی روی یک چرخهٔ کامل میانگین‌گیری کنیم، جملهٔ $\sin^۲ \omega t$ مقدار ۱/۲ را به‌دست می‌دهد، در حالی‌که جملهٔ $\sin\omega t \cos\omega t$، چنانکه نشان خواهید داد (تمرین ۱۶ را ببینید) مقدار صفر را نتیجه می‌دهد. بنابراین توان میانگین برابر است با

$$P_{\rm av} = \frac{۱}{۲}\mathscr{E}_{\rm m} i_{\rm m} \cos\phi \qquad (۳۷\text{ـ}۳۵)$$

با جایگزین‌کردن $\mathscr{E}_{\rm m}$ و $i_{\rm m}$ با مقدارهای rms $(\mathscr{E}_{\rm rms} = \mathscr{E}_{\rm m}/\sqrt{۲}$ و $i_{\rm rms} = i_{\rm m}/\sqrt{۲})$ می‌توانیم معادلهٔ (۳۷ـ۳۵) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$P_{\rm av} = \mathscr{E}_{\rm rms} i_{\rm rms} \cos\phi \qquad (۳۷\text{ـ}۳۶)$$

کمیت $\cos\phi$ در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶) را ضریب توان مدار AC می‌خوانیم. در اینجا ضریب توان را برای مدار سری RLC محاسبه می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ (۳۷ـ۱۸)، یعنی $\tan\phi = (X_L - X_C)/R$، می‌توانیم نشان دهیم که

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲}} = \frac{R}{Z} \qquad (۳۷\text{ـ}۳۷)$$

بنابر معادلهٔ (۳۷ـ۳۶)، توانی که چشمهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی به مدار می‌دهد وقتی بیشینه است که $\cos\phi = ۱$. این وضعیت وقتی پیش می‌آید که مدار صرفاً مقاومتی باشد و حاوی هیچ خازن یا القاگری نباشد، یا اینکه مدار در حالت تشدید باشد که $X_L = X_C$ به‌طوری که $Z = R$. در این حالت توان میانگین برابر است با

$$P_{\text{av}} = \mathscr{E}_{\text{rms}} i_{\text{rms}} \quad \text{(بار مقاومتی)} \qquad (۳۷\text{ـ}۳۸)$$

اگر بار مدار به شدت القایی باشد، که برای موتورها، کمپرسورها، و وسایلی از این نوع اغلب چنین است، توان داده‌شده به مدار را می‌توان با اضافه‌کردن بار خازنی به آن بیشینه کرد. شرکتهای برق اغلب برای رسیدن به این حالت در سرتاسر سیستم انتقال نیرو خازنهایی را قرار می‌دهند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۵ مجدداً مدار شکل ۳۷ـ۱ را در نظر بگیرید و از همان پارامترهای مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ استفاده کنید، یعنی $R = ۱۶۰\,\Omega$، $C = ۱۵\mu\text{F}$، $L = ۲۳۰\text{ mH}$، $f = ۶۰\text{ Hz}$، و $\mathscr{E}_{\text{m}} = ۳۶\text{ V}$. کمیتهای (الف) نیروی محرکهٔ rms، (ب) جریان rms، (ج) ضریب توان، و (د) میانگین توان تلف‌شده در مقاومت را تعیین کنید.

حل. (الف)

$$\mathscr{E}_{\text{rms}} = \mathscr{E}_{\text{m}}/\sqrt{۲} = (۳۶\text{ V})/\sqrt{۲} = ۲۵٫۵\text{ V}$$

(ب) در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ دریافتیم که $i_{\text{m}} = ۰٫۱۹۶\text{ A}$. در نتیجه داریم

$$i_{\text{rms}} = i_{\text{m}}/\sqrt{۲} = (۰٫۱۹۶\text{ A})/\sqrt{۲} = ۰٫۱۳۹\text{ A}$$

(ج) همچنین در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ دیدیم که ثابت فاز ϕ برابر با $-۲۹٫۴^\circ$ است. از آن‌رو داریم

$$\text{ضریب توان} = \cos(-۲۹٫۴^\circ) = ۰٫۸۷۱$$

(د) از معادلهٔ (۳۷ـ۳۲) داریم

$$P_{\text{av}} = i_{\text{rms}}^۲ R = (۰٫۱۳۹\text{ A})^۲(۱۶۰\,\Omega) = ۳٫۱\text{ W}$$

به طریقی دیگر، معادلهٔ (۳۷ـ۳۶) نتیجه می‌دهد

$$P_{\text{av}} = \mathscr{E}_{\text{rms}} i_{\text{rms}} \cos\phi$$
$$= (۲۵٫۵\text{ V})(۰٫۱۳۹\text{ A})(۰٫۸۷۱) = ۳٫۱\text{ W}$$

که با نتیجهٔ قبلی کاملاً سازگار است. یعنی میانگین توان تلف‌شده در مقاومت برابر است با میانگین توانی که نیروی محرکهٔ الکتریکی تأمین می‌کند. در واقع، انرژی از نیروی محرکهٔ الکتریکی به بار مقاومتی منتقل و در آنجا تلف می‌شود. توجه کنید که برای رسیدن به سازگاری بین این نتیجه‌ها تا دو رقم بامعنی، برای مقدارهای مربوط به جریانها و ولتاژها از سه رقم بامعنی استفاده کردیم. به غیر از خطاهای گرد کردن ارقام، معادله‌های (۳۷ـ۳۲) و (۳۷ـ۳۶) نتیجه‌های دقیقاً یکسانی را به‌دست می‌دهند.

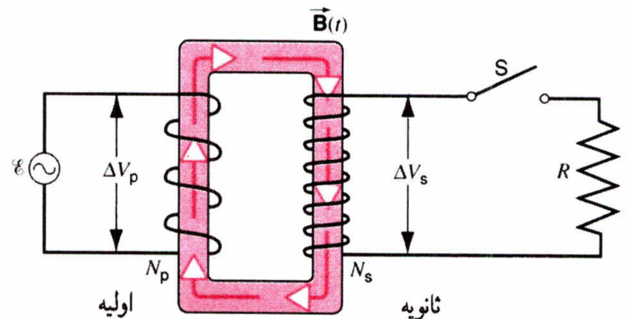
۳۷ـ۵ مبدل (اختیاری)

در مدارهای DC توان تلف‌شده در بار مقاومتی از معادلهٔ (۳۱ـ۲۱) $(P_R = i\Delta V_R = i^۲ R)$ به‌دست می‌آید. برای رسیدن به یک توان مشخص، می‌توانیم یک جریان نسبتاً زیاد i و یک اختلاف پتانسیل نسبتاً کم ΔV_R یا دقیقاً عکس این وضعیت را برگزینیم، مشروط بر آنکه حاصلضرب آنها ثابت بماند. به همین ترتیب، برای مدارهای AC صرفاً مقاومتی (که در آنها ضریب توان، $\cos\phi$ در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶)، برابر با ۱ است)، توان میانگین تلف‌شده از معادلهٔ (۳۷ـ۳۸) (یعنی، $P_{\text{av}} = i_{\text{rms}}\mathscr{E}_{\text{rms}}$) به‌دست می‌آید و باز هم حق انتخاب مقدارهای نسبی i_{rms} و $\mathscr{E}_{\text{rms}}$ را داریم.

در شبکه‌های توزیع برق، به دو دلیل ایمنی و طراحی کارآمد تجهیزات برقی، در هر دو سر مولد (نیروگاه) و مصرف‌کنندهٔ (خانه یا کارخانه) ولتاژهای نسبتاً کم مطلوب‌اند. مثلاً، هیچ‌کس علاقه‌ای به یک اتو یا قطار اسباب‌بازی برقی ندارد که با ولتاژ ۱۰ kV کار کند.

از سوی دیگر، در انتقال انرژی الکتریکی از نیروگاه به مصرف‌کننده، پایین‌ترین جریان عملی (و بنابراین بالاترین اختلاف پتانسیل عملی) موردنظر است، تا اتلاف انرژی $i^۲R$ را در خطهای انتقال کمینه کند. مقدارهایی مانند $\mathscr{E}_{\text{rms}} = ۳۵۰\text{ kV}$ متداول است. به این ترتیب یک ناهماهنگی اساسی بین نیازهای انتقال مؤثر برق از یک سو و تولید و مصرف ایمن و مؤثر آن از سوی دیگر وجود دارد.

برای غلبه بر این مشکل، به ابزار یا وسیله‌ای نیازمندیم که بتواند، با توجه به ملاحظه‌های طراحی، اختلاف پتانسیل مدار را بالا ببرد (یا پایین بیاورد)، به‌طوری که حاصلضرب $i_{\text{rms}}\mathscr{E}_{\text{rms}}$ اساساً ثابت بماند. مبدل جریان متناوب شکل ۳۷ـ۶ چنین ابزاری است. مبدل که براساس قانون القای فاراده کار می‌کند، هیچ همتای ساده‌ای در جریان مستقیم ندارد. به همین دلیل شبکه‌های AC که تسلا و دیگران به‌شدت از



شکل ۳۷ـ۶ یک مبدل ایده‌آل، که دو پیچه را نشان می‌دهد که روی هستهٔ آهنی پیچیده شده است.

آن حمایت می‌کردند*، عملاً جایگزین شبکه‌های توزیع DC شدند که مورد حمایت جدی ادیسون قرار داشتند.

در شکل ۳۷ـ۶ دو پیچه را نشان داده‌ایم که به دور یک هستهٔ آهنی پیچیده شده‌اند. سیم‌پیچ اولیه، شامل N_pدور، به یک مولد جریان متناوب با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ متصل است که به‌صورت $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\mathrm{m} \sin \omega t$ با زمان تغییر می‌کند. سیم‌پیچ ثانویه، شامل N_sدور، تا زمانی که کلید S باز باشد، یک مدار باز است، که در حال حاضر فرض می‌کنیم چنین است. به این ترتیب هیچ جریانی در سیم‌پیچ مدار ثانویه برقرار نیست. علاوه بر آن فرض می‌کنیم که بتوان تمام اجزای مصرف‌کننده، از جمله مقاومت سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه را نادیده گرفت. در واقع، اتلاف انرژی در مبدلهای با ظرفیت بالا که خوب طراحی شده باشند می‌تواند به مقدار کمی مثلاً در حدود ۱٪ برسد، به‌طوری که فرض داشتن مبدل ایده‌آل چندان هم نامعقول نیست.

در شرایط بالا، سیم‌پیچ مدار اولیه، مانند شکل ۳۷ـ۳(الف)، القایی محض است. جریان (خیلی کم) مدار اولیه، که به آن جریان مغناطنده $i_\mathrm{mag}(t)$ می‌گوییم، ۹۰° از اختلاف پتانسیل اولیه $\Delta V_\mathrm{p}(t)$ عقب می‌افتد؛ ضریب توان (مساوی $\cos\phi$ در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶)) صفر است، بنابراین هیچ توانی از مولد به مبدل منتقل نمی‌شود.

با این همه، جریان متناوب اولیهٔ کوچک $i_\mathrm{mag}(t)$ شار مغناطیسی متناوب $\Phi_\mathrm{B}(t)$ را در هستهٔ آهنی القا می‌کند و فرض می‌کنیم که تمام این شار، دورهای سیم‌پیچ ثانویه را به‌هم پیوند می‌زند. (یعنی، فرض می‌کنیم تمام خطهای میدان مغناطیسی حلقه‌های بسته‌ای در داخل هستهٔ آهنی تشکیل می‌دهند و هیچ خطی به محیط اطراف "نمی‌گریزد".) از قانون القای فاراده می‌دانیم که نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌ازای هر دور $\mathscr{E}_\mathrm{T}$ (برابر با $-d\Phi_B/dt$) برای سیم‌پیچهای اولیه و ثانویه برابر است، زیرا شار مغناطیسی اولیه و ثانویه برابرند. براساس کمیتهای rms می‌توانیم بنویسیم

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{اولیه}} = \left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{ثانویه}} \qquad (۳۷\text{ـ}۳۹)$$

یا

$$(\mathscr{E}_\mathrm{T})_{\mathrm{rms},\text{اولیه}} = (\mathscr{E}_\mathrm{T})_{\mathrm{rms},\text{ثانویه}} \qquad (۳۷\text{ـ}۴۰)$$

برای هر سیم‌پیچ، نیروی محرکهٔ الکتریکی به‌ازای هر دور برابر است با اختلاف پتانسیل تقسیم بر تعداد دورهای سیم‌پیچ؛ در این‌صورت معادلهٔ (۳۷ـ۴۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{\Delta V_\mathrm{p}}{N_\mathrm{p}} = \frac{\Delta V_\mathrm{s}}{N_\mathrm{s}} \qquad (۳۷\text{ـ}۴۱)$$

که در اینجا ΔV_p و ΔV_s معرف کمیتهای rms هستند. از حل این معادله برای ΔV_s، می‌رسیم به

$$\Delta V_\mathrm{s} = \Delta V_\mathrm{p}(N_\mathrm{s}/N_\mathrm{p}) \qquad (۳۷\text{ـ}۴۲)$$

اگر $N_\mathrm{s} > N_\mathrm{p}$ (که در این‌صورت $\Delta V_\mathrm{s} > \Delta V_\mathrm{p}$) می‌گوییم که مبدل افزاینده داریم؛ اگر $N_\mathrm{s} < N_\mathrm{p}$ باشد، می‌گوییم مبدل کاهنده داریم.

در تمام این مدت فرض کردیم مدار ثانویه باز باشد به‌طوری که هیچ توانی از طریق مبدل انتقال پیدا نمی‌کند. حال اگر کلید S را در شکل ۳۷ـ۶ ببندیم، وضعیت کاربردیتری خواهیم داشت که در آن سیم‌پیچ ثانویه به بار مقاومتی R متصل شده است. در حالت کلی، بار مدار ثانویه شامل اجزای القایی و خازنی نیز هست، ولی در اینجا فقط حالت خاص بار مقاومتی محض را بررسی می‌کنیم.

وقتی کلید S را می‌بندیم چندین رویداد پدید می‌آید. (۱) جریان rmsی به اندازهٔ i_s در مدار ثانویه ظاهر می‌شود و متناظر با آن توان میانگین $i_\mathrm{s}^2 R$ در بار مقاومتی مصرف می‌شود. (۲) جریان متناوب ثانویه شار مغناطیسی متناوب مربوط به خودش را در هستهٔ آهنی به‌وجود می‌آورد و این شار (بنابر قانون فاراده و قانون لنز) نیروی محرکهٔ الکتریکی مخالفی را در سیم‌پیچ اولیه القا می‌کند. (۳) اما، ΔV_p نمی‌تواند در پاسخ به این نیروی محرکهٔ الکتریکی مخالف تغییر کند زیرا باید همواره برابر با نیروی محرکهٔ الکتریکی باشد که مولد تأمین می‌کند؛ و بستن کلید S نمی‌تواند این واقعیت را تغییر دهد. (۴) برای تضمین این موضوع، باید یک جریان متناوب جدید i_p در مدار اولیه

* مقالهٔ زیر را ببینید:
"The Transformer," by John W. Coltman, *Scientific American*, January 1988, p. 86.

به‌وجود آید، که اندازه و ثابت فاز آن درست برابر مقداری است که برای خنثی‌کردن نیروی محرکهٔ الکتریکی مخالف ناشی از i_s در سیم‌پیچهای اولیه لازم است.

به‌جای تحلیل فرایند نسبتاً پیچیدهٔ بالا به‌طور مفصل، از دیدگاه کلی که اصل پایستگی انرژی در اختیارمان قرار می‌دهد بهره‌برداری می‌کنیم. برای یک مبدل ایده‌آل با بار مقاومتی، از اصل پایستگی انرژی چنین نتیجه می‌گیریم که

$$i_p \Delta V_p = i_s \Delta V_s \qquad (۳۷\text{-}۴۳)$$

چون معادلهٔ (۳۷ـ۴۲)، اعم از اینکه کلید S در شکل ۳۷ـ۶ بسته باشد یا نباشد، همواره برقرار است، می‌توان نوشت

$$i_s = i_p (N_p/N_s) \qquad (۳۷\text{-}۴۴)$$

که ارتباط جریانها را در مبدل مشخص می‌کند.

سرانجام، با علم به اینکه $i_s = \Delta V_s / R$، می‌توانیم از معادله‌های (۳۷ـ۴۲) و (۳۷ـ۴۴) استفاده کنیم و نتیجه بگیریم

$$i_p = \frac{\Delta V_p}{(N_p/N_s)^۲ R} \qquad (۳۷\text{-}۴۵)$$

این معادله نشان می‌دهد که از دیدگاه مدار اولیه، مقاومتِ معادلِ بار، برابر با R نیست بلکه عبارت است از

$$R_{\text{معادل}} = (N_p/N_s)^۲ R \qquad (۳۷\text{-}۴۶)$$

معادلهٔ (۳۷ـ۴۶) عملکرد باز هم متفاوت دیگری را برای مبدل مطرح می‌کند. دیدیم که، برای بیشینهٔ انتقال انرژی از یک جایگاه نیروی محرکهٔ الکتریکی به یک بار مقاومتی، مقاومت مولد باید با مقاومت بار با هم برابر باشند. (تمرین ۱۴ فصل ۳۱ را ببینید.) همین رابطه برای مدارهای AC نیز برقرار است، جز اینکه پاگیری (به‌جای مقاومت) مولد باید با پاگیری بار همخوان باشد. اغلب، مانند وقتی که می‌خواهیم یک بلندگو را به تقویت‌کننده متصل کنیم، وضعیت موجود با این شرط فاصلهٔ بسیار زیادی دارد. پاگیری تقویت‌کننده زیاد و پاگیری بلندگو کم است. می‌توانیم با استفاده از مبدل، با نسبت دور مناسب، پاگیری دو وسیله را همخوان کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۶ یک مبدل روی تیر برق که در مدار اولیه با ولتاژ $\Delta V_p = ۸٫۵\,\text{kV}$ کار می‌کند، انرژی الکتریکی را با ولتاژ $\Delta V_s = ۱۲۰\ \text{V}$ برای تعدادی از خانه‌های مجاور تأمین می‌کند. هر دو کمیت مقادیر rms هستند. آهنگ میانگین مصرف انرژی در خانه‌هایی که با این مبدل تغذیه می‌شوند در یک زمان مشخص ۷۸ kW است. فرض کنید مبدل، ایده‌آل بوده، بار مدار مقاومتی و ضریب توان برابر یک باشد. (الف) نسبت دور N_p/N_s در سیم‌پیچهای، این مبدل کاهنده چقدر است؟ (ب) جریانهای rms در مدارهای اولیه و ثانویهٔ مدار چیست؟ (ج) بار مقاومتی معادل در مدار ثانویه چقدر است؟ (د) بار مقاومتی معادل در مدار اولیه چقدر است؟

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۷ـ۴۲)، داریم

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_s} = \frac{۸٫۵ \times ۱۰^۳ \text{V}}{۱۲۰\ \text{V}} = ۷۰٫۸$$

(ب) از معادلهٔ (۳۷ـ۳۸)، می‌دانیم

$$i_p = \frac{P_{av}}{\Delta V_p} = \frac{۷۸ \times ۱۰^۳ \text{W}}{۸٫۵ \times ۱۰^۳ \text{V}} = ۹٫۱۸\ \text{A}$$

و

$$i_s = \frac{P_{av}}{\Delta V_s} = \frac{۷۸ \times ۱۰^۳ \text{W}}{۱۲۰\ \text{V}} = ۶۵۰\ \text{A}$$

(ج) در مدار ثانویه، داریم

$$R_s = \frac{\Delta V_s}{i_s} = \frac{۱۲۰\ \text{V}}{۶۵۰\ \text{A}} = ۰٫۱۸۵\Omega$$

(د) در این وضعیت داریم

$$R_p = \frac{\Delta V_p}{i_p} = \frac{۸٫۵ \times ۱۰^۳ \text{V}}{۹٫۱۸\ \text{A}} = ۹۳۰\Omega$$

درستی این نتیجه را می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ (۳۷ـ۴۶)، که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم، تحقیق کنیم

$$R_p = (N_p/N_s)^۲ R_s = (۷۰٫۸)^۲ (۰٫۱۸۵\Omega) = ۹۳۰\Omega$$

چندگزینه‌ای

۳۷ـ۱ جریانهای متناوب

۳۷ـ۲ سه جزء جداگانه

۱. وقتی که بسامد افزایش می‌یابد کدام‌یک از کمیتهای زیر افزایش پیدا می‌کنند؟

(الف) R (ب) L (ج) C (د) X_L (هـ) X_C

۲. برای اینکه از عبور سیگنالهای با بسامد بالا از یک بلندگوی صدای بم جلوگیری کنیم، کدام جزء مدار بهترین پالایه (فیلتر) را فراهم می‌آورد؟

(الف) خازن (ب) القاگر (ج) مقاومت (د) مبدل

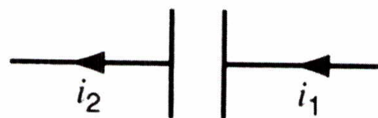
۳. جریان AC از طرف راست به خازن نشان داده‌شده در شکل ۳۷ـ۷ وارد می‌شود. جریان در طرف راست i_1 و در طرف چپ برابر i_2 است. وقتی که بسامد جریان AC کاهش می‌یابد، i_1 و i_2 چگونه تغییر می‌کنند؟

(الف) i_1 ثابت می‌ماند و i_2 کاهش می‌یابد.

(ب) i_1 کاهش می‌یابد ولی i_2 با آهنگ تندتری کاهش پیدا می‌کند.

(ج) اختلاف $i_2 - i_1$ افزایش می‌یابد.

(د) اختلاف $i_2 - i_1$ ثابت باقی می‌ماند.



شکل ۳۷ـ۷ پرسش چندگزینه‌ای ۳.

۴. چه نوع ماده‌ای، اگر در داخل یک القاگر انباشته کنیم، سبب بیشترین افزایش واکنایی القایی می‌شود؟

(الف) دی‌الکتریک (ب) دیامغناطیس (ج) پارامغناطیس (د) فرومغناطیس

۳۷ـ۳ مدار RLC تک‌حلقه‌ای

۵. یک مدار سری RLC به‌وسیلهٔ چشمه‌ای $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin \omega t$ تغذیه می‌شود و در بسامدی کمتر از بسامد تشدید مدار کار می‌کند. تیغهٔ دی‌الکتریکی را بین صفحه‌های خازن قرار می‌دهیم. جریان i_m چگونه تغییر می‌کند؟

(الف) i_m افزایش می‌یابد. (ب) i_m کاهش می‌یابد.

(ج) i_m ثابت می‌ماند.

(د) i_m ممکن است افزایش یا کاهش پیدا کند، ولی ثابت نمی‌ماند.

(ه) برای پاسخگویی به این پرسش به اندازهٔ کافی اطلاعات نداریم.

۶. دانشجویی یک مدار سری RLC درست می‌کند. وقتی مدار در بسامد f کار می‌کند، این دانشجو با استفاده از ولت‌سنج AC، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از اجزا را اندازه می‌گیرد و چنین به‌دست می‌آورد: $(\Delta V_L)_{max} =$ ۲٫۶ V، $(\Delta V_R)_{max} =$ ۸٫۸ V، و $(\Delta V_C)_{max} =$ ۷٫۴ V.

(۱) مدار چنان بسته‌شده که القاگر در مجاورت خازن قرار دارد. اگر این دانشجو اختلاف پتانسیل دو سر این مجموعهٔ مرکب القاگر و خازن، یعنی $(\Delta V_L + \Delta V_C)_{max}$، را اندازه‌گیری کند، باید منتظر چه نتیجه‌ای باشد؟

(الف) ۱۰٫۰ V (ب) ۷٫۸ V (ج) ۷٫۴ V (د) ۴٫۸ V

(۲) در اندازه‌گیری دامنهٔ $\mathscr{E}_m$ اختلاف پتانسیل دو سر منبع تغذیه چه انتظاری باید داشته باشد؟

(الف) ۱۸٫۸ V (ب) ۱۳٫۶ V (ج) ۱۰٫۰ V (د) ۴٫۰ V

۷. دانشجویی یک مدار سری RLC درست می‌کند. وقتی مدار در بسامد f کار می‌کند، او با استفاده از ولت‌سنج AC، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از اجزا را اندازه می‌گیرد و چنین به‌دست می‌آورد: $(\Delta V_R)_{max} =$ ۴٫۸ V، $(\Delta V_L)_{max} =$ ۲۹ V، و $(\Delta V_C)_{max} =$ ۲۰ V.

(۱) بسامد این مدار باید چگونه تغییر کند تا جریان i_m جاری در مدار افزایش یابد؟

(الف) f باید افزایش یابد. (ب) f باید کاهش یابد.

(ج) جریان به همین صورت بیشینه است.

(د) برای پاسخگویی به این پرسش به اندازهٔ کافی اطلاعات نداریم.

(۲) اگر بسامد تنظیم شود که جریان در مدار افزایش پیدا کند، چه تغییری در $(\Delta V_L)_{max}$ به‌وجود خواهد آمد؟

(الف) $(\Delta V_L)_{max}$ افزایش خواهد یافت.

(ب) $(\Delta V_L)_{max}$ کاهش خواهد یافت.

(ج) بدون توجه به هر نوع تغییری در بسامد f، کمیت $(\Delta V_L)_{max}$ ثابت باقی می‌ماند.

(د) جریان در همین شرایط بیشینه است.

(ه) برای پاسخگویی به این پرسش به اندازهٔ کافی اطلاعات نداریم.

۸. کدام‌یک از شرایط زیر هرگز در مدار سری RLC روی نخواهد داد؟

(الف) $(\Delta V_R)_{max} > \mathscr{E}_m$ (ب) $(\Delta V_L)_{max} > \mathscr{E}_m$

(ج) $(\Delta V_C)_{max} > \mathscr{E}_m$ (د) $(\Delta V_L)_{max} > (\Delta V_C)_{max}$

۳۷ـ۴ توان در مدارهای AC

۹. در معادلهٔ (۳۷ـ۳۵) وقتی $\phi > 0$ است، چه اتفاقی برای توان "نایافته یا گمشده" خواهد افتاد؟

(الف) این توان در خازن مصرف شده است.

(ب) این توان در القاگر مصرف شده است.

(ج) این توان در مقاومت مصرف شده است.

(د) هیچ توان "گمشده یا نایافته"‌ای وجود ندارد، معادلهٔ (۳۷ـ۳۵) همه چیز را به حساب می‌آورد.

۳۷ـ۵ مبدل

۱۰. وقتی در یک مبدل، تعداد دورهای مدار اولیه را دوبرابر و تعداد دورهای مدار ثانویه را نصف کنیم، چه تأثیری در مقاومت معادل مبدل خواهد گذاشت؟

(الف) مقاومت معادل ۶۴ برابر می‌شود.

(ب) مقاومت معادل ۱۶ برابر می‌شود.

(ج) مقاومت معادل ۴ برابر می‌شود.

(د) مقاومت معادل به ۱/۴ مقدار قبلیش کاهش خواهد یافت.

پرسشها

۱. در رابطهٔ $\omega = ۲\pi f$ وقتی از دستگاه یکاهای SI استفاده می‌کنیم ω را برحسب رادیان بر ثانیه و f را برحسب هرتز یا چرخه بر ثانیه اندازه می‌گیریم. رادیان مقیاس اندازه‌گیری زاویه است. زاویه چه ارتباطی با جریان متناوب دارد؟

۲. اگر خروجی یک مولد جریان متناوب مانند مولد شکل ۳۴ـ۱۳ را به یک مدار RLC مانند مدار شکل ۳۷ـ۱ متصل کنیم، چشمهٔ نهایی انرژی تلف‌شده در مقاومت چیست؟

۳. چرا شبکه‌های توزیع برق بدون جریان متناوب کارایی کمتری دارند؟

۴. در مدار شکل ۳۷ـ۱، چرا این فرضها که (الف) جریان متناوب معادلهٔ (۳۷ـ۲) همان بسامد زاویه‌ای ωی مربوط به نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب معادلهٔ (۳۷ـ۱) را دارد و (ب) زاویهٔ فاز ϕ معادلهٔ (۳۷ـ۲) با زمان تغییر نمی‌کند، فرضهای درستی هستند؟ اگر هر یک از این گزاره‌های (درست) اشتباه بود چه اتفاقی می‌افتاد؟

۵. فازور چه اختلافی با بردار دارد؟ می‌دانیم که، به‌عنوان مثال، نیروی محرکهٔ الکتریکی، اختلاف پتانسیل، و جریان، کمیتهای برداری نیستند. پس چگونه می‌توان ساختارهایی از نوع شکل ۳۷ـ۵ را توجیه کرد؟

۶. در جزء صرفاً مقاومتی مدار شکل ۳۷ـ۲، آیا بیشینهٔ مقدار $i_{\rm m}$ جریان متناوب با بسامد زاویه‌ای نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده تغییر می‌کند؟

۷. آیا اگر نمودار فازور به‌جای چرخش در جهت پادساعتگرد، که فرض کردیم، در جهت ساعتگرد بچرخد، هیچ‌یک از مطالب مورد بحث در بخش ۳۷ـ۳، اعتبار خود را از دست می‌دهد؟

۸. فرض کنید در یک مدار سری RLC بسامد ولتاژ اعمال‌شده را به‌صورت پیوسته از مقدارهای بسیار کم تا مقدارهای بسیار زیاد تغییر دهیم. ثابت فاز مدار چگونه تغییر خواهد کرد؟

۹. آیا مقاومت جریان متناوب یک قطعه می‌تواند تابع بسامد باشد؟

۱۰. از تحلیل مدار RLC می‌توان با قرار دادن $C = \infty$ رفتار یک مدار RL (بدون خازن) را تعیین کرد، در حالی‌که برای تعیین رفتار مدار RC (بدون القاگر) باید $L = ۰$ قرار دهیم. این تفاوت را توجیه کنید.

۱۱. در خلال جنگ جهانی دوم، یک مولد جریان متناوب (AC) در فاصلهٔ حدوداً ۱۶۰۰ متری از آزمایشگاهی قرار داشت که برق آن را تأمین می‌کرد. تکنیسینی برای جبران آنچه او آن را "افت بسامد در خط انتقال" مولد به ساختمان آزمایشگاه می‌نامید، سرعت مولد را افزایش می‌داد. در این مورد اظهار نظر کنید.

۱۲. وقتی که سرعت پره‌های یک بادبزن از صفر افزایش می‌یابد مجموعه‌ای از طرحهای ثابت را می‌توان مشاهده کرد مشروط بر اینکه پره‌ها را با نور یک چشمهٔ AC روشن کرده باشیم. این اثر در نور یک لامپ فلوئورسان یا نئون بارزتر از لامپی با رشتهٔ تنگستن است. این مشاهده‌ها را توضیح دهید.

۱۳. فرض کنید در شکل ۳۷ـ۱ داریم، $\omega \to ۰$. آیا معادلهٔ (۳۷ـ۱۹) به مقدار مورد انتظار نزدیک می‌شود؟ این مقدار چقدر است؟ در این مورد بحث کنید.

۱۴. به زبان ساده بگویید منظور از اینکه یک جریان متناوب از نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب "جلو" یا "عقب" است، چیست؟

۱۵. همان‌طور که در بخش ۳۷ـ۳ گفتیم، اگر یک مدار معین "بیشتر القایی باشد تا خازنی"، آنگاه $X_L > X_C$ است. (الف) آیا به این معنی است که، برای یک بسامد زاویه‌ای ثابت، L نسبتاً "بزرگ" و C نسبتاً "کوچک" است، یا اینکه L و C هر دو نسبتاً "بزرگ" اند؟ (ب) به‌ازای مقدارهای ثابت L و C آیا به این معنی است که ω نسبتاً "بزرگ" یا نسبتاً "کوچک" است؟

۱۶. در مدار سری RLC، چگونه می‌توان تعیین کرد که بسامد مدار بیشتر یا کمتر از بسامد تشدید است؟

۱۷. این گزاره را نقد کنید: "اگر $X_L > X_C$ است، در آن‌صورت باید داشته باشیم $L > ۱/C$".

۱۸. چگونه قاعده‌های کیرشهوف (قاعده‌های حلقه و گره) مدارهای جریان مستقیم باید برای استفاده از مدارهای جریان متناوب اصلاح شوند؟ آیا اصلاً نیازی به این کار هست؟

۱۹. آیا قاعدهٔ حلقه و قاعدهٔ گره مدارهای چندحلقه‌ای DC در مدارهای چندحلقه‌ای AC هم کاربرد دارند؟

۲۰. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۵، اگر (الف) R، (ب) C، (ج) L را افزایش دهیم، $P_{\rm av}$ چه تغییری خواهد کرد؟ (د) در هر یک از این سه مورد، زاویهٔ ϕ در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶) چگونه تغییر می‌کند؟

۲۱. اگر در مدار شکل ۳۷ـ۱ داشته باشیم $R = ۰$، در آن‌صورت هیچ‌گونه اتلاف توان در مدار نخواهیم داشت. اما نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب و جریان متناوب هنوز برقرارند. جریان انرژی در مدار را در این شرایط بررسی کنید.

۲۲. آیا در مدار AC، توان ریشه میانگین مربعی وجود دارد؟

۲۳. آیا مهندسان نیروگاهها مایل‌اند که ضریب توان پایین یا ضریب توان بالا داشته باشند، یا آیا اصلاً این موضوع برای آنها فرقی می‌کند؟ ضریب توان بین چه مقدارهایی می‌تواند تغییر کند؟ چه چیزی ضریب توان را مشخص می‌کند؛ آیا این کمیت ویژگی مولد است، یا خطوط انتقال، یا به مداری که خطوط انتقال به آن متصل می‌شوند، یا به ترکیبی از همهٔ اینها؟

۲۴. آیا توان لحظه‌ای که یک چشمهٔ جریان متناوب تأمین می‌کند هرگز منفی می‌شود؟ آیا امکان دارد که ضریب توان منفی شود؟ اگر چنین چیزی امکان‌پذیر است، معنی این مقدارهای منفی چیست؟

۲۵. در یک مدار سری RLC نیروی محرکهٔ الکتریکی، برای یک بسامد کار مشخص، جلوتر از جریان است. اکنون بسامد را اندکی کم می‌کنیم. آیا پاگیری کل این مدار افزایش می‌یابد، کم می‌شود یا ثابت می‌ماند؟

۲۶. اگر ضریب توان (مساوی با $\cos\phi$ در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶)) را برای یک مدار RLC مشخص بدانیم، آیا می‌توانیم بگوییم که نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده جلوتر از جریان است یا عقبتر از آن؟ در صورتی‌که پاسخ مثبت است، این عمل چگونه صورت می‌گیرد؟ اگر پاسخ منفی است، چرا نمی‌توان این کار را انجام داد؟

۲۷. گسترهٔ مقدارهای مجاز زاویهٔ فاز ϕ در معادلهٔ (۳۷ـ۲) چقدر است؟ گسترهٔ مقدارهای مجاز ضریب توان در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶) چقدر است؟

۲۸. چرا استفاده از نمادگذاری ریشه میانگین مربعی (rms) برای جریانها و ولتاژهای متناوب سودمند است؟

۲۹. می‌خواهید صورت حساب برق خودتان را کاهش دهید. آیا به یک ضریب توان پایین امید دارید یا به یک ضریب توان بالا یا اینکه اصلاً فرقی نمی‌کند؟ اگر تفاوت می‌کند، آیا در این زمینه اقدامی هست که باید انجام دهید؟ در این‌باره توضیح دهید.

۳۰. در معادلهٔ (۳۷ـ۳۶) آیا زاویهٔ فاز ϕ، زاویهٔ بین $\mathscr{E}(t)$ و $i(t)$ است یا بین $\mathscr{E}_{\rm rms}$ و $i_{\rm rms}$؟ در این‌باره توضیح دهید.

۳۱. مبدل یک زنگ اخبار برای rms مدار ورودی اولیهٔ $۱۲۰\ \rm V$ و rms خروجی ثانویهٔ $۶\ \rm V$ طراحی شده است. اگر در زمان نصب این زنگ برحسب تصادف اتصالهای ورودی و خروجی با هم جابه‌جا شوند، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ آیا برای اینکه از نتیجه آگاه شوید باید منتظر بمانید تا کسی زنگ را به صدا درآورد؟ در این‌باره بحث کنید.

۳۲. مبدلی در اختیار دارید که در یک جعبهٔ چوبی قرارگرفته است و پایانه‌های ورودی و خروجی (اولیه و ثانویه) این مبدل در دو طرف این جعبه قرار دارد. چگونه می‌توان بدون بازکردن جعبه نسبت تعداد دورهای سیم‌پیچ در مدار اولیه و ثانویه را مشخص کرد؟

۳۳. در مبدل شکل ۳۷ـ۶، وقتی مدار ثانویه باز است، ارتباط فاز بین (الف) نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده و جریان اولیه، (ب) نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده و میدان مغناطیسی موجود در هستهٔ مبدل، و (ج) جریان اولیه و میدان مغناطیسی موجود در هستهٔ مبدل کدام است؟

۳۴. بعضی از کاربردهای مبدل فزاینده کدام است؟ مبدل کاهنده چه کاربردهایی دارد؟

۳۵. چه چیزی مشخص می‌کند که کدام سیم‌پیچ مبدل اولیه است و کدام ثانویه؟ آیا امکان دارد که مبدلی دارای یک سیم‌پیچ اولیه و دو سیم‌پیچ ثانویه باشد؟ آیا ممکن است مبدلی یک سیم‌پیچ ثانویه و دو سیم‌پیچ اولیه داشته باشد؟

۳۶. به‌جای مقادیر متداول اختلاف پتانسیل و بسامد جریان متناوب در ایالات متحدهٔ امریکا یعنی $۱۲۰\ \rm V$ و $۶۰\ \rm Hz$ در اروپا از $۲۴۰\ \rm V$ و $۵۰\ \rm Hz$ استفاده می‌شود. اگر بخواهید از وسایلی که برای برق جریان متناوب با مشخصه‌های امریکایی طراحی شده‌اند، مانند ساعت، ریش‌تراش برقی، و سشوار در اروپا استفاده کنید، آیا بهره‌برداری از یک مبدل فزایندهٔ ۱ به ۲ کافی است؟ بگویید چرا این اقدام به ظاهر ساده ممکن است کافی باشد یا نباشد.

تمرینها

۳۷ـ۱ جریانهای متناوب

۳۷ـ۲ سه جزء جداگانه

۱. فرض کنید معادلهٔ (۳۷ـ۱) نیروی محرکهٔ الکتریکی مؤثر موجود در یک خروجی متداول AC با بسامد $۶۰\ \rm Hz$ را نشان دهد. این بسامد با کدام بسامد زاویه‌ای ω متناظر است؟ شرکت برق چگونه این بسامد را برقرار می‌کند؟

۲. واکنایی یک القاگر $۴۵٫۲\ \rm mH$ برابر $۱٫۲۸\ \rm k\Omega$ است. (الف) بسامد آن را مشخص کنید. (ب) ظرفیت خازنی با همان واکنایی و در همان

بسامد چقدر است؟ (ج) اگر بسامد دوبرابر شود، واکنایی القاگر و خازن چقدر خواهد شد؟

۳. (الف) در چه بسامد زاویه‌ای القاگر mH ۶٫۲۳ و خازن μF ۱۱٫۴ واکنایی یکسانی خواهند داشت؟ (ب) این واکنایی چقدر است؟ (ج) نشان دهید که این بسامد برابر است با بسامد طبیعی نوسانهای آزاد LC.

۴. خروجی یک مولد AC به‌صورت $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\text{m} \sin \omega t$ است که در آن $\mathscr{E}_\text{m} =$ ۲۵٫۰ V و $\omega =$ ۳۷۷ rad/s. این مولد به یک القاگر ۱۲٫۷ H متصل شده است. (الف) بیشینهٔ مقدار جریان چقدر است؟ (ب) هنگامی که جریان بیشینه است، نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد چقدر است؟ (ج) هنگامی که نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر با ۱۳٫۸V− است و اندازهٔ آن در حال افزایش است، جریان چقدر است؟ (د) برای شرایط قسمت (ج) آیا مولد انرژی مدار را تأمین می‌کند یا از بقیهٔ مدار انرژی می‌گیرد؟

۵. مولد AC تمرین ۴ را به خازنی با ظرفیت ۴٫۱μF متصل می‌کنیم (الف) بیشینهٔ مقدار جریان چقدر است؟ (ب) وقتی که جریان بیشینه است، نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد چقدر است؟ (ج) وقتی نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر ۱۳٫۸ V− و از نظر اندازه در حال افزایش است، جریان چقدر است؟ (د) در شرایط قسمت (ج) آیا مولد انرژی مدار را تأمین می‌کند یا از بقیه مدار انرژی می‌گیرد؟

۳۷ـ۳ مدار RLC تک‌حلقه‌ای

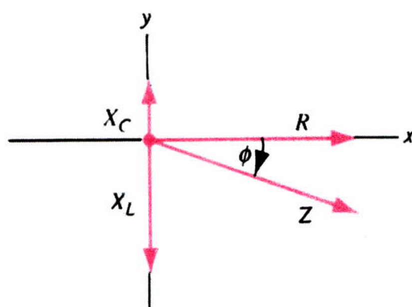
۶. پیچه‌ای با ضریب القای ۸۸٫۳ mH و مقاومت مجهول را همراه با یک خازن ۹۳۷ nF به‌صورت سری به نوسان‌کننده‌ای با بسامد ۹۴۱ Hz متصل کرده‌ایم. زاویهٔ فاز ϕ بین نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال‌شده و جریان °۷۵٫۰ است. مقاومت پیچه را معین کنید.

۷. شکلهای ۳۷ـ۵(ب) و ۳۷ـ۵(ج) را (به‌طور تقریبی) مجدداً برای حالتهای $X_C > X_L$ و $X_C = X_L$ رسم کنید.

۸. (الف) کلیهٔ کمیتهای مورد نظر در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ را برای $C =$ ۷۰μF مجدداً محاسبه کنید، سایر کمیتها در آن مسئلهٔ نمونه تغییر نمی‌کنند. (ب) برای این وضعیت جدید یک نمودار فازور در مقیاس مشابهٔ شکل ۳۷ـ۵(ج) رسم کرده و دو نمودار را به دقت با هم مقایسه کنید.

۹. منحنیهای تشدید شکل ۳۶ـ۱۳ را مورد توجه قرار دهید. (الف) نشان دهید که برای بسامدهای بالاتر از بسامد تشدید مدار به‌طور کلی القایی است و برای بسامدهای پایین‌تر از بسامد تشدید مدار اساساً خازنی است. (ب) رفتار این مدار در بسامد تشدید چگونه است؟ (ج) یک نمودار فازور شبیه شکل ۳۷ـ۵(ج) برای حالتهایی که بسامد بیشتر از بسامد تشدید، برابر با بسامد تشدید و کمتر از بسامد تشدید است، رسم کنید.

۱۰. به‌صورت ریاضی ثابت کنید که ساختار هندسی زیر به درستی پاگیری Z و ثابت فاز ϕ را به‌دست می‌دهد. با مراجعه به شکل ۳۷ـ۸، (۱) در امتداد محور $+y$ پیکانی به طول X_C رسم کنید، (۲) در امتداد محور $-y$ پیکانی با طول X_L بکشید و (۳) پیکانی به طول R در امتداد محور $+x$ رسم کنید. اندازهٔ "برایند" این پیکانها Z است و زاویهٔ (اندازه‌گیری‌شده زیر محور $+x$) این برایند، همان زاویهٔ ϕ است.



شکل ۳۷ـ۸ تمرین ۱۰.

۱۱. آیا در مدار RLC دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر می‌تواند از دامنهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد بزرگتر باشد؟ مداری با مشخصه‌های $\mathscr{E}_\text{m} =$ ۱۰ V، $R =$ ۹٫۶Ω، $L =$ ۱٫۲ H و $C =$ ۱٫۳μF در نظر بگیرید. دامنهٔ ولتاژ دو سر القاگر را در وضعیت تشدید به‌دست آورید.

۱۲. با استفاده از معادلهٔ (۳۷ـ۱۸)، $\sin \phi$ و $\cos \phi$ را برحسب R، X_L و X_C به‌دست آورید. سپس با قرار دادن آنها در معادلهٔ (۳۷ـ۱۶)، معادلهٔ (۳۷ـ۱۷) را به‌دست آورید.

۱۳. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳، وقتی نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد بیشینه است، ولتاژ دو سر (الف) مولد، (ب) مقاومت، (ج) خازن، و (د) القاگر چقدر است؟ (ه) با جمع کردن این مقدارها با علامتهای مناسب ثابت کنید که قاعدهٔ حلقه صادق است.

۱۴. یک ترکیب مقاومت‌ـالقاگرـخازن، R_1، L_1، C_1 دقیقاً همان بسامد تشدیدی را دارد که ترکیب دیگر R_2، L_2، و C_2. حال این دو مجموعه را به‌صورت سری به‌هم می‌بندیم. نشان دهید که این مدار جدید همان بسامد تشدید هر یک از دو مدار جداگانهٔ اولیه را دارد.

۱۵. برای یک مدار RLC، بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد ۱۲۵ V و بیشینهٔ جریان ۳٫۲۰ A است. اگر جریان به اندازهٔ °۵۶٫۳

از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد جلوتر باشد، (الف) پاگیری و (ب) مقاومت مدار چقدر است؟ (ج) آیا این مدار اساساً خازنی است یا القایی؟

۳۷ـ۴ توان در مدارهای AC

۱۶. نشان دهید که اگر میانگین روی یک یا چند چرخهٔ کامل گرفته شود، داریم $[\sin^۲ \omega t]_{\rm av} = ۱/۲$ و $[\sin \omega t \cos \omega t]_{\rm av} = ۰$.

۱۷. یک موتور الکتریکی که به منبع تغذیه‌ای با مشخصات ۱۲۰ V و ۶۰ Hz متصل است با آهنگ ۱۰٫۰ اسب بخار hp(۱ hp = ۷۴۶ W) کار مکانیکی انجام می‌دهد. اگر این موتور جریان rms‌ای برابر ۶۵۰ mA بکشد، مقاومت آن برحسب انتقال توان چقدر است؟ آیا این مقاومت همان مقاومت پیچه‌های آن است، که وقتی موتور را از مولد جدا می‌کنیم به‌وسیلهٔ اهم‌سنج اندازه‌گیری می‌شود؟

۱۸. نشان دهید که میانگین توان تحویلی به مدار RLC را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$P_{\rm av} = \mathscr{E}^۲_{\rm rms} R/Z^۲$$

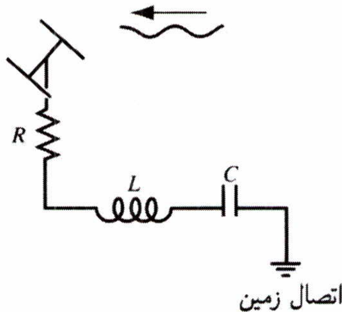
نشان دهید که این عبارت برای مدار صرفاً مقاومتی، مدار RLC در حالت تشدید، مدار خازنی محض، و مدار صرفاً القایی جوابی منطقی به‌دست می‌دهد.

۱۹. میانگین توان تلف‌شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ را با فرض اینکه (الف) القاگر از مدار حذف شود و (ب) خازن از مدار حذف شود، محاسبه کنید.

۲۰. یک دستگاه تهویه که به برق AC با ولتاژ (rms)، ۱۲۰ V متصل شده، معادل یک مقاومت ۱۲٫۲Ω است که به‌صورت سری به یک القاگر با واکنایی القایی ۲٫۳۰Ω متصل شده باشد. (الف) پاگیری دستگاه تهویه را محاسبه کنید. (ب) میانگین توانی که به این وسیله داده می‌شود، تعیین کنید. (ج) مقدار جریان rms این مدار چقدر است؟

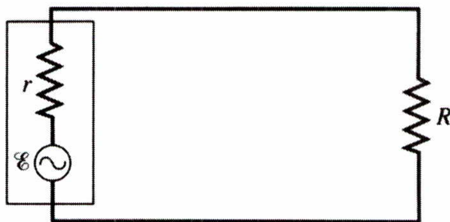
۲۱. یک ولت‌سنج AC با پاگیری زیاد را به نوبت به دو سر القاگر، خازن، و مقاومت یک مدار سری RLC که شامل یک چشمهٔ AC با ولتاژ ۱۰۰ V(rms) است وصل می‌کنیم. این ولت‌سنج در هر سه مورد عدد یکسانی را برحسب ولت نشان می‌دهد. این رقم کدام است؟

۲۲. مدار آنتن FM در شکل ۳۷ـ۹ را در نظر بگیرید. در این مدار $L = ۸٫۲۲\mu$H، $C = ۰٫۲۷۰$ pF، و $R = ۷۴٫۷\Omega$. سیگنال رادیویی، در آنتن، نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوبی القا می‌کند که برای آن $\mathscr{E}_{\rm rms} = ۹٫۱۳\mu$V است. مقدارهای زیر را تعیین کنید: (الف) بسامد موجهای فرودی که آنتن با آن "تنظیم" است، (ب) جریان rms در آنتن، و (ج) اختلاف پتانسیل rms دو سر خازن.



شکل ۳۷ـ۹ تمرین ۲۱.

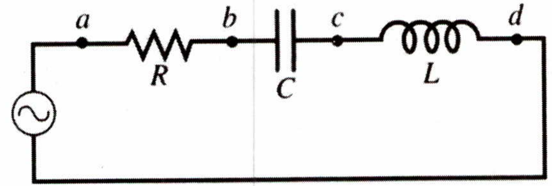
۲۳. در شکل ۳۷ـ۱۰، نشان دهید که توان مصرف‌شده در مقاومت R وقتی بیشینه است که $R = r$ باشد. در اینجا r مقاومت داخلی مولد AC است. در این کتاب، تا اینجا، به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که $r = ۰$. این موضوع را با وضعیت جریان DC مقایسه کنید؟



شکل ۳۷ـ۱۰ تمرینهای ۲۳ و ۳۲.

۲۴. در یک مدار RLC، مانند مدار شکل ۳۷ـ۱، فرض کنید $R = ۵٫۰\,\Omega$، $L = ۶۰$ mH، $f = ۶۰$ Hz، و $\mathscr{E}_{\rm m} = ۳۰$ V است. برای چه مقدارهایی از ظرفیت، میانگین توان تلف‌شده در مقاومت (الف) بیشینه و (ب) کمینه خواهد شد؟ (ج) این توانهای بیشینه و کمینه کدام‌اند؟ (د) زاویه‌های فاز متناظر با آنها چیست؟ (هـ) ضریبهای توان متناظر با این حالتها چقدر است؟

۲۵. در شکل ۳۷ـ۱۱، می‌دانیم که: $R = ۱۵٫۰\,\Omega$، $C = ۴٫۷۲\mu$F، و $L = ۲۵٫۳$ mH است. مولد، یک ولتاژ سینوسی ۷۵٫۰ V (rms) با بسامد $f = ۵۵۰$ Hz را تأمین می‌کند. (الف) دامنهٔ rms جریان را محاسبه کنید. (ب) ولتاژهای (rms) ΔV_{ab}، ΔV_{bc}، ΔV_{cd}، و ΔV_{bd}، ΔV_{ad} را تعیین کنید. (ج) میانگین توانی که هر یک از سه جزء مدار مصرف می‌کنند چقدر است؟



شکل ۳۷ـ۱۱ تمرین ۲۵.

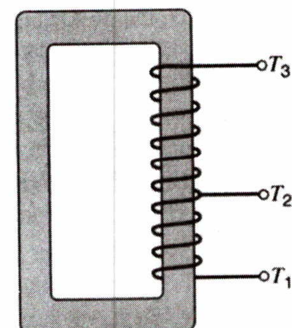
۲۶. برای یک مدار RLC، نشان دهید که در یک چرخه با دورهٔ تناوب T (الف) انرژی ذخیره‌شده در خازن تغییر نمی‌کند؛ (ب) انرژی ذخیره‌شده در القاگر تغییر نمی‌کند؛ (ج) مولد انرژی $(1/2T)\mathscr{E}_{\rm m}i_{\rm m}\cos\phi$ را تأمین می‌کند؛ (د) مقاومت مقدار انرژی $(1/2T)Ri_{\rm m}^2$ را مصرف می‌کند. نشان دهید، کمیتهای به‌دست‌آمده در قسمتهای (ج) و (د) برابرند.

۳۷ـ۵ مبدل

۲۷. مولدی اختلاف پتانسیل $150\ {\rm V\ (rms)}$ را برای پیچهٔ مدار اولیهٔ مبدلی با ۶۵ دور سیم‌پیچ تأمین می‌کند. اگر پیچهٔ مدار ثانویهٔ این مبدل دارای ۷۸۰ دور سیم‌پیچ باشد، ولتاژ ثانویه چقدر است؟

۲۸. مبدلی دارای ۵۰۰ دور سیم‌پیچ در مدار اولیه و ۱۰ دور سیم‌پیچ در مدار ثانویه است. (الف) اگر $\Delta V_{\rm p}$ برای مدار اولیه برابر $120\ {\rm V\ (rms)}$ باشد، $\Delta V_{\rm s}$ مربوط به مدار ثانویه چقدر است؟ البته، با این فرض که مدار ثانویه باز باشد. (ب) اکنون اگر مدار ثانویه به یک بار مقاومتی 15Ω متصل شود، جریان در سیم‌پیچهای مدار اولیه و ثانویه چقدر می‌شود؟

۲۹. در شکل ۳۷ـ۱۲ یک "مبدل خودکار" را نشان داده‌ایم. این مبدل از یک تک‌پیچه (با یک هستهٔ آهنی) تشکیل شده است. این پیچه دارای سه "نقطهٔ اتصال" است. بین نقطه‌های اتصال T_1 و T_2 پیچه شامل ۲۰۰ دور و بین نقطه‌های اتصال T_2 و T_3 پیچه شامل ۸۰۰ دور سیم‌پیچ است. هر دو نقطهٔ اتصال از بین سه نقطهٔ اتصال را می‌توان "پایانه‌های مدار اولیه" و هر دو نقطهٔ اتصالی را "پایانه‌های مدار ثانویه" در نظر گرفت. فهرست تمام نسبتهایی را معین کنید، که می‌توان بین ولتاژ مدار اولیه و ولتاژ مدار ثانویه به‌دست آورد.



شکل ۳۷ـ۱۲ تمرین ۲۹.

۳۰. کشاورزی تلمبهٔ آبی را با جریان $3.8\ {\rm A\ (rms)}$ به‌کار می‌اندازد. طول خط انتقال از تلمبه تا مبدل $1.2\ {\rm km}$ است و از دو رشته سیم مسی تشکیل شده که قطر هر یک از آنها $1.8\ {\rm mm}$ است. دمای محیط $5.4^\circ{\rm C}$ است. در این خط انتقال، چه توانی تلف می‌شود؟

۳۱. یک مهندس برق مبدل ایده‌آلی طراحی می‌کند که برق یک دستگاه تولید پرتو x، با پتانسیل قلهٔ $74\ {\rm kV}$ و جریان $270\ {\rm mA\ (rms)}$ را تأمین می‌کند. مبدل از یک منبع تغذیه (rms) برابر با $220\ {\rm V}$ استفاده می‌کند. ولی، او مقاومت سیمهایی که منبع تغذیه را به مبدل وصل می‌کنند نادیده می‌گیرد. به هنگام نصب، معلوم می‌شود که مقاومت این سیمها 0.62Ω است. برای حفظ همان پارامترهای کار در مبدل، ولتاژ منبع تغذیه را چقدر باید افزایش داد؟

۳۲. در شکل ۳۷ـ۱۰ فرض کنید که مستطیل طرف چپ، خروجی یک دستگاه تقویت‌کنندهٔ صوتی (با پاگیری زیاد)، با $r = 1000\Omega$ را نشان دهد. فرض کنید که $R = 10\Omega$ پیچهٔ یک بلندگو (با پاگیری کم) است. دیدیم که می‌توان از یک مبدل برای "انتقال" مقاومت استفاده کرد و آنها را واداشت تا چنان رفتار کنند که گویی مقاومتشان بیشتر یا کمتر از مقدار واقعی آنهاست. پیچه‌های مدار اولیه و ثانویهٔ مبدلی را رسم کنید که باید در شکل ۳۷ـ۱۰ بین "تقویت‌کننده" و "بلندگو" قرار بگیرد تا "پاگیریهای آنها را همخوان کند". نسبت تعداد دورهای سیم‌پیچهای این مبدل باید چقدر باشد؟

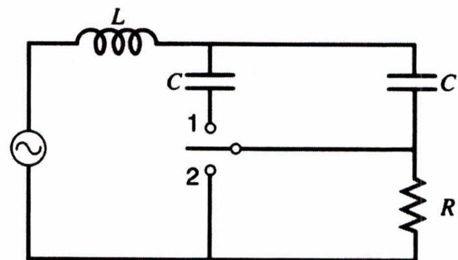
مسئله‌ها

۱. خروجی یک مولد AC به‌صورت $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\rm m}\sin(\omega t - \pi/4)$ است، که در آن $\mathscr{E}_{\rm m} = 31.4\ {\rm V}$ و $\omega = 350\ {\rm rad/s}$. جریان در این مدار از رابطهٔ $i(t) = i_{\rm m}\sin(\omega t - 3\pi/4)$ به‌دست می‌آید که در آن $i_{\rm m} = 622\ {\rm mA}$ است. (الف) در چه زمانی، پس از $t = 0$، نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برای اولین بار بیشینه می‌شود؟ (ب) در چه زمانی، پس از $t = 0$، جریان برای اولین بار بیشینه می‌شود؟ (ج) مدار به غیر از مولد شامل یک جزء دیگر نیز هست. آیا این جزء خازن، القاگر، یا مقاومت است؟ پاسخ خود را توجیه کنید. (د) پاسخ به قسمت (ج) هر چه هست، مقدار ظرفیت، ضریب القا، یا مقاومت آن چقدر است؟

۲. کلیهٔ مرحله‌های مسئلهٔ ۱ را انجام دهید، بجز اینکه در این حالت جریان را به‌صورت $i = i_m \sin(\omega t + \pi/۴)$ در نظر بگیرید.

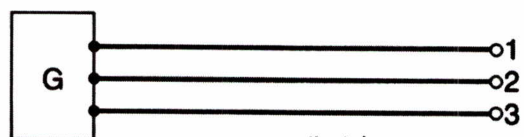
۳. در یک مدار RLC مشخص، که با بسامد ۶۰ Hz کار می‌کند، بیشینهٔ ولتاژ دو سر القاگر دوبرابر بیشینهٔ ولتاژ دو سر مقاومت است، در حالی‌که بیشینهٔ ولتاژ دو سر خازن همان بیشینهٔ ولتاژ دو سر مقاومت است. (الف) زاویهٔ تأخیر فاز جریان نسبت به نیروی محرکهٔ الکتریکی چقدر است؟ (ب) اگر بیشینهٔ نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد برابر ۳۴٫۴ V باشد، برای به‌دست‌آوردن بیشینهٔ جریان ۳۲۰ mA مقاومت مدار باید چقدر باشد؟

۴. مولد AC شکل ۳۷ـ۱۳ (بیشینهٔ) ولتاژ ۱۷۰ V را با بسامد ۶۰ Hz تأمین می‌کند. هنگامی که کلید، مطابق نمودار، باز است جریان جاری در مدار ۲۰° از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد جلوتر است. هنگامی که کلید در موقعیت ۱ قرار می‌گیرد جریان، ۱۰° از نیروی محرکهٔ الکتریکی مولد عقب می‌افتد. هنگامی که کلید در موقعیت ۲ قرار می‌گیرد بیشینهٔ جریان ۲٫۸۲ A می‌شود. مقدارهای R، L، و C را به‌دست آورید.



شکل ۳۷ـ۱۳ مسئلهٔ ۴.

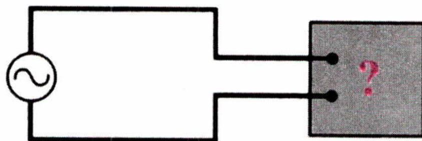
۵. مولد برق سه فاز G، مولد توان الکتریکی است که، مطابق شکل ۳۷ـ۱۴، به‌وسیلهٔ سه رشته سیم انتقال پیدا می‌کند. اختلاف پتانسیل (نسبت به یک سطح مرجع مشترک) این سیمها به‌صورت زیر است: $V_۱ = V_m \sin\omega t$، $V_۲ = V_m \sin(\omega t - ۱۲۰°)$، و $V_۳ = V_m \sin(\omega t - ۲۴۰°)$. برخی تجهیزات صنعتی (مانند موتورها) دارای سه پایانه هستند و طوری طراحی شده‌اند که مستقیماً به این سه رشته سیم وصل می‌شوند. برای استفاده از وسایل دو پایانه‌ای



شکل ۳۷ـ۱۴ مسئلهٔ ۵.

معمولی (مانند، لامپ روشنایی) می‌توان آن را به هر دو سیم از سه سیم وصل کرد. نشان دهید که اختلاف پتانسیل بین هر دو رشته از این مجموعهٔ سه‌سیمی (الف) دارای یک نوسان سینوسی با بسامد زاویه‌ای ω است و (ب) دامنهٔ این نوسان برابر $V_m\sqrt{۳}$ است.

۶. در شکل ۳۷ـ۱۵ یک مولد AC را نشان داده‌ایم که از طریق یک جفت پایانه به یک "جعبهٔ سیاه" متصل شده است. این جعبه شامل یک مدار RLC است، حتی ممکن است که شامل یک مدار چندحلقه‌ای باشد، که دربارهٔ اجزا و چگونگی قرارگیری (آرایش) آنها اطلاعی نداریم. اندازه‌گیریهای خارج از جعبه نشان می‌دهد که: $\mathscr{E}(t) = (۷۵\,\text{V})\sin\omega t$ و $i(t) = (۱٫۲\,\text{A})\sin(\omega t + ۴۲°)$ است. (الف) ضریب توان این جعبه چقدر است؟ (ب) آیا جریان جلوتر از نیروی محرکهٔ الکتریکی است یا عقب‌تر از آن؟ (ج) آیا سرشت مدار داخل جعبه بیشتر القایی است یا خازنی؟ (د) آیا مدار موجود در جعبه در حالت تشدید است؟ (هـ) آیا باید در این جعبه یک خازن وجود داشته باشد؟ یک القاگر چطور؟ یک مقاومت چطور؟ (و) توان میانگینی که مولد به جعبه تحویل می‌دهد چقدر است؟ (ز) چرا برای پاسخگویی به همهٔ این پرسشها نیازی به دانستن بسامد زاویه‌ای ω ندارید؟



شکل ۳۷ـ۱۵ مسئلهٔ ۶.

۷. یک مدار RLC، دارای $R = ۵٫۱۲\Omega$، $C = ۱۹٫۳\mu\text{F}$، $L = ۹۸۸\,\text{mH}$ و $\mathscr{E}_m = ۳۱٫۳\,\text{V}$ است. (الف) در کدام بسامد زاویه‌ای ω، جریان مانند منحنیهای تشدید شکل ۳۶ـ۱۳، به بیشینهٔ مقدارش خواهد رسید؟ (ب) این مقدار بیشینه چقدر است؟ (ج) در کدام دو بسامد زاویه‌ای $\omega_۱$ و $\omega_۲$ دامنهٔ جریان نصف این مقدار بیشینه می‌شود؟ (د) عرض نسبی $[(\omega_۱ - \omega_۲)/\omega =]$ منحنی تشدید را به‌دست آورید.

۸. (الف) نشان دهید که عرض نسبی منحنی تشدید شکل ۳۶ـ۱۳، با تقریب خوبی، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{۳}R}{\omega L}$$

که در اینجا ω بسامد تشدید و $\Delta\omega$ عرض قلهٔ تشدید در $i = (۱/۲)i_m$ است. توجه کنید که (مسئلهٔ ۱۵ فصل ۳۶ را ببینید) این رابطه را می‌توان

به‌صورت $\sqrt{3}/Q$ نوشت که به‌روشنی نشان می‌دهد که یک مدار با "Qی بالا" دارای یک قلهٔ تشدید تیز است، یعنی، برای آن مقدار $\Delta\omega/\omega$ مقداری کوچک است. (ب) از این نتیجه برای بررسی قسمت (د) مسئلهٔ ۷ استفاده کنید.

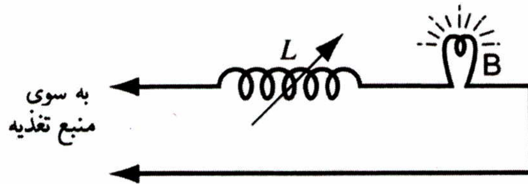
۹. در یک مدار RLC داریم، $R = ۱۶٫۰\Omega$ ،$C = ۳۱٫۲\mu\text{F}$، $L = ۹٫۲۰\ \text{mH}$ ،$\mathscr{E} = \mathscr{E}_\text{m}\sin\omega t$ که در آن $\mathscr{E} = ۴۵٫۰\ \text{V}$ و $\omega = ۳۰۰۰\ \text{rad/s}$ است. در لحظهٔ $t = ۰٫۴۲۲\ \text{ms}$ (الف) آهنگ تأمین انرژی توسط مولد، (ب) آهنگ ذخیرهٔ انرژی در خازن، (ج) آهنگ ذخیرهٔ انرژی در القاگر، و (د) آهنگ مصرف انرژی در مقاومت را مشخص کنید. (هـ) مفهوم نتیجهٔ منفی برای هر یک از قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) چیست؟ (و) نشان دهید که حاصل‌جمع نتیجه‌های به‌دست‌آمده در قسمتهای (ب)، (ج)، و (د) نتیجهٔ قسمت (الف) را به‌دست می‌دهد.

۱۰. نشان دهید که در شکل ۳۷ـ۶ جریان $i_\text{p}(t)$ در مدار اولیه با اتصال مستقیم یک مقاومت R' [مساوی $(R(N_\text{p}/N_\text{s})^2)$] به دو سر مولد و حذف مدار ثانویه و مبدل، تغییر نخواهد کرد. یعنی، داریم

$$i_\text{p}(t) = \frac{\mathscr{E}(t)}{R'}$$

به این ترتیب می‌بینیم که مبدل نه تنها اختلاف پتانسیل و جریان را "منتقل" می‌کند بلکه مقاومت را نیز انتقال می‌دهد. در حالت کلی‌تری، که بار مدار ثانویه در شکل ۳۷ـ۶ علاوه بر جزء مقاومتی شامل اجزای خازنی و القایی نیز هست، می‌گوییم که مبدل پاگیری را انتقال می‌دهد.

۱۱. یک "کم‌سوکنندهٔ" معمولی که برای کم‌سو کردن نورهای صحنه در تئاتر به‌کار می‌رود از یک القاگر متغیر L تشکیل شده است که به‌طور سری، مطابق شکل ۳۷ـ۱۶، به لامپ B متصل شده است. منبع تغذیه ولتاژ $۱۲۰\ \text{V (rms)}$ با بسامد $۶۰٫۰\ \text{Hz}$ را تأمین می‌کند؛ و لامپ با علامت "$۱۲۰\ \text{V}$، $۱۰۰۰\ \text{W}$" نشانه‌گذاری شده است. (الف) اگر بخواهیم که توان مصرف‌شده در لامپ با ضریب ۵ تغییر کند بیشینهٔ ضریب القای مورد نیاز چقدر است؟ فرض کنید که مقاومت لامپ مستقل از دمای آن باشد. (ب) آیا می‌توان به‌جای القاگر از مقاومت متغیر استفاده کرد؟ در صورت مثبت‌بودن پاسخ، بیشینهٔ مقاومت مورد نیاز چقدر است؟ چرا این کار انجام نمی‌شود؟



شکل ۳۷ـ۱۶ مسئلهٔ ۱۱.

مسئلهٔ کامپیوتری

۱. مجدداً مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷ـ۳ را در نظر بگیرید. با استفاده از روشهای عددی مبتنی بر معادلهٔ (۳۷ـ۲۵)، نمودار جریان برحسب زمان را ترسیم کنید. برای این منظور اندازهٔ گام زمان را برابر $۱/۶۰۰۰\ \text{s}$ ($۱/۱۰۰$ دورهٔ تناوب منبع تغذیه) اختیار کنید و فرض کنید که در $t = ۰$ بار روی خازن برابر با صفر است و هیچ جریانی در مدار وجود ندارد. چه مدت وقت لازم است تا جریان به‌صورت پاسخی به شکل معادلهٔ (۳۷ـ۲) تثبیت شود؟ پاسختان چگونه با جواب تحلیلی مسئله مقایسه می‌شود؟

۳۸

معادله‌های ماکسول و موجهای الکترومغناطیسی

در این فصل چهار معادلهٔ بنیادی نظریهٔ الکترومغناطیس را که با نام معادله‌های ماکسول شناخته شده‌اند، و در فصلهای پیشین تک‌تک آنها را بررسی کرده‌ایم، جمع‌بندی می‌کنیم. از یک استدلال مبتنی بر تقارن متوجه کمبود یک جملهٔ بسیار مهم در یکی از این معادله‌ها می‌شویم. وقتی این جمله را در معادلهٔ مربوط منظور کنیم، این معادله‌ها منجر به پیش‌بینی موجهای الکترومغناطیسی می‌شوند که با سرعت نور انتشار می‌یابند. در این فصل، خواص این موجها را بررسی می‌کنیم که در شناخت پدیده‌های اپتیکی، پخش رادیویی و تلویزیونی و خواص وسیله‌های کاربردی مانند اجاقهای میکروموجی، دارای اهمیت‌اند.

۳۸ـ۱ معادله‌های بنیادی نظریهٔ الکترومغناطیس

با آنکه، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی خواص فیزیکی بسیار متفاوتی دارند، در خواص ریاضی آنها شباهتهای زیادی وجود دارد. برای مشاهدهٔ این شباهتها، معادله‌های بنیادی الکترومغناطیس را در مورد ناحیه‌ای از فضا به‌کار می‌گیریم که در آنجا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وجود دارند ولی هیچ‌گونه بار یا جریانی وجود ندارد (ممکن است میدانها از بارها یا جریانهای موجود در ناحیه‌های دیگر فضا پدید آمده باشند).

اگر در این ناحیه رویهٔ بسته‌ای را انتخاب کنیم، می‌توانیم قانون گاؤس را برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به‌کار ببریم:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad (۳۸ـ۱)$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad (۳۸ـ۲)$$

روی هر رویهٔ بسته‌ای، انتگرالهای روی سطح میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هر دو برابر صفرند، زیرا رویه، حاوی هیچ بار الکتریکی یا قطب مغناطیسی نیست. این دو معادله دقیقاً دارای یک صورت هستند، که تقارن مهمی را بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نشان می‌دهند.

اکنون، در این ناحیه مسیر بسته‌ای را اختیار کرده قانون فاراده و قانون آمپر را در مورد آن مسیرها به‌کار می‌بریم:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (۳۸ـ۳)$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0 \qquad (۳۸ـ۴)$$

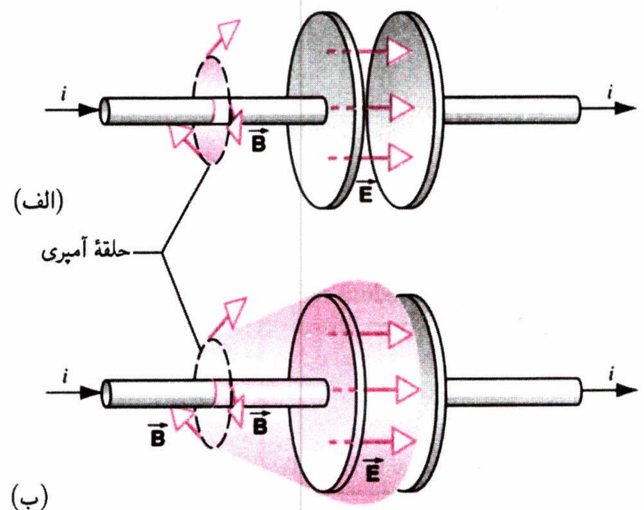
تقارن بین $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$، که در معادله‌های (۳۸ـ۱) و (۳۸ـ۲) برقرار بود، به نظر می‌رسد که در معادله‌های (۳۸ـ۳) و (۳۸ـ۴) دیگر وجود ندارد. قانون فاراده، معادلهٔ (۳۸ـ۳)، حاکی از آن است که در این ناحیه میدان مغناطیسی متغیر می‌تواند میدان الکتریکی به‌وجود آورد. آیا امکان دارد که میدان الکتریکی متغیر سبب ایجاد میدان مغناطیسی بشود؟

این پرسش نخستین بار توسط ماکسول* مطرح شد. پاسخ صحیح او به این پرسش، جملهٔ گمشده در قانون آمپر را به‌دست داد که تقارن بین میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در قانون فاراده و قانون آمپر حفظ کرد. این جملهٔ اضافی مسئول وجود موجهای الکترومغناطیسی هستند که ماکسول توانست آن را از نظریه‌اش استنتاج کند. اندکی پس از پیش‌بینی او، این موجها کشف و در اختراع رادیو از آنها بهره گرفته شد. اگر بگوییم که تمامی ارتباطات و مخابرات جدید پیامد مستقیم کشف ماکسول هستند، گزافه‌گویی نکرده‌ایم.

۳۸ـ۲ میدانهای مغناطیسی القایی و جریان جابه‌جایی

در اینجا شواهد مربوط به فرض بخش قبل را به تفصیل مطالعه می‌کنیم. این فرض چنین بود: میدان الکتریکی متغیر یک میدان مغناطیسی القا می‌کند. با آنکه راهنمای اصلی ما ملاحظه‌های مربوط به تقارن بود، تأییدهای تجربی مستقیم نیز برای آن یافتیم.

در شکل ۳۸ـ۱ (الف) یک خازن را با صفحه‌های موازی دایره‌ای



شکل ۳۸ـ۱ (الف) یک حلقهٔ آمپری سطحی را محصور می‌کند که یک سیم حامل جریان از آن می‌گذرد. (ب) همان حلقهٔ آمپری رویه‌ای را محصور می‌کند که از فضای بین صفحه‌های خازن می‌گذرد. هیچ جریان رسانشی از این رویه نمی‌گذرد.

* جیمز کلارک ماکسول (۱۸۷۹ تا ۱۸۳۱)، فیزیکدان اسکاتلندی، نخستین کسی بود که ساختار ریاضی قانونهای الکترومغناطیس را فراهم آورد. او همچنین مکانیک آماری گازها را گسترش داد و سهم بسیار زیادی در عکس‌برداری رنگی و شناخت حلقه‌های کیوان (زحل) داشت. معادله‌های نظریهٔ الکترومغناطیس به‌صورت امروزی را ماکسول ارائه نکرد، بلکه فیزیکدان انگلیسی، اُلیور هویساید (۱۸۵۰ تا ۱۹۲۵)، که تقارنهای بین $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را در آن معادله‌ها شناسایی کرد، آنها را معرفی کرد.

نشان داده‌ایم. جریان i به صفحهٔ سمت چپ این خازن وارد می‌شود (که فرض می‌کنیم حامل بار مثبت است)، و جریانی با همان مقدار i صفحهٔ سمت راست را ترک می‌کند. در شکل ۳۸ـ۱ (الف) یک حلقهٔ آمپری سیم را احاطه می‌کند و فصل مشترک رویه‌ای را تشکیل می‌دهد که سیم آن را سوراخ کرده است. جریان در سیم میدان مغناطیسی تولید می‌کند؛ در بخش ۳۳ـ۵ دیدیم که میدان مغناطیسی و جریان به‌وسیلهٔ قانون آمپر به‌هم مربوط می‌شوند،

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ i \qquad (۳۸\text{ـ}۵)$$

یعنی، انتگرال خطی میدان مغناطیسی پیرامون حلقه با کل جریانی که از سطح محصور به حلقه می‌گذرد متناسب است.

در شکل ۳۸ـ۱ (ب)، همان حلقهٔ قبلی را داریم ولی سطح محصور به حلقه را چنان کشیده‌ایم که تمامی صفحهٔ طرف چپ خازن را در برگیرد. چون حلقه تغییر نکرده است (و میدان مغناطیسی هم تغییر نکرده است)، قانون آمپر در سمت چپ همان نتیجهٔ قبلی را به‌دست می‌دهد، ولی سمت راست به نتیجهٔ کاملاً متفاوتی می‌انجامد، که برابر صفر است، زیرا هیچ‌گونه سیم رسانایی از آن عبور نمی‌کند. به نظر می‌رسد که قانون آمپر نقض شده است!

برای اینکه قانون آمپر را به وضع اولیه برگردانیم تا وضعیت مطرح‌شده در شکل ۳۸ـ۱ (ب) را به‌درستی توصیف کند، به نتیجه‌گیری بخش قبل که براساس تقارن حاصل شده است، یعنی: میدان الکتریکی متغیر میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند، تکیه می‌کنیم. در اینجا وضعیت شکل ۳۸ـ۱ را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم. وقتی بار الکتریکی به خازن منتقل می‌شود، میدان الکتریکی در فضای داخل خازن با آهنگ معین dE/dt تغییر می‌کند. خطهای میدان الکتریکی از سطح شکل ۳۸ـ۱ (ب) در داخل خازن می‌گذرند؛ این عبور خطهای میدان از این سطح را برحسب شار الکتریکی Φ_E در نظر می‌گیریم، و میدان الکتریکی متغیر باید شار الکتریکی متغیر متناظر با آن، یعنی $d\Phi_E/dt$، را به‌دست دهد.

برای توصیف کمّی این اثر جدید، از مقایسه با قانون القای فاراده، معادلهٔ (۳۸ـ۳)، که مبین آن است که میدان مغناطیسی متغیر (سمت راست) سبب ایجاد میدان الکتریکی (سمت چپ) می‌شود، بهره می‌گیریم. همتای تقارنی این گزاره را به‌صورت زیر می‌نویسیم*

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (۳۸\text{ـ}۶)$$

* سیستم یکاهای SI ایجاب می‌کند که در معادلهٔ (۳۸ـ۶) ثابتهای $\mu_\circ$ و $\epsilon_\circ$ را قرار دهیم. در برخی از سیستم یکاها این ثابتها ظاهر نمی‌شوند.

معادلهٔ (۳۸ـ۶) حاکی از آن است که می‌توان میدان مغناطیسی (سمت چپ) را از میدان الکتریکی متغیر (سمت راست) به‌دست آورد.

وضعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۸ـ۱ (الف) به‌وسیلهٔ قانون آمپر با معادلهٔ (۳۸ـ۵) توصیف می‌شود، در حالی‌که وضعیت نشان داده‌شده در شکل ۳۸ـ۱ (ب) با معادلهٔ (۳۸ـ۶) توصیف می‌شود. در حالت اول، این جریان عبوری از سطح است که میدان مغناطیسی را به‌دست می‌دهد، در صورتی‌که در حالت دوم، تغییر شار الکتریکی گذرنده از سطح است که سبب تولید میدان مغناطیسی می‌شود. به‌طور کلی، باید هر دو راه تولید میدان مغناطیسی؛ یعنی (الف) میدان ناشی از جریان و (ب) میدان تولیدشده توسط شار الکتریکی متغیر را به حساب آوریم، و در نتیجه باید قانون آمپر را به‌صورت زیر اصلاح کنیم:

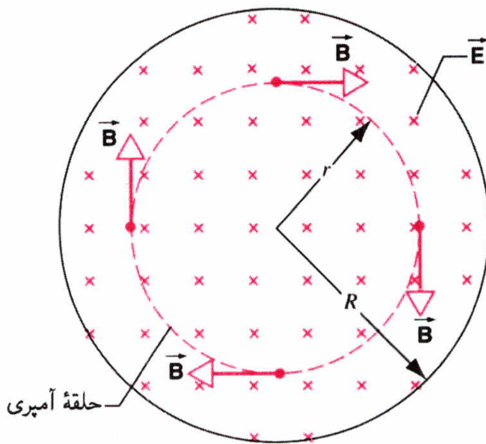
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ i + \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (۳۸\text{ـ}۷)$$

این تعمیم بسیار مهم قانون آمپر، حاصل کار ماکسول است.

در فصل ۳۳ فرض کردیم که هیچ میدان الکتریکی متغیری وجود ندارد و در نتیجه جملهٔ $d\Phi_E/dt$ در معادلهٔ (۳۸ـ۷) برابر با صفر است. در بحث مربوط به شکل ۳۸ـ۱ (ب) فرض کردیم که در فضای حاوی میدان الکتریکی هیچ جریان رسانشی وجود نداشته باشد. به این ترتیب در این حالت جملهٔ $\mu_\circ i$ در معادلهٔ (۳۸ـ۷) صفر است. اکنون می‌بینیم که هرکدام از این دو وضعیت یک حالت خاص هستند. اگر در شکل ۳۸ـ۱ (ب) سیمهای بسیار ظریفی دو صفحه را به هم متصل می‌کردند، هر یک از دو جملهٔ موجود در معادلهٔ (۳۸ـ۷) در برقراری میدان مغناطیسی سهیم بودند.

یک روش دیگر تعبیر معادلهٔ (۳۸ـ۷) را در شکل ۳۸ـ۲ مطرح می‌کند، که در آن میدان الکتریکی موجود بین صفحه‌های خازن شکل ۳۸ـ۱ را نشان می‌دهد. در این ناحیه، حلقهٔ آمپری را مسیر دایره‌ای در نظر می‌گیریم. در طرف راست معادلهٔ (۳۸ـ۷)، جملهٔ شامل i برابر صفر است، ولی جملهٔ مشتمل بر $d\Phi_E/dt$ صفر نیست. در واقع، اگر وضعیت خطهای نیرو به‌صورتی باشد که در شکل نشان داده شد شار عبوری از سطح مثبت است و مقدارش افزایش می‌یابد (که متناظر با افزایش میدان الکتریکی است) زیرا بارهای الکتریکی مثبت به صفحهٔ سمت چپ خازن شکل ۳۸ـ۱ منتقل می‌شود. در این حالت انتگرال خطی $\vec{\mathbf{B}}$ پیرامون حلقه نیز باید مثبت باشد و جهت $\vec{\mathbf{B}}$ باید به‌صورتی باشد که در شکل ۳۸ـ۲ نشان داده‌ایم.

شکل ۳۸ـ۲ مثال زیبایی از تقارن طبیعت مطرح می‌کند. میدان مغناطیسی متغیر میدان الکتریکی القا می‌کند (قانون فاراده)؛ اکنون



شکل ۳۸ـ۲ میدان مغناطیسی القایی $\vec{\mathbf{B}}$ را که به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی متغیر $\vec{\mathbf{E}}$ در فضای داخل خازن شکل ۳۸ـ۱ به‌وجود آمده است در چهار نقطه نشان داده‌ایم. این شکل را با شکل ۳۴ـ۱۵ (ب) مقایسه کنید.

می‌بینیم که میدان الکتریکی متغیر میدان مغناطیسی القا می‌کند. شکل ۳۸ـ۲ را به‌دقت با شکل ۳۴ـ۱۵ (ب)، که تولید میدان الکتریکی توسط میدان مغناطیسی متغیر را نشان می‌دهد، مقایسه کنید. در هر دو مورد شار مربوط یعنی Φ_B یا Φ_E افزایش می‌یابد. ولی، آزمایش نشان می‌دهد که خطهای $\vec{\mathbf{E}}$ در شکل ۳۴ـ۱۵ (ب) پادساعتگردند، در حالی‌که خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ شکل ۳۸ـ۲ ساعتگردند. این تفاوت ایجاب می‌کند که علامت منفی معادلهٔ (۳۸ـ۳) از معادلهٔ (۳۸ـ۶) حذف شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱ یک خازن با صفحه‌های دایره‌ای موازی مطابق شکل ۳۸ـ۱ باردار می‌شود. (الف) عبارتی برای میدان مغناطیسی القایی در شعاعهای مختلف r در ناحیهٔ بین صفحه‌های خازن به‌دست آورید. این عبارت را هم برای $r \leq R$ و هم برای $r \geq R$ در نظر بگیرید. (ب) میدان B را در $r = R$ برای وقتی‌که $dE/dt = ۱۰^{۱۲}\text{V/m}\cdot\text{s}$ و $R = ۵{,}۰\ \text{cm}$ به‌دست آورید.

حل. (الف) از معادلهٔ (۳۸ـ۶) داریم

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt}$$

برای $r \leq R$، مانند شکل ۳۸ـ۲، می‌توان نوشت

$$(B)(۲\pi r) = \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{d}{dt}[(E)(\pi r^۲)] = \mu_\circ \epsilon_\circ \pi r^۲ \frac{dE}{dt}$$

که از حل آن برای B نتیجه می‌گیریم

$$B = \frac{۱}{۲}\mu_\circ \epsilon_\circ r \frac{dE}{dt} \qquad (r \leq R)$$

برای $r \geq R$ از معادلهٔ (۳۸ـ۶)، داریم

$$(B)(۲\pi r) = \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^۲)] = \mu_\circ \epsilon_\circ \pi R^۲ \frac{dE}{dt}$$

یا

$$B = \frac{\mu_\circ \epsilon_\circ R^۲}{۲r} \frac{dE}{dt} \qquad (r \leq R)$$

(ب) در $r = R$، هر دو معادلهٔ بالا برای B به نتیجهٔ واحدی می‌انجامند، یا

$$B = \frac{۱}{۲}\mu_\circ \epsilon_\circ R \frac{dE}{dt}$$
$$= \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۱۰^{-۷}\mathrm{T \cdot m/A})(۸{,}۹ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N \cdot m^۲})$$
$$\times (۵{,}۰ \times ۱۰^{-۲}\mathrm{m})(۱۰^{۱۲}\mathrm{V/m \cdot s})$$
$$= ۲{,}۸ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{T} = ۲۸۰\ \mathrm{nT}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که میدانهای مغناطیسی القایی در این مثال به اندازه‌ای کوچک‌اند که به‌ندرت می‌توان آنها را با ابزارهای ساده اندازه گرفت. درست برخلاف میدانهای الکتریکی القایی (قانون فاراده) که می‌توان آنها را به آسانی تشخیص داد. این اختلاف تجربی تا اندازه‌ای مربوط به این واقعیت است که نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی را به‌سهولت می‌توان با بهره‌گیری از پیچه‌ای که شامل تعداد زیادی دور سیم‌پیچ است، چند برابر کرد. برای میدانهای مغناطیسی هیچ روش سهلی قابل مقایسه با روش بالا وجود ندارد. در آزمایشهایی که در آنها نوسانهای با بسامد بالا دخیل‌اند، dE/dt می‌تواند بسیار بزرگ باشد، که نتیجهٔ آن میدان مغناطیسی القایی بسیار بزرگتر است.

جریان جابه‌جایی

مقایسهٔ معادله‌های (۳۸ـ۵) و (۳۸ـ۶) نشان می‌دهد که جملهٔ $\epsilon_\circ d\Phi_E/dt$ دارای ابعاد جریان است. گرچه هیچ‌گونه جابه‌جایی بار در کار نیست، اما نامگذاری آن به جریان جابه‌جایی* چند امتیاز دارد. جریان جابه‌جایی، i_d، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$i_\mathrm{d} = \epsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (۳۸\text{ـ}۸)$$

* واژهٔ "جابه‌جایی" به دلایل تاریخی مورد استفاده قرار گرفته است. این کاربرد هیچ ربطی به استفادهٔ قبلی ما از واژهٔ جابه‌جایی برای مشخص‌کردن مکان ذره ندارد.

به این ترتیب می‌توانیم بگوییم که میدان مغناطیسی را می‌شود با جریان رسانش i یا با جریان جابه‌جایی i_d تولید و معادلهٔ (۳۸ـ۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ (i + i_\mathrm{d}) \qquad (۳۸\text{ـ}۹)$$

می‌خواهیم جریان جابه‌جایی i_d را در فضای بین صفحه‌های خازن شکل ۳۸ـ۱(ب) محاسبه کنیم. بار روی صفحه‌های خازن یعنی q با میدان الکتریکی درگاف بین صفحه‌ها یعنی E مطابق معادلهٔ (۳۰ـ۳) $(E = \sigma/\epsilon_\circ)$ به‌هم مربوط می‌شوند

$$q = \epsilon_\circ EA$$

مشتق‌گیری از این معادله نتیجه می‌دهد که

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_\circ \frac{d(EA)}{dt}$$

کمیت EA همان شار میدان الکتریکی Φ_E است و در نتیجه داریم

$$i = \epsilon_\circ \frac{d\Phi_E}{dt}$$

مقایسه این معادله با معادلهٔ (۳۸ـ۸) نشان می‌دهد که

$$i = i_\mathrm{d}$$

به این ترتیب، جریان جابه‌جایی درگاف بین صفحه‌های خازن با جریان رسانش در سیمها برابر است.

به این ترتیب مفهوم جریان جابه‌جایی این امکان را فراهم می‌آورد که اعتقاد برپیوستگی جریان را حفظ کنیم، اصلی که برای جریانهای رسانش پایا در بخش ۳۱ـ۱ اثبات شد. به‌عنوان مثال، در شکل ۳۸ـ۱(ب)، جریان رسانش i به صفحهٔ مثبت وارد و از صفحهٔ منفی خارج می‌شود. جریان رسانش درگاف خازن پیوسته نیست زیرا هیچ باری در داخل این گاف انتقال پیدا نمی‌کند. با این همه، جریان جابه‌جایی i_d در داخل گاف دقیقاً برابر با i است و از آن‌رو مفهوم پیوستگی بار را حفظ می‌کند.

وقتی خازن کاملاً پر شد، جریان رسانش به صفر فرو می‌افتد (هیچ جریانی در سیمها وجود ندارد). میدان الکتریکی بین صفحه‌ها ثابت می‌شود و از آن‌رو $dE/dt = ۰$، و در نتیجه جریان جابه‌جایی نیز به صفر کاهش پیدا می‌کند.

جریان جابه‌جایی i_d، که از معادلهٔ (۳۸ـ۸) به‌دست می‌آید هم جهت دارد و هم اندازه. جهت جریان رسانش i همان جهت بردار چگالی جریان رسانش $\vec{\mathbf{j}}$ است. به‌طور مشابه، جهت جریان جابه‌جایی

$i_{\rm d}$ همان جهت بردار چگالی جریان جابه‌جایی $\vec{\mathbf{j}}_{\rm d}$ است همان‌طور که از معادلهٔ (۳۸ـ۸) استنتاج کردیم، برابر $\epsilon_\circ(d\vec{\mathbf{E}}/dt)$ است. به‌کارگیری قاعدهٔ دست راست در مورد $i_{\rm d}$ جهت میدان مغناطیسی مربوط به آن را به‌دست می‌دهد، درست همان‌طور که جریان رسانش i جهت میدان مغناطیسی را مشخص می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۲ جریان جابه‌جایی برای وضعیت توصیف‌شده در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱ چقدر است؟

حل. از معادلهٔ (۳۸ـ۸)، یعنی تعریف جریان جابه‌جایی، داریم

$$i_{\rm d}=\epsilon_\circ\frac{d\Phi_E}{dt}=\epsilon_\circ\frac{d}{dt}[(E)(\pi R^{۲})]=\epsilon_\circ\pi R^{۲}\frac{dE}{dt}$$

$$=(۸{,}۹\times۱۰^{-۱۲}\,{\rm C^۲/N\cdot m^۲})(\pi)(۵\times۱۰^{-۲}\,{\rm m})^{۲}(۱۰^{۱۲}\,{\rm V/m\cdot s})$$

$$=۰{,}۰۷۰\ {\rm A}=۷۰\ {\rm mA}$$

این جریان، نسبتاً بزرگ است، با این همه در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱ دیدیم که این جریان یک میدان مغناطیسی تولید می‌کند که شدت آن فقط ۲۸۰ nT است. عبور جریانی به شدت ۷۰ mA از یک رشته سیم نازک در نزدیکی سطح آن یک میدان مغناطیسی قوی تولید می‌کند که می‌توان آن را به‌آسانی با قطب‌نما آشکار ساخت.

این اختلاف ناشی از این نیست که یکی از این دو جریان، جریان رسانشی و دیگری جریان جابه‌جایی است. در شرایط یکسان، هر دو نوع جریان به یک اندازه در تولید میدان مغناطیسی مؤثرند. اختلاف، ناشی از آن است که، در این حالت، جریان رسانش به یک سیم رسانش محدود است ولی جریان جابه‌جایی در سطحی به اندازهٔ سطح صفحه‌های خازن توزیع شده است. به این ترتیب خازن مثل یک "سیم چاق" به شعاع ۵ cm عمل می‌کند که حامل یک جریان (جابه‌جایی) به شدت ۷۰ mA است. بیشترین اثر مغناطیسی، که در لبهٔ خازن پدید می‌آید، بسیار کوچکتر از چیزی است که در سطح سیم نازک تولید می‌شود. (مسئلهٔ ۲ را نیز ببینید.)

۳۸ـ۳ معادله‌های ماکسول

با افزودن جملهٔ مربوط به میدان مغناطیسی القایی (ناشی از جریان جابه‌جایی) در قانون آمپر، چهار معادلهٔ بنیادی و اصلی نظریهٔ الکترومغناطیس، که به معادله‌های ماکسول شهرت دارند، اکنون کامل می‌شود. این معادله‌ها در جدول ۳۸ـ۱ خلاصه شده‌اند. در این جدول آزمایشهای قاطعی را که به هر یک از معادله‌ها منجر شده است درج کرده‌ایم. این فهرست نشان می‌دهد که معادله‌های ماکسول پیش‌بینیهای نظری صرف نیستند؛ بلکه، برای توجیه نتایج تجربه‌های آزمایشگاهی به‌وجود آمده‌اند.

جنبه‌های متفاوتی از این معادله‌های بسیار شگفت‌آور را باید مورد بررسی قرار دهیم.

۱. تقارن. واردکردن جملهٔ مربوط به جریان جابه‌جایی بدون شک سبب می‌شود که معادله‌های III و IV در جدول ۳۸ـ۱ شباهت بیشتری به‌هم پیدا کنند و در نتیجه تقارن معادله‌ها بهبود می‌یابد. اگر وجود تک‌بارهای مغناطیسی (تک‌قطبیهای مغناطیسی) به اثبات برسد، معادله‌ها باز هم شباهت بیشتری به‌هم پیدا می‌کنند. اگر $q_{\rm m}$ معرف "بار مغناطیسی" باشد، در آن صورت می‌توانیم قانون گاؤس برای مغناطیس را به‌صورت $\oint\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}=\mu_\circ q_{\rm m}$ بنویسیم. این معادله نشان می‌دهد که شار مغناطیسی گذرنده از هر سطح بسته‌ای با بار مغناطیسی خالص موجود در داخل سطح متناسب است. در این حالت معادله‌های I و II متقارنتر خواهند شد.

اگر بتوانیم باریکه‌ای از این بارهای مغناطیسی را به‌صورت جریان مغناطیسی $i_{\rm m}=dq_{\rm m}/dt$ در آوریم، آنگاه می‌توانیم یک جمله به طرف راست معادلهٔ III بیفزاییم که نشان می‌دهد جریان مغناطیسی می‌تواند میدان الکتریکی ایجاد کند (البته فرض می‌کنیم که آزمایشهای ما وجود بارها و جریانهای مغناطیسی را تأیید کرده باشد). این عمل سبب می‌شود که معادله‌های III و IV تقارن بیشتری پیدا کنند.

تاکنون هیچ دلیل قاطعی بر وجود تک‌قطبیهای مغناطیسی به‌دست نیامده است. با این همه، اگر قرار باشد که روزی آنها کشف شوند، اصلاح معادله‌های ماکسول برای منظورکردن اثر آنها، تلاش اندکی طلب می‌کند.

۲. موجهای الکترومغناطیسی. این چهار معادله را به‌طور جداگانه پیش از عصر ماکسول می‌شناختند و بجز جریان جابه‌جایی هیچ پیش‌بینی جدیدی از هیچ‌یک از معادله‌ها به‌صورت منفرد حاصل نمی‌شود. در بخش بعد نشان خواهیم داد که وقتی این معادله‌ها را با هم ترکیب کنیم، پیش‌بینی جدیدی حاصل می‌شود ــ وجود موجهای الکترومغناطیسی و مقداری برای سرعت آنها (سرعت سیر نور). این موجها توسط ماکسول پیش‌بینی و ۱۵ سال پس از انتشار نظریهٔ ماکسول، در سال ۱۸۸۸ توسط هاینریش هرتز کشف شدند. بعداً در همین فصل نشان خواهیم داد که این پیش‌بینی از معادله‌های ماکسول حاصل می‌شود.

جدول ۳۸ـ۱ معادله‌های بنیادی نظریهٔ الکترومغناطیس (معادله‌های ماکسول)[الف]

شماره	نام	معادله	توصیف‌کنندهٔ	آزمایش قاطع	فصل مرجع
I	قانون گاؤس در الکتریسیته	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q/\epsilon_\circ$	بار و میدان الکتریکی	(الف) بارهای همنام یکدیگر را می‌رانند و بارهای غیرهمنام همدیگر را می‌ربایند، این عمل با عکس مجذور فاصلهٔ آنها متناسب است. (ب) بار واقع بر رسانای عایق‌بندی‌شده روی سطح خارجی آن قرار می‌گیرد.	۲۷
II	قانون گاؤس در مغناطیس	$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \circ$	میدان مغناطیسی	خطهای میدان مغناطیسی حلقه‌های بسته‌ای تشکیل می‌دهند؛ تاکنون هیچ گواهی دال بر وجود تک‌قطبی مغناطیسی به‌دست نیامده است.	۳۵
III	قانون القای فاراده	$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -d\Phi_B/dt$	اثر الکتریکی میدان مغناطیسی متغیر	اگر یک آهنربای میله‌ای را از داخل یک حلقهٔ رسانای بسته بگذرانیم، جریان در حلقه برقرار می‌شود.	۳۴
IV	قانون آمپر (به‌صورتی که توسط ماکسول بسط داده شد)	$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ i + \mu_\circ \epsilon_\circ d\Phi_E/dt$	اثر مغناطیسی جریان یا یک میدان الکتریکی متغیر	(الف) جریان در یک سیم میدان مغناطیسی در نزدیکی سیم ایجاد می‌کند.	۳۳
				(ب) سرعت سیر نور را می‌توان از اندازه‌گیریهای صرفاً الکترومغناطیسی محاسبه کرد.	۳۸

الف) این معادله‌ها با این فرض نوشته شده‌اند که هیچ مادهٔ دی‌الکتریکی یا مغناطیسی وجود ندارد.

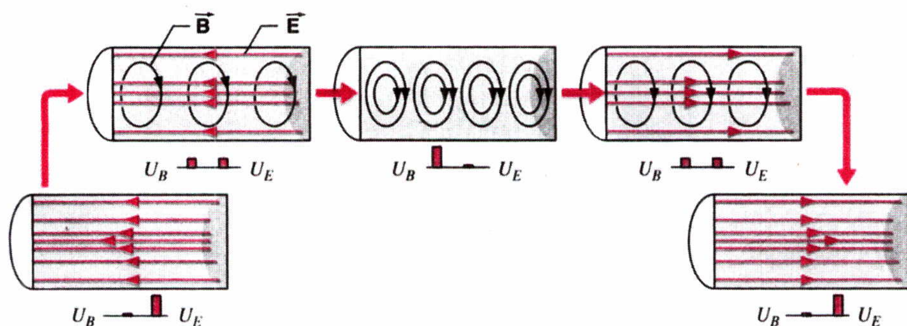
۳. الکترومغناطیس و نسبیت. آنچه دربارهٔ معادله‌های ماکسول شگفت‌آور است آن است که آنها کاملاً با نظریهٔ نسبیت خاص سازگارند. برعکسِ قانونهای نیوتون در مکانیک که برای سرعتهای نزدیک به سرعت سیر نور نیاز به تغییرات اساسی دارند، معادله‌های ماکسول برای تمام ناظرها، صرف‌نظر از اینکه سرعت نسبی آنها چقدر است، یکسان باقی می‌مانند. در واقع، کشف نسبیت توسط اینشتین مستقیماً از تفکرش دربارهٔ قانونهای الکترومغناطیس و معادله‌های ماکسول سرچشمه گرفت.

نوسانهای کاواک (اختیاری)

مواد فراوانی وجود دارند که در آنها معادله‌های ماکسول درک و شناختی نظری از یک وسیلهٔ کاربردی یا پدیده را به‌دست می‌دهند. یک مورد خاص از این کاربرد کاواک، فلزی حاوی میدانهای نوسانی الکتریکی و مغناطیسی است.

کاواک نوسانگر الکترومغناطیسی از بسیاری جهتها شبیه کاواک نوسانگر آکوستیکی، مانند لولهٔ بستهٔ اُرگ است. وقتی که لوله با یک آشفتگی خارجی به نوسان در می‌آید، می‌توانیم یک موج ایستاده با نوسانهایی در چگالی و سرعت مولکولهای هوا ایجاد کنیم، به‌طوری که انرژی آکوستیکی در لوله بین انرژی پتانسیل وابسته به حالتهای تراکم و رقت گاز و انرژی جنبشی گاز متحرک نوسان می‌کند.

کاواک بازآواگر الکترومغناطیسی به‌صورتی مشابه رفتار می‌کند، بجز آنکه در اینجا، انرژی بین میدانهای مغناطیسی و الکتریکی در یک موج ایستادهٔ الکترومغناطیسی نوسان می‌کند. شکل ۳۸ـ۳ نمودی از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در یک نیم‌چرخهٔ نوسان نشان می‌دهد. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در تمامی حجم کاواک حضور دارند. چگالیهای انرژی در هر نقطه‌ای از فضای درون کاواک با معادله‌های (۳۰ـ۲۸) (یعنی $u_E = ۱/۲\epsilon_\circ E^۲$) و ۳۶ـ۲۲



شکل ۳۸ـ۳ یک نیم‌چرخهٔ نوسان در کاواک الکترومغناطیسی. نمودارهای ستونی زیر هر شکل انرژی ذخیره‌شدهٔ الکتریکی U_E و مغناطیسی U_B را نشان می‌دهد. خطهای $\vec{\mathbf{E}}$ موازی با محور کاواک، و خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ دایره‌های هم‌مرکزی هستند که مرکزشان روی محور قرار دارد.

(یعنی $u_B = B^2/2\mu_0$) داده شده‌اند، و انرژیهای ذخیره‌شدهٔ کل با انتگرال‌گیری روی تمامی حجم کاواک به‌دست می‌آید.

می‌توانیم دو انتهای تخت کاواک را دو صفحهٔ یک خازن در نظر بگیریم که به‌طور لحظه‌ای بارهای $+q$ و $-q$ روی آنها قرار گرفته‌اند و میدان الکتریکی نشان داده‌شده در شکل ۳۸ـ۳ را برقرار می‌کنند. همزمان با نوسان کاواک، بارها در امتداد دیوارهٔ رسانا حرکت کرده جهت میدان را برعکس می‌کنند.

اگر در کاواک یک مسیر دایره‌ای در صفحه‌ای موازی با صفحه‌های انتهایی اختیار کنیم، شار الکتریکی گذرنده از سطح محصور توسط این مسیر دایره‌ای تغییر می‌کند. این شار الکتریکی متغیر سبب ایجاد یک میدان مغناطیسی مماس بر دایره می‌شود، که ناشی از جمله‌ای است که ماکسول به قانون آمپر افزود. به‌صورتی هم‌ارز، می‌توان چنین تصور کرد که جریان جابه‌جایی در داخل فضای کاواک (به موازات خطهای میدان الکتریکی) جاری می‌شود و این جریان جابه‌جایی سبب برقراری خطهای میدان مغناطیسی دایره‌ای می‌شوند، به همان صورتی‌که جریانهای معمولی در سیمهای مستقیم عمل می‌کنند.

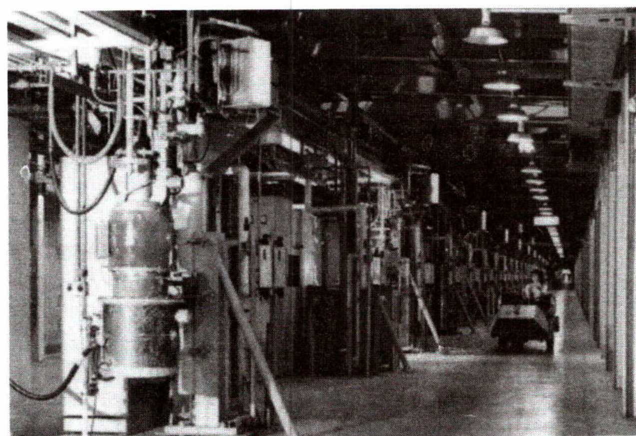
اگر در عوض، یک مسیر مستطیل‌شکل در صفحهٔ خطهای میدان الکتریکی اختیار کنیم، قانون فاراده نشان می‌دهد که میدان الکتریکی روی آن مسیر به آهنگ تغییر شار مغناطیسی گذرنده از مستطیل بستگی دارد. در نتیجه، دو پاسخ از معادله‌های ماکسول را به‌دست می‌آوریم:

$$E \propto \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{و} \quad B \propto \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (۳۸\text{ـ}۱۰)$$

توجه کنید که میدان B وقتی به بیشینهٔ مقدارش می‌رسد که میدان الکتریکی با تندترین آهنگ تغییر کند، این حالت وقتی رخ می‌دهد که $E = 0$ است، یعنی، وقتی که میدان الکتریکی تغییر جهت می‌دهد. به‌صورتی مشابه، E وقتی بیشینه است که $B = 0$.

معادله‌های (۳۸ـ۱۰)، وابستگی میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ به همدیگر را در داخل یک کاواک نشان می‌دهند. میدان الکتریکی متغیر میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد، و میدان مغناطیسی متغیر سبب ایجاد میدان الکتریکی می‌شود. نوسانهای $\vec{\mathbf{E}}$ میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌وجود می‌آورند و نوسانهای $\vec{\mathbf{B}}$ میدان $\vec{\mathbf{E}}$ را ایجاد می‌کنند. به این ترتیب، میدانهای نوسانی همدیگر را حفظ می‌کنند، و همین که نوسان ایجاد شد، اگر به خاطر اتلاف مقاومتی در دیواره‌های کاواک یا نشت انرژی از طریق سوراخهای موجود در کاواک نبود، تا ابد ادامه می‌یافت. یک جفت‌شدگی متقابل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در موجهای الکترومغناطیسی رونده رخ می‌دهد، که این موجها را بعداً در همین فصل مطالعه خواهیم کرد.

کاواکهای نوسان‌کننده مانند آنچه در اینجا توصیف کردیم، اساس مگنترون را تشکیل می‌دهند، که در خلال دههٔ ۱۹۴۰ به‌عنوان مولد تابش میکروموجی مورد استفاده در رادار، به خدمت گرفته شدند. وسیلهٔ دیگری که اساس آن را کاواک تشکیل می‌داد کلایسترون بود که از آن، جهت تقویت سیگنالهای راداری بازتاب‌شده استفاده می‌شد. (اگر موجها در داخل یک کاواک کلایسترون با سرعت نور حرکت کنند، می‌توانید برآورد کنید که در یک کاواک با طول چند سانتی‌متر، موجها دارای دورهٔ تناوبی در حدود $10^{-10}\,\text{s}$ خواهند شد که متناظر با بسامد $10\,\text{GHz}$ است.) یک مورد استفادهٔ متداول کلایسترون، بهره‌گیری از آنها در شتابدهنده‌هایی است که باریکه‌هایی از ذرات باردار با انرژی بالا تولید می‌کنند. در شکل ۳۸ـ۴ فضای داخل شتابدهندهٔ بیش از سه کیلومتری (دو مایلی) الکترون استانفورد را نشان داده‌ایم، که در آن صدها کاواک بازآواگر پی‌درپی برای رساندن انرژی الکترونها به $50\,\text{GeV}$ مورد استفاده قرار گرفته‌اند.



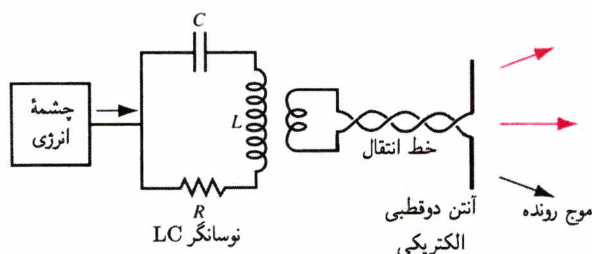
شکل ۳۸ـ۴ فضای داخلی شتابدهندهٔ خطی ۲٫۳ کیلومتری استانفورد. استوانهٔ بزرگ قائم نشان داده‌شده در شکل یکی از چندین صدکاواک بازآواگر الکترومغناطیسی (کلایسترون) است که میدانهای الکتریکی مورد نیاز برای شتاب‌دادن الکترونها را تأمین می‌کند. هر یک از کلایسترونها توان قلهٔ ۶۷ MW را تأمین می‌کند.

۳۸ـ۴ تولید موج الکترومغناطیسی

موجهای الکترومغناطیسی به‌وسیلهٔ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی‌شان انرژی یا تکانه را از یک نقطه از فضا به نقطه‌های دیگر حمل می‌کنند. قبل از اینکه به توصیف ریاضی موجهای الکترومغناطیسی بپردازیم، می‌خواهیم دربارهٔ برخی از خواص عمومی که احتمالاً از این موجها انتظار داریم بحث کنیم.

انتظار داریم که چه نوع آرایشی از بارها و جریانها موج الکترومغناطیسی ایجاد کند؟ یک بار الکتریکی ساکن طرحی از خطهای میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. یک بار الکتریکی متحرک با سرعت ثابت علاوه بر خطهای میدان الکتریکی طرحی از خطهای میدان مغناطیسی به‌وجود می‌آورد. وقتی حالت پایا برقرار باشد (یعنی، پس از آنکه بار به حرکت در آمد و میدانها در فضا برقرار شدند)، در فضا یک چگالی انرژی وابسته به میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وجود دارد، ولی چگالی انرژی برحسب زمان ثابت می‌ماند. هیچ سیگنالی، به غیر از آنچه دال بر وجود آن است، از بار الکتریکی به نقطه‌های دوردست منتقل نمی‌شود، هیچ انتقال انرژی یا تکانه‌ای در کار نیست و هیچ تابش الکترومغناطیسیی وجود ندارد.

از طرف دیگر، اگر بار الکتریکی را پس و پیش می‌کردید می‌توانستید سیگنالهایی را به یک دوست که در فاصلهٔ زیادی از شما قرار دارد و مجهز به تجهیزات ضروری جهت آشکارسازی تغییرات میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است، ارسال کنید. با یک رمز از پیش تنظیم‌شده، می‌توانید با حرکت دادن بار الکتریکی با یک آهنگ معین یا در یک جهت مشخص

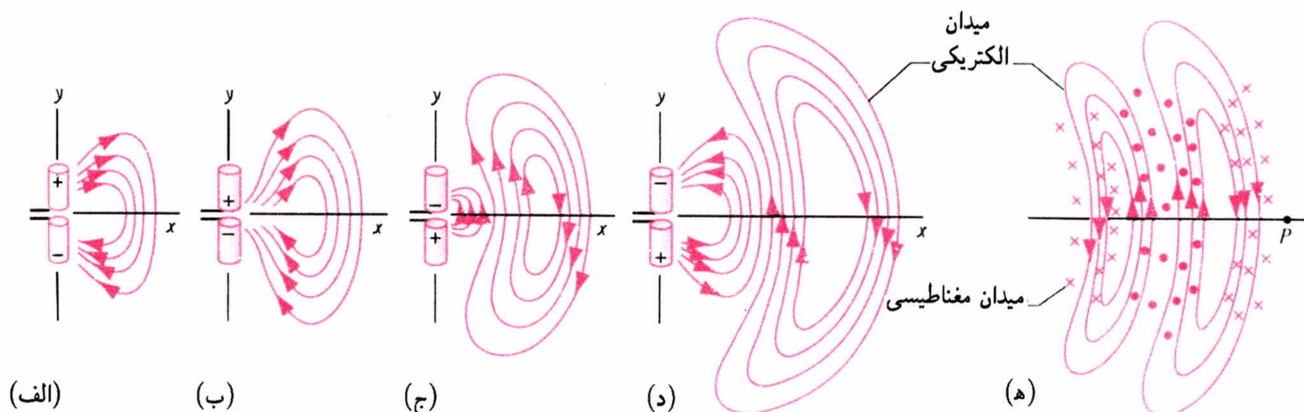


شکل ۳۸ـ۵ آرایشی برای تولید موج الکترومغناطیسی رونده.

اطلاعات را ارسال کنید. در این حالت، به‌وسیلهٔ موج الکترومغناطیسی علامت می‌دهید. برای تولید این موج، باید بار الکتریکی را شتاب دهید. یعنی، بارهای ساکن و بارهایی که با سرعت ثابت در حرکت‌اند تابش نمی‌کنند؛ بارهای شتابدار تابش می‌کنند. به عبارت دیگر، حرکت یکنواخت بار، معادل جریانی است که برحسب زمان تغییر نمی‌کند و حرکت شتابدار متناظر با جریانی است که برحسب زمان تغییر می‌کند؛ به این ترتیب می‌توان تصور کرد که تابش را جریانهای متغیر در زمان به‌وجود می‌آورند.

یک روش مناسب برای تولید موج الکترومغناطیسی در آزمایشگاه آن است که جریان در سیمها را برحسب زمان تغییر دهیم. برای سادگی تغییر زمانی را سینوسی در نظر می‌گیریم. در شکل ۳۸ـ۵ مداری نشان داده‌ایم که می‌توان از آن برای این منظور استفاده کرد. این مدار تشکیل شده است از یک مدار نوسان‌کنندهٔ RLC، همراه با یک چشمهٔ خارجی برای تأمین انرژیی که در مدار تلف یا به‌وسیلهٔ تابش منتقل می‌شود. جریان در مدار به‌صورت سینوسی و با بسامد زاویه‌ای تشدیدی ω تغییر می‌کند. اگر اتلاف در مقاومت کم باشد این بسامد زاویه‌ای تشدیدی تقریباً برابر با $1/\sqrt{LC}$ است (بخش ۳۶ـ۷ را ببینید). این نوسانگر از طریق مبدل به یک خط انتقال می‌پیوندد، که کار رساندن جریان به آنتن را به عهده دارد. [کابلهای هم‌محور، که حامل سیگنالهای TV به بسیاری از خانه‌ها هستند، نمونه‌های متداول خطوط انتقال‌اند.]

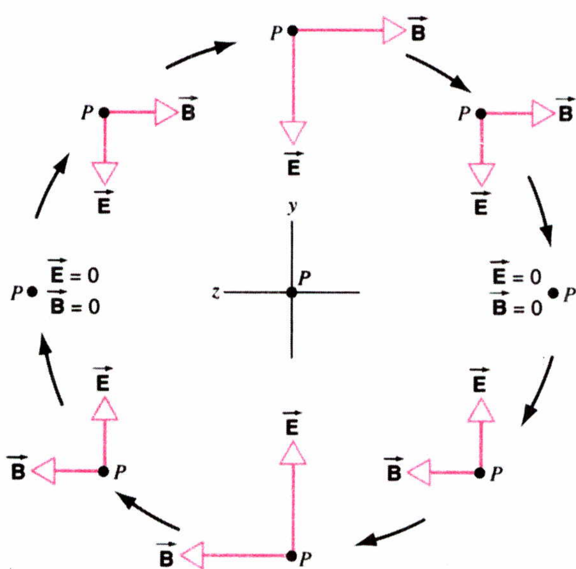
شکل هندسی آنتن ویژگیهای هندسی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تابیده‌شده را مشخص می‌کند. در اینجا یک آنتن دوقطبی را بررسی می‌کنیم که، مطابق شکل ۳۸ـ۵، می‌توان آن را متشکل از دو قطعه رسانای مستقیم در نظر گرفت. بارها به کمک نوسانگر در این دو قطعه رسانا با بسامد ω به عقب و جلو حرکت می‌کنند. می‌توانیم آنتن را دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده‌ای در نظر بگیریم، که یک شاخهٔ آن حامل بار لحظه‌ای q و شاخهٔ دیگر حامل بار $-q$ است. بار q



شکل۳۸ـ۶ مرحله‌های پی‌درپی گسیل موج الکترومغناطیسی از آنتن دوقطبی. در شکلهای (الف) تا (د) فقط طرحهای میدان الکتریکی را نشان داده‌ایم. در شکل (هـ) میدان مغناطیسی را عمود بر صفحهٔ شکل نشان داده‌ایم.

برحسب زمان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند و در هر نیم‌چرخه تغییر علامت می‌دهد. بارها به هنگام عقب و جلو رفتن در آنتن قطعاً شتاب می‌گیرند و در نتیجه آنتن چشمهٔ تابش دوقطبی الکتریکی است. در هر نقطه‌ای از فضا میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وجود دارند که به‌طور سینوسی با زمان تغییر می‌کنند.*

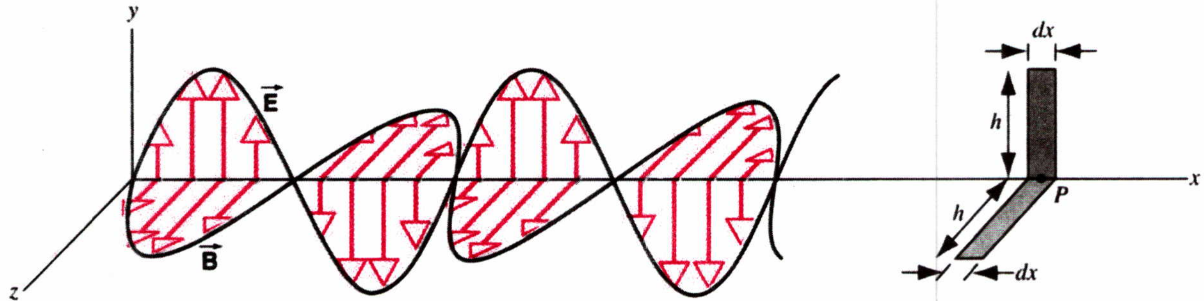
در شکل۳۸ـ۶ یک سری "تصویر لحظه‌ای" را نشان داده‌ایم که طرحی اجمالی از چگونگی تشکیل میدان تابشی را مشخص می‌کند. خطهای میدان الکتریکی را می‌توان از موقعیت بارهای مثبت و منفی دوقطبی استنتاج کرد؛ میدان مغناطیسی متناظر با آن را، که در شکل۳۸ـ۶(هـ) نشان داده شده است، می‌توان از جریان در رساناها و بهره‌گیری از قاعدهٔ دست راست، مشخص کرد. این شکل برشی در صفحهٔ xy است؛ برای دستیابی به تصویر کاملتری از میدان باید تصور کنیم که این شکل حول محور y می‌چرخد. فرض می‌کنیم که میدان را از فاصله‌های دوری که در مقایسه با ابعاد دوقطبی و در مقایسه با طول موج تابش بزرگ است مشاهده کنیم؛ میدانی را که در این شرایط مشاهده می‌شود میدان تابش می‌نامیم. در فاصله‌های کمتر شاهد میدان نزدیک پیچیده‌تری هستیم که اینجا دربارهٔ آن صحبت نمی‌کنیم. توجه کنید که میدان از آنتن "جدا می‌شود" و حلقه‌های بسته‌ای را به‌وجود می‌آورد، که برخلاف میدان ایستای دوقطبی الکتریکی است، که در آن خطهای میدان همواره از بارهای مثبت شروع و به بارهای منفی ختم می‌شود.



شکل ۳۸ـ۷ هشت "تصویر لحظه‌ای" پیاپی از موج الکترومغناطیسی تختی که از دوقطبی نوسان‌کننده شکل۳۸ـ۶ تابیده و در نقطهٔ P مشاهده شده است. جهت حرکت موج رونده (راستای x شکل۳۸ـ۶) به طرف خارج از صفحهٔ شکل است. خطهای میدان $\vec{E}$ عمودی و خطهای میدان $\vec{B}$ افقی‌اند.

دیدگاه معادل دیگری از میدان تابش در شکل۳۸ـ۷ ارائه شده است، که رشته‌ای از "تصویرهای لحظه‌ای" میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را که از کنار ناظر مستقر در P واقع بر محور x در شکل۳۸ـ۶ می‌گذرند نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم ناظر به اندازه‌ای از دوقطبی دور است که می‌تواند جبهه‌های موج را تخت در نظر بگیرد. مطابق معمول، چگالی خطهای میدان نمایانگر شدت میدان است. به‌خصوص، توجه کنید که (۱) میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ همفازند (هر دوی آنها در یک لحظه به بیشینهٔ مقدارشان می‌رسند و به‌طور همزمان صفر می‌شوند)

* اغلب تابشهایی که با آنها مواجه می‌شویم، از موجهای رادیویی تا نور، تا پرتوهای x و پرتوهای گاما، از نوع دوقطبی هستند. آنتنهای رادیو و تلویزیون معمولاً برای انتشار تابش دوقطبی طراحی شده‌اند. از دیدگاه گسیل تابش، تک‌تک اتمها و هسته‌ها را اغلب می‌توان دوقطبیهای نوسان‌کننده درنظر گرفت.



شکل۳۸ـ۸ "تصویر لحظه‌ای" یک موج رونده الکترومغناطیسی در امتداد محور x. این موج به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند. موج را هنگامی مورد توجه قرار می‌دهیم که از نقطهٔ P می‌گذرد. طول بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ فقط تغییرات فضایی آنها را در نقطه‌های مختلف روی محور x نشان می‌دهد. طول مطلق بردارها اختیاری است.

و (۲) میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ بر یکدیگر عمودند. این نتیجه‌گیریها پیامد تحلیل موجهای الکترومغناطیسی رونده در فضای آزاد با بهره‌گیری از معادله‌های ماکسول هستند که در بخش بعدی بررسی می‌کنیم.

۳۸ـ۵ موجهای رونده و معادله‌های ماکسول

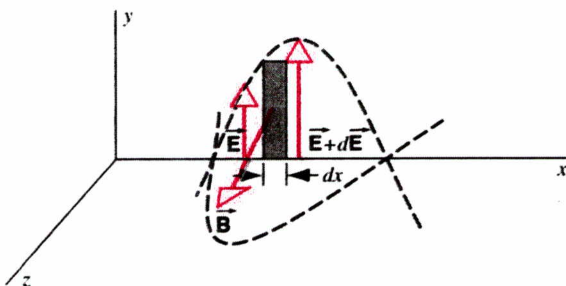
در بخش پیشین تصویری کیفی از نوع موج روندهٔ الکترومغناطیسی ارائه دادیم. در این بخش توصیف ریاضی این موج را مورد توجه قرارداده نشان می‌دهیم که با معادله‌های ماکسول سازگار است. در انجام این کار، همچنین نشان می‌دهیم که سرعت این موجها در فضای تهی با سرعت سیر نور برابر است، که به این نتیجه‌گیری می‌انجامد که نور خود یک موج الکترومغناطیسی است.

فرض کنید که ناظر واقع در نقطهٔ P شکل۳۸ـ۶ در چنان فاصلهٔ دوری از دوقطبی نوسان‌کننده قرار دارد که جبهه‌های موجی که از نقطهٔ P (نشان داده‌شده در شکل۳۸ـ۷) می‌گذرند، تخت هستند. خطهای میدان $\vec{\mathbf{E}}$ با محور y و خطهای میدان $\vec{\mathbf{B}}$ با محور z موازی‌اند. میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌صورت متداول ریاضی یک موج سینوسی رونده می‌نویسیم (بخش۱۸ـ۳ را ببینید):

$$E(x,t) = E_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t) \quad (۳۸ـ۱۱)$$

$$B(x,t) = B_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t) \quad (۳۸ـ۱۲)$$

که در اینجا ω بسامد زاویه‌ای مربوط به دوقطبی نوسان‌کننده است و عدد موج k نیز معنی متداول خود، یعنی $2\pi/\lambda$، را دارد. اگر موج با سرعت فاز c انتشار یابد، ω و k با رابطهٔ $c = \omega/k$ به‌هم مربوط می‌شوند. شکل۳۸ـ۸ نوسان سینوسی میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ را برحسب x در یک لحظهٔ مشخص از زمان نشان می‌دهد. در این موج تخت،



شکل ۳۸ـ۹ جزییات مربوط به نوار عمودی شکل۳۸ـ۸، هنگامی که موج از این نوار عبور می‌کند.

همین تغییرهای میدانهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ در امتداد هر خط دیگری که به موازات محور x باشد روی می‌دهد؛ یعنی میدانها در هر نقطه‌ای روی محور x همان میدانهای موجود در صفحه‌ای هستند که در آن نقطه بر محور x عمود شده‌اند.

بعداً نشان خواهیم داد که دامنه‌های E_{m} و B_{m} به یکدیگر وابسته‌اند. توجه کنید که در نوشتن این معادله‌ها برای اندازهٔ بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ فرض کرده‌ایم که E و B همفازند؛ یعنی، ثابت فاز معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) مقداری یکسان است (که در اینجا این ثابت را صفر اختیار کرده‌ایم). بعداً نشان خواهیم داد که این انتخاب از معادله‌های ماکسول نتیجه می‌شود.

اکنون جزییات موج را وقتی که از دو نوار مستطیل‌شکل در نقطهٔ P شکل۳۸ـ۸ می‌گذرد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. ارتفاع هر یک از این نوارها h و پهنای آنها dx است؛ یک نوار در صفحهٔ xy قرار دارد (یعنی، صفحهٔ $\vec{\mathbf{E}}$) و دیگری در صفحهٔ xz (صفحهٔ $\vec{\mathbf{B}}$).

نخست نوار موجود در صفحهٔ xy را مورد بررسی قرار می‌دهیم که جزییات آن در شکل۳۸ـ۹ نشان داده شده است. وقتی که موج از این نوار می‌گذرد، خطهای میدان $\vec{\mathbf{E}}$ با ضلع بلند این نوار موازی

و خطهای میدان $\vec{\mathbf{B}}$ بر سطح نوار عمودند. بنابر قانون فاراده، وقتی موجها می‌گذرند، شار گذرنده از سطح مستطیل‌شکل تغییر می‌کند و سبب ایجاد یک میدان الکتریکی القایی پیرامون این سطح می‌شود. این میدان الکتریکی القاشده همان میدان الکتریکی مربوط به موج رونده است.

این نوار را در لحظه‌ای در نظر می‌گیریم که در شکل ۳۸ـ۹ نشان داده شده است. وقتی که موج به طرف راست می‌رود، شار مغناطیسی برحسب زمان کاهش پیدا می‌کند زیرا میدان $\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به موجی که وارد نوار می‌شود ضعیفتر است. میدان القاشدهٔ $\vec{\mathbf{E}}$ باید با این تغییر مخالفت کند، یعنی اگر فرض کنیم مرز مستطیل هاشورخورده یک حلقهٔ جریان باشد، یک جریان القایی پادساعتگرد در آن پدید می‌آید. این جریان سبب القای یک میدان مغناطیسی می‌شود که در داخل مستطیل به طرف خارج از صفحهٔ شکل است. البته در آنجا هیچ حلقهٔ جریانی وجود ندارد، ولی بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ نشان داده‌شده در شکل ۳۸ـ۹ با این توضیح سازگار است، زیرا میدان الکتریکی قوی‌تر در طرف راست حلقه سبب ایجاد یک جریان خالص پادساعتگرد می‌شود.

با بهره‌گیری از قانون فاراده، $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -d\Phi_B/dt$، ابتدا باید انتگرال $\vec{\mathbf{E}}$ را گرداگرد حلقه به‌دست آوریم. انتگرال را با چرخش پادساعتگرد روی محیط حلقه محاسبه می‌کنیم. شاخه‌های بالایی و پایینی مستطیل هیچ سهمی در انتگرال ندارند زیرا در این شاخه‌ها $\vec{\mathbf{E}}$ و $d\vec{\mathbf{s}}$ برهم عمودند. در این صورت انتگرال چنین می‌شود

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (E + dE)h - Eh = dE\, h$$

شار مغناطیسی Φ_B گذرنده از مستطیل عبارت است از*

$$\Phi_B = (B)(dx\, h)$$

که در اینجا B اندازهٔ بردار $\vec{\mathbf{B}}$ در نوار مستطیل‌شکل و $dx\, h$ مساحت این نوار است. با مشتق‌گیری از این رابطه داریم

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = h\, dx \frac{dB}{dt}$$

از قانون فاراده، معادلهٔ (۳۸ـ۳)، داریم

$$dE\, h = -h\, dx \frac{dB}{dt}$$

* برای تعیین علامت شار از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم. اگر انگشتان دست راست را در جهتی قرار دهیم که در آن جهت حول مسیر انتگرال‌گیری می‌کنیم، در آن‌صورت شست دست راست جهتی را مشخص می‌کند که میدان عبوری از سطح محصور، شار مثبتی به‌دست می‌دهد.

یا

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt} \qquad (۳۸\text{ـ}۱۳)$$

در واقع، هر تابع B و E تابعهای متغیرهای x و t هستند (معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) را ببینید). در محاسبهٔ dE/dx، فرض می‌کنیم t ثابت است زیرا شکل ۳۸ـ۹ یک "تصویر لحظه‌ای آنی" است. همچنین، در محاسبهٔ dB/dt فرض می‌کنیم x ثابت باشد، زیرا آنچه مورد نیاز است، همان آهنگ تغییر B در یک موقعیت مکانی مشخص، یعنی نوار در شکل ۳۸ـ۹، است. مشتقهایی که در این شرایط گرفته می‌شوند مشتقهای جزئی* هستند، و نمادگذاری متفاوتی برای آنها به‌کار می‌بریم؛ به‌عنوان مثال، بخشهای ۱۸ـ۳ و ۱۸ـ۵ را ببینید. در این نمادگذاری معادلهٔ (۳۸ـ۱۳) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (۳۸\text{ـ}۱۴)$$

علامت منفی در این معادله مناسب و لازم است، زیرا با آنکه E در محل نوار هاشورخوردهٔ شکل ۳۸ـ۹ برحسب x افزایش پیدا می‌کند، B برحسب t کاهش می‌یابد. چون $E(x,t)$ و $B(x,t)$ معلوم هستند (معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) را ببینید)، معادلهٔ (۳۸ـ۱۴) را می‌توان به این صورت نوشت

$$kE_{\rm m}\cos(kx - \omega t) = \omega B_{\rm m}\cos(kx - \omega t)$$

اگر در معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) ثابتهای فاز را متفاوت اختیار می‌کردیم، در آن‌صورت جمله‌های کسینوسی در این معادله غیرهمفاز می‌شدند و امکان نداشت که برای تمام xها و tها دو طرف این معادله با هم برابر شوند. معادلهٔ (۳۸ـ۱۴)، که مستقیماً از معادله‌های ماکسول به‌دست می‌آید نشان می‌دهد که E و B باید همفاز باشند.

با حذف جملهٔ کسینوسی از طرفین معادلهٔ بالا می‌رسیم به:

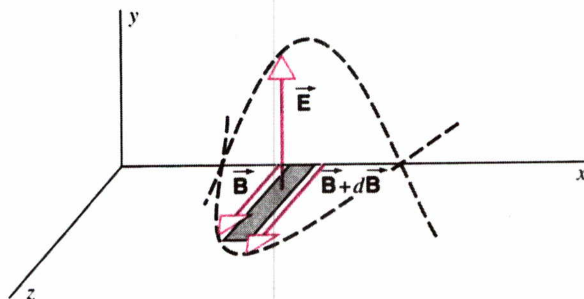
$$\frac{E_{\rm m}}{B_{\rm m}} = \frac{\omega}{k} = c \qquad (۳۸\text{ـ}۱۵)$$

نسبت دامنه‌های مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی موج برابر است با سرعت c موج. از معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) مشاهده می‌کنیم که نسبت دامنه‌ها برابر است با نسبت مقدارهای لحظه‌ای آنها، یا

$$E = cB \qquad (۳۸\text{ـ}۱۶)$$

این نتیجهٔ مهم در بخشهای بعدی سودمند خواهد بود.

* در گرفتن مشتق جزئی نسبت به یک متغیر مشخص، مانند $\partial E/\partial x$، تمام متغیرهای دیگر (مثلاً y، z، و t) را ثابت در نظر می‌گیریم.



شکل ۳۸ـ۱۰ جزییات نوار افقی شکل ۳۸ـ۸.

اکنون نوار افقی شکل ۳۸ـ۸ را، که در صفحهٔ xz قرار می‌گیرد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. جزییات این نوار را در شکل ۳۸ـ۱۰ نشان داده‌ایم. در این زمان خاص، میدان مغناطیسی $\vec{\mathbf{B}}$ در عرض نوار افزایش پیدا می‌کند. شار الکتریکی برحسب زمان کاهش پیدا می‌کند، زیرا موجی که وارد نمودار می‌شود میدان $\vec{\mathbf{E}}$ ضعیفتری دارد.

برای اینکه میدانها را در این نوار مورد تحلیل قرار دهیم، به‌صورت اصلاح‌شدهٔ قانون آمپر توسط ماکسول، یعنی معادلهٔ (۳۸ـ۶): $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_\circ \epsilon_\circ d\Phi_E/dt$، نیاز داریم. در واقع، شار الکتریکی متغیر (یا جریان جابه‌جایی) گذرنده از سطح مستطیل، میدان مغناطیسی در نوار القا می‌کند؛ این میدان مغناطیسی همان میدان مغناطیسی موج است.

همان‌طورکه در مورد میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در شکل ۳۸ـ۹ انجام دادیم، در اینجا می‌خواهیم مقدار انتگرال خطی $\vec{\mathbf{B}}$ (سمت چپ قانون آمپر ـ ماکسول) را با چرخش پادساعتگرد گرد مدار محاسبه کنیم. چون در ضلعهای کوتاه نوار $\vec{\mathbf{B}}$ و $d\vec{\mathbf{s}}$ برهم عمودند، فقط کافی است که ضلعهای بلند نوار را در نظر بگیریم، که در این صورت داریم

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -(B + dB)h + Bh = -h\,dB$$

که در اینجا B مقدار بردار $\vec{\mathbf{B}}$ در شاخهٔ سمت چپ نوار است و $B + dB$ مقدار آن در شاخهٔ سمت راست.

توجه کنید که $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ در شکل ۳۸ـ۹ مثبت است، در حالی‌که $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ در شکل ۳۸ـ۱۰ منفی است، با آنکه شارهای متناظر با آنها در هر دو وضعیت افزایش پیدا می‌کند. این رفتار، با اختلاف علامت معادله‌های (۳۸ـ۳) و (۳۸ـ۶) و با شکلها، که نشان می‌دهد میدان $\vec{\mathbf{E}}$ در شکل ۳۸ـ۹ و میدان $\vec{\mathbf{B}}$ در شکل ۳۸ـ۱۰ در جهتهای مخالف گرد مدار می‌چرخند، سازگار است.

شار Φ_E گذرنده از مستطیل شکل ۳۸ـ۱۰ برابر است با

$$\Phi_E = (E)(h\,dx)$$

با مشتق‌گیری برحسب زمان داریم

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h\,dx\frac{dE}{dt}$$

از آن‌رو می‌توانیم قانون آمپر ـ ماکسول، یعنی معادلهٔ (۳۸ـ۶) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$-h\,dB = \mu_\circ \epsilon_\circ \left(h\,dx\frac{dE}{dt}\right)$$

یا با حذف h از طرفین معادله و جایگزین‌کردن مشتقهای جزئی، می‌رسیم به

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (۳۸\text{ـ}۱۷)$$

باز هم در این معادله، علامت منفی مناسب و ضروری است، زیرا با آنکه B برحسب x در موقعیت مستطیل هاشورخوردهٔ شکل ۳۸ـ۱۰ افزایش می‌یابد، E برحسب t کاهش پیدا می‌کند.

از ترکیب این معادله با معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) درمی‌یابیم که

$$-kB_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t) = -\mu_\circ \epsilon_\circ \omega E_{\mathrm{m}} \cos(kx - \omega t)$$

یا

$$\frac{E_{\mathrm{m}}}{B_{\mathrm{m}}} = \frac{k}{\mu_\circ \epsilon_\circ \omega} = \frac{۱}{\mu_\circ \epsilon_\circ c} \qquad (۳۸\text{ـ}۱۸)$$

که در اینجا از تساوی $\omega = ck$ استفاده کردیم. از حذف $E_{\mathrm{m}}/B_{\mathrm{m}}$ بین معادله‌های (۳۸ـ۱۵) و (۳۸ـ۱۸) نتیجه می‌گیریم

$$c = \frac{۱}{\sqrt{\mu_\circ \epsilon_\circ}} \qquad (۳۸\text{ـ}۱۹)$$

با جایگزین‌کردن مقدارهای عددی، می‌رسیم به

$$c = \frac{۱}{\sqrt{(۴\pi \times ۱۰^{-۷}\mathrm{T \cdot m/A})(۸{,}۹ \times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{C^۲/N \cdot m^۲})}}$$
$$= ۳{,}۰ \times ۱۰^{۸}\mathrm{m/s}$$

که همان سرعت نور در فضای آزاد است! به‌دست‌آمدن سرعت سیر نور از ملاحظه‌های الکترومغناطیسی محض یک دستاورد بسیار

افتخارآمیز برای نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول است. این پیش‌بینی ماکسول قبل از شناخت امواج رادیویی و قبل از اینکه معلوم شود نور دارای سرشت الکترومغناطیسی است انجام شد. پیش‌بینی او به مفهوم طیف الکترومغناطیسی و کشف امواج رادیویی توسط هاینریش هرتز در سال ۱۸۹۰ میلادی انجامید. این پیش‌بینی امکان بررسی اپتیک را به‌عنوان شاخه‌ای از الکترومغناطیس فراهم آورد و به‌دست آوردن قانونهای بنیادی آن از معادله‌های ماکسول را امکان‌پذیر ساخت.

چون $\mu_\circ$ دقیقاً برابر با $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ تعریف شده است و سرعت سیر نور اکنون دارای مقدار دقیق $299792458\,\mathrm{m/s}$ است، معادلهٔ (۳۸ـ۱۹) این امکان را فراهم می‌آورد که مقدار تعریف‌شدهٔ $\epsilon_\circ$ را به‌دست آوریم:

$$\epsilon_\circ = \frac{1}{c^2\mu_\circ} = 8{,}854187817\cdots \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$$

شگفت‌آور اینکه، خود ماکسول نمی‌پنداشت که انتشار موجهای الکترومغناطیسی و پدیدهٔ الکترومغناطیس به‌طور کلی با آنچه در شکل ۳۸ـ۸ مطرح شده است، شباهتی داشته باشد. او و مانند تمام فیزیکدانان هم‌عصر خود اعتقاد راسخ داشت که فضا پُر از مادهٔ رقیقی به نام اِتر است و پدیده‌های الکترومغناطیسی را می‌توان برحسب گردشاره‌های چرخان در این اتر توجیه کرد.

نبوغ ماکسول بود که حتی با داشتن مدلی این چنین مکانیکی در ذهن خود، توانست قانونهای الکترومغناطیس را استنتاج کند که امروزه به نام او خوانده می‌شود. این قانونها، همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، وقتی سه دههٔ بعد با مطرح‌شدن نسبیت خاص اینشتین، نه‌تنها به هیچ تغییری نیاز نداشت بلکه، در واقع با قاطعیت توسط آن نظریه مورد تأیید قرار گرفت. امروزه، همان‌طور که در بخش ۴۱ـ۶ مورد بررسی قرارگرفته است، دیگر نیازی نیست برای توضیح انتشار امواج الکترومغناطیسی از مفهوم اتر کمک بگیریم.

۳۸ـ۶ انتقال انرژی و بردار پوئین‌تینگ

موج الکترومغناطیسی، مانند هر موج دیگری می‌تواند انرژی را از یک مکان به مکان دیگر منتقل کند. نوری که از لامپ می‌آید و گرمایی که از آتش تابش می‌شود مثالهای متداول جریان انرژی توسط موجهای الکترومغناطیسی است.

جریان انرژی در موج الکترومغناطیسی معمولاً برحسب آهنگ جریان انرژی به‌ازای واحد سطح (یا، معادل آن، توان الکترومغناطیسی به‌ازای واحد سطح) اندازه‌گیری می‌شود. اندازه و جهت جریان انرژی را برحسب برداری به نام بردار پوئین‌تینگ* $\vec{\mathbf{S}}$، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_\circ}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (۳۸ـ۲۰)$$

نخست خود را متقاعد کنیم که بردار $\vec{\mathbf{S}}$ به‌صورتی که در معادلهٔ (۳۸ـ۲۰) تعریف شده است جهت حرکت موج را به‌دست می‌دهد. بنابر قاعده‌های متداول حاصلضرب برداری دو بردار، $\vec{\mathbf{S}}$ باید بر صفحهٔ متشکل از بردارهای $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ عمود باشد و جهت آن از قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود. اگر قاعدهٔ دست راست را در مورد شکل ۳۸ـ۸ به‌کار ببرید، مشاهده خواهید کرد که در اولین نیم‌چرخهٔ موج، که $\vec{\mathbf{E}}$ در جهت $+y$ و $\vec{\mathbf{B}}$ در جهت $+z$ است، حاصلضرب $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ در جهت $+x$ است، که واقعاً جهت حرکت موج است. در دومین نیم‌چرخه، که $\vec{\mathbf{E}}$ در جهت $-y$ و $\vec{\mathbf{B}}$ در جهت $-z$ است، حاصلضرب برداری آنها باز هم در جهت $+x$ است.

توجه کنید که موج الکترومغناطیسی را می‌توانید فقط با مشخص‌کردن میدان $\vec{\mathbf{E}}$ آن و جهت حرکتش به‌صورتی منحصر به‌فرد تعیین کنید. یعنی، با بهره‌گیری از معادله‌های (۳۸ـ۱۵) و (۳۸ـ۲۰)، می‌توانیم میدان $\vec{\mathbf{B}}$ مربوط به آن را در صورت دانستن میدان $\vec{\mathbf{E}}$ و جهت حرکت آن، مشخص کنیم. معادلهٔ (۳۸ـ۱۵) اندازهٔ $\vec{\mathbf{B}}$ را به‌دست می‌دهد و معادلهٔ (۳۸ـ۲۰) جهت آن را معین می‌کند.

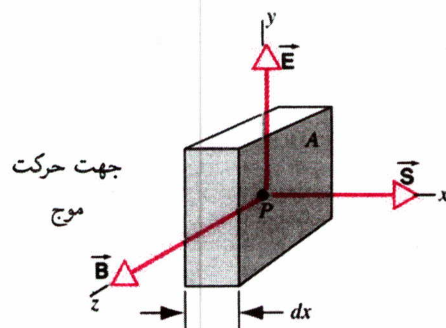
اکنون می‌خواهیم اندازهٔ بردار $\vec{\mathbf{S}}$ را به‌صورتی که در معادلهٔ (۳۸ـ۲۰) تعریف شده است بررسی کنیم و نشان دهیم که توان به‌ازای واحد سطح را برای موج به‌دست می‌دهد. برای موج نشان داده‌شده در شکل ۳۸ـ۸، اندازهٔ بردار $\vec{\mathbf{S}}$ عبارت است از

$$S = \frac{1}{\mu_\circ}EB \qquad (۳۸ـ۲۱)$$

که در اینجا S، E، و B مقدارهای لحظه‌ای این بردارها در نقطهٔ مشاهده است. با بهره‌گیری از معادله‌های (۳۸ـ۱۶) و (۳۸ـ۱۹)، می‌توانیم این معادله را به‌صورتهای زیر بنویسیم

$$S = \frac{1}{\mu_\circ c}E^2 = \epsilon_\circ cE^2 \quad \text{یا} \quad S = \frac{c}{\mu_\circ}B^2 \qquad (۳۸ـ۲۲)$$

* بردار پوئین‌تینگ به افتخار جان هنری پوئین‌تینگ (۱۸۵۲ـ۱۹۱۴) که برای اولین بار ویژگیهای آن را بررسی کرد نامگذاری شده است. پوئین‌تینگ یک فیزیکدان بریتانیایی بود که به خاطر بررسیهایش در زمینهٔ الکترومغناطیس و گرانش شهرت داشت.



شکل ۳۸ـ۱۱ موج الکترومغناطیسی از حجم کوچکی در اطراف نقطهٔ P می‌گذرد. میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ و بردار پوئین‌تینگ را در لحظهٔ مشخصی از زمان نشان داده‌ایم.

قبلاً چگالی انرژی (انرژی به‌ازای واحد حجم) را در هر نقطه‌ای که میدان الکتریکی یا مغناطیسی وجود داشته باشد معین کرده‌ایم: $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ (معادلهٔ ۳۰ـ۲۸) و $u_B = \frac{1}{2}B^2/\mu_0$ (معادلهٔ ۳۶ـ۲۲). این معادله‌ها، که برای میدانهای استاتیکی به‌دست آمده بودند، به همان خوبی برای میدانهای متغیر برحسب زمان کاربرد دارند. وقتی که هم میدان الکتریکی و هم میدان مغناطیسی وجود داشته باشد (مانند آنچه در مورد موج الکترومغناطیسی رخ می‌دهد)، چگالی انرژی کل در هر نقطه، عبارت است از

$$u = u_E + u_B + \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{S}{2c} + \frac{S}{2c} = \frac{S}{c} \quad (۳۸\text{ـ}۲۳)$$

که در اینجا از معادلهٔ (۳۸ـ۲۲) برای بیان E^2 و B^2 برحسب S استفاده کردیم. توجه کنید که در معادلهٔ (۳۸ـ۲۳)، داریم $u_E = u_B$. این تساوی در هر جایی که موج می‌رود برقرار است.

در شکل ۳۸ـ۱۱، میدانهای لحظه‌ای را در حجم کوچکی از فضا که نقطهٔ P را در برگرفته است، به هنگام عبور موج از این نقطه نشان داده‌ایم. پهنای این حجم در امتداد حرکت موج برابر dx و سطح مقطع عمود بر این راستا برابر با A است. حجم dV را می‌توانیم به‌صورت $A\,dx$ بیان کنیم. موج فاصلهٔ dx را در زمان $dt = dx/c$ می‌پیماید، که در اینجا c سرعت موج است. انرژی الکترومغناطیسی موجود در هر عنصر حجم dV یعنی dU برابر است با

$$dU = u\,dV = \frac{S}{c}dV = \frac{S}{c}A\,dx = SA\,dt \quad (۳۸\text{ـ}۲۴)$$

در آن‌صورت اندازهٔ بردار پوئین‌تینگ برابر است با

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \frac{P}{A} \quad (۳۸\text{ـ}۲۵)$$

که در اینجا آهنگ شارش انرژی، یعنی dU/dt، را با توان P برابر قرار داده‌ایم. معادلهٔ (۳۸ـ۲۵) نشان می‌دهد که اندازهٔ بردار پوئین‌تینگ آهنگ شارش انرژی یا توان بر یکای سطح را برای موج به‌دست می‌دهد. از معادلهٔ (۳۸ـ۲۵) روشن است که یکای SI مربوط به اندازهٔ S، وات بر مترمربع است.

شدت موج الکترومغناطیسی

معادلهٔ (۳۸ـ۲۱)، ارتباط بین اندازهٔ بردار پوئین‌تینگ در هر مکان را با اندازه‌های بردارهای E و B در آن مکان در یک زمان مشخص به‌دست می‌دهد. این مقدارها برحسب زمان بسیار سریع تغییر می‌کنند (یا افت‌وخیز دارند): مثلاً، بسامد موجهای نوری در حدود 10^{15}Hz است. برای اغلب آشکارسازها (مانند چشمانمان)، این افت‌وخیزها بسیار سریع‌تر از آن‌اند که بتوانیم آنها را مشاهده کنیم. در عوض، میانگین زمانی S را مشاهده می‌کنیم، که عمل میانگین‌گیری روی تعداد بسیار زیادی چرخه صورت می‌گیرد. میانگین زمان S_{av}، با عنوان شدت I موج، نیز شناخته شده است.

از معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۲۲)، داریم

$$I = S_{\text{av}} = \frac{1}{\mu_0 c}(E^2)_{\text{av}} = \frac{1}{\mu_0 c}E_{\text{m}}^2[\sin^2(kx - \omega t)]_{\text{av}}$$

معمولاً، بازهٔ زمانیی که در آن عمل میانگین‌گیری انجام می‌دهیم بسیار طولانی‌تر از دورهٔ تناوب یک چرخه است. در این حالت می‌توانیم از اثر کسر یک چرخه چشم‌پوشی کنیم و تابع $\sin^2$ را روی هر تعداد کاملی از چرخه‌ها میانگین بگیریم، که حاصل آن ۱/۲ به‌دست می‌آید و از آن‌رو داریم

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c}E_{\text{m}}^2 = \frac{1}{2\mu_0}E_{\text{m}}B_{\text{m}} \quad (۳۸\text{ـ}۲۶)$$

شدت را می‌توان برحسب مقدارهای ریشهٔ میانگین مربعی (rms) میدانها نیز بیان کرد. می‌دانیم $E_{\text{m}} = \sqrt{2}E_{\text{rms}}$ و از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$I = \frac{1}{\mu_0 c}E_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{\mu_0}E_{\text{rms}}B_{\text{rms}} \quad (۳۸\text{ـ}۲۷)$$

توجه کنید که اگر مقدارهای لحظه‌ای میدانها را با مقادیر میانگین (rms) آنها جایگزین کنیم معادلهٔ (۳۸ـ۲۷) شبیه معادلهٔ (۳۸ـ۲۱) است.

شکل ۳۸ـ۸ و معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) موجی را نشان می‌دهند که دامنه‌های E_{m} و B_{m} آن به هنگام حرکت موج در هر

مکانی تغییر نمی‌کند. نور خروجی از لیزر تقریب خوبی از چنین موجی است. مثال دیگری در این مورد، نوری است که از یک چشمهٔ بسیار دور به ما می‌رسد و ما آن را در فاصله‌هایی بسیار کوچکتر از فاصله تا چشمه مشاهده می‌کنیم، مانند نور خورشید. با این همه، اغلب با چشمه‌هایی سروکار داریم که در نزدیکی ما هستند و برای آنها معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) با دامنه‌های ثابت معتبر نیستند. اگر یک چشمهٔ نقطه‌ای موج، مانند لامپ، را در نظر بگیریم که در فاصله‌ای بسیار بزرگتر از ابعاد لامپ مورد مشاهده قرار بگیرد، در آن‌صورت جبهه‌های موج ناشی از چشمه به‌صورت کره گسترش می‌یابند و به نظر می‌رسد که چشمه تابشش را با شدت یکسان در همهٔ جهتها گسیل می‌دارد (که به آن گسیل همسانگرد نیز گفته می‌شود).

اگر موجها به هنگام حرکت انرژی از دست ندهند، در آن‌صورت انرژی مربوط به هر جبههٔ موج کروی ثابت باقی می‌ماند. یعنی، آهنگی که با آن انرژی از هر رویهٔ کروی، که مرکز آن رویه روی چشمه قرار داشته باشد، می‌گذرد و مستقل از شعاع r کره است. وقتی که r افزایش پیدا می‌کند، کل توان انتقال‌یافته به‌وسیلهٔ جبههٔ موج ثابت باقی می‌ماند، ولی توان به‌ازای واحد سطح کاهش پیدا می‌کند، زیرا مساحت رویهٔ کروی افزایش می‌یابد. اگر P برابر با میانگینِ توانِ گسیل‌شده توسط چشمه باشد، آنگاه شدت روی سطح کروی برابر است با توان به‌ازای واحد سطح

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} \qquad (۳۸\text{ـ}۲۸)$$

شدت موج از یک چشمهٔ نقطه‌ای برحسب فاصله از چشمه، با تابع $۱/r^۲$ کاهش پیدا می‌کند. مقایسهٔ معادله‌های (۳۸ـ۲۷) و (۳۸ـ۲۸) نشان می‌دهد که دامنهٔ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متناظر با موج (یعنی E_m و B_m یا E_{rms} و B_{rms}) با تابع $۱/r$ کاهش پیدا می‌کند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۳ ناظری در فاصلهٔ ۱٫۸ متری از چشمهٔ نوری (که ابعاد آن بسیار کوچکتر از ۱٫۸ m است) قرار دارد که توان خروجی P آن ۲۵۰ W است. مقدارهای ریشهٔ میانگین مربعی (rms) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در محل ناظر محاسبه کنید. فرض کنید که چشمه به‌صورت یکنواخت در همهٔ جهتها تابش می‌کند.

حل. از ترکیب معادله‌های (۳۸ـ۲۷) و (۳۸ـ۲۸)، می‌رسیم به

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} = \frac{۱}{\mu_۰ c} E^۲_{rms}$$

مقدار ریشهٔ میانگین مربعی میدان الکتریکی، یعنی E_{rms}، از رابطهٔ بالا چنین به‌دست می‌آید

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{P\mu_۰ c}{۴\pi r^۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{(۲۵۰\ \text{W})(۴\pi \times ۱۰^{-۷}\text{H/m})(۳٫۰۰ \times ۱۰^۸\text{m/s})}{(۴\pi)(۱٫۸\ \text{m})^۲}}$$

$$= ۴۸\ \text{V/m}$$

مقدار ریشهٔ میانگین مربعی میدان مغناطیسی از معادلهٔ (۳۸ـ۱۵) به‌دست می‌آید که چنین است

$$B_{rms} = \frac{E_{rms}}{c} = \frac{۴۸\ \text{V/m}}{۳٫۰۰ \times ۱۰^۸\text{m/s}}$$

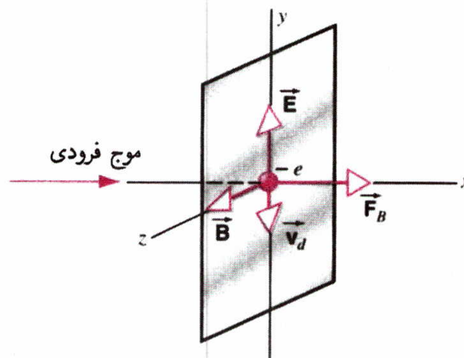
$$= ۱٫۶ \times ۱۰^{-۷}\text{T} = ۰٫۱۶\mu\text{T}$$

توجه کنید که E_{rms} (مساوی ۴۸ V/m) وقتی با معیارهای متداول آزمایشگاهی سنجیده شود قابل ملاحظه است اما B_{rms} (مساوی ۰٫۱۶μT) کاملاً کوچک است. این موضوع به ما کمک می‌کند تا توجیه کنیم چرا اغلب وسایلی که برای آشکارسازی و اندازه‌گیری امواج الکترومغناطیسی به‌کار می‌روند به مؤلفهٔ الکتریکی موج پاسخ می‌دهند. ولی، این اشتباه است که بگوییم مؤلفهٔ الکتریکی موج الکترومغناطیسی "قوی‌تر" از مؤلفهٔ مغناطیسی است، زیرا نمی‌توانیم کمیتهایی که با یکاهای متفاوتی اندازه‌گیری می‌شوند با هم مقایسه کنیم. همان‌طور که قبلاً دیدیم، مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی موج، تا جایی که به انتشار موج مربوط می‌شود، مبنای مطلقاً واحدی دارند. انرژیهای میانگین آنها، که می‌توان آنها را با هم مقایسه کرد، دقیقاً با هم برابرند.

۳۸ـ۷ فشار تابش

وقتی موج الکترومغناطیسی بر جسمی فرود می‌آید، جسم می‌تواند از موج انرژی جذب کند که حاصل این عمل اغلب به‌صورت افزایش دمای جسم مشاهده می‌شود. در واقع، میدان الکتریکی موج، نیرویی بر الکترونها وارد می‌آورد تا آنها را شتاب دهد. الکترونها می‌توانند، در برخورد با اتمهای ماده، انرژی خود را به کل جسم منتقل کنند که در نتیجهٔ آن دمای جسم افزایش می‌یابد.

به‌طور اصولی امکان دارد که به خاطر جذب موج الکترومغناطیسی تکانه‌ای به کل جسم انتقال داده شود و این انتقال با وارد آمدن نیرو به



شکل ۳۸ـ۱۲ یک موج نور تخت بر الکترونی در یک برگهٔ نازک با مقاومت ویژهٔ بالا فرود می‌آید. مقدارهای لحظه‌ای $\vec{\mathbf{E}}$، $\vec{\mathbf{B}}$، سرعت الکترون $\vec{\mathbf{v}}_{\rm d}$، و نیروی تابش $\vec{\mathbf{F}}_B$ نشان داده شده‌اند.

الکترونهای جسم صورت می‌گیرد. در واقع، موج، نیروی خالصی در جهت حرکتش به جسم وارد می‌آورد. این نیرو در حالت کلی بسیار کوچک است. وقتی نور خورشید بر ما می‌تابد، اثر این نیرو را احساس نمی‌کنیم، ولی در آزمایشگاه تحت شرایط دقیقاً کنترل‌شده می‌توانیم آن را مشاهده کنیم.

در شکل ۳۸ـ۱۲ میدانهای الکتریکی و مغناطیسیِ موج الکترومغناطیسی را که بر یک برگهٔ نازک از ماده‌ای با مقاومت ویژهٔ بالا فرود آمده است نشان داده‌ایم. میدان الکتریکی موج، نیروی $\vec{\mathbf{F}}_E = -e\vec{\mathbf{E}}$ را بر الکترونها وارد می‌آورد و آنها در جهت مخالف میدان (در جهت $-y$ در شکل ۳۸ـ۱۲) شتاب می‌گیرند. می‌دانیم که وقتی میدان الکتریکی به یک مادهٔ رسانا اعمال شود، الکترونها سرعت سوق $\vec{\mathbf{v}}_{\rm d}$ را کسب می‌کنند که مقدار آن متناسب با شدت میدان است (مثلاً معادلهٔ ۲۹ـ۱۹ را ببینید). با چشم‌پوشی از جزییات وابسته به خواص ماده، می‌خواهیم اندازهٔ سرعت سوق را متناسب با نیروی الکتریکی در نظر بگیریم، به‌طوری که

$$bv_{\rm d} = eE \qquad (۳۸\text{ـ}۲۹)$$

که در اینجا b ضریب تناسب است. این ثابت نقشی مشابه نقش ثابت میرایی ذره‌ای دارد که در یک شارهٔ چسبنده یا گران‌رو حرکت می‌کند. مثالی از این نوع حرکت، همانا سقوط سنگ در یک مخزن روغن است. اگر نیروی میرانندهٔ مؤثر (یعنی، مقاومت ویژه) زیاد باشد، در آن‌صورت سرعت الکترون به‌طور مداوم نسبت به میدان الکتریکی تنظیم مجدد می‌شود به‌طوری که معادلهٔ (۳۸ـ۲۹) حتی برای میدان متغیر موج الکترومغناطیسی معتبر باقی می‌ماند.

وقتی که الکترون در امتداد محور y حرکت می‌کند، میدان مغناطیسی موج نیرویی بر آن وارد می‌آورد: $\vec{\mathbf{F}}_B = -e\vec{\mathbf{v}}_{\rm d} \times \vec{\mathbf{B}}$. شکل ۳۸ـ۱۲ نشان می‌دهد که این نیرو در امتداد محور $+x$ است، یعنی، در همان جهتی که موج پیش می‌رود. وقتی که $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ جهتشان برعکس می‌شود، نیروی وارد بر الکترون همچنان در جهت $+x$ باقی می‌ماند. چون $\vec{\mathbf{v}}_{\rm d}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ بر همدیگر عمودند، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون را می‌توانیم به‌صورت $F_B = ev_{\rm d}B$ بنویسیم. با جایگزین‌کردن سرعت سوق از معادلهٔ (۳۸ـ۲۹)، یعنی $v_{\rm d} = eE/b$، می‌رسیم به

$$F_B = ev_{\rm d}B = \frac{e^2EB}{b} = \frac{e^2E^2}{cb} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۰)$$

که در اینجا تساوی آخر با بهره‌گیری از رابطهٔ $B = E/c$ به‌دست آمد. اگر این برگه به‌طور یکنواخت مورد تابش قرار بگیرد و شامل N الکترون باشد، در آن‌صورت نیروی کل در امتداد x برابر با $F = NF_B$ است.

می‌خواهیم آهنگ جذب انرژی از موج توسط برگه را مورد بررسی قرار دهیم. میدان $\vec{\mathbf{B}}$ هیچ کاری روی الکترونها انجام نمی‌دهد، زیرا نیروی مغناطیسی همواره عمود است بر راستای حرکت، ولی میدان $\vec{\mathbf{E}}$ روی الکترون کار انجام می‌دهد و در نتیجه به آن انرژی منتقل می‌کند. توان (آهنگ انتقال انرژی) داده‌شده به الکترون به‌وسیلهٔ میدان $\vec{\mathbf{E}}$ عبارت است از

$$\frac{dU_e}{dt} = F_E v_{\rm d} = (eE)\left(\frac{eE}{b}\right) = \frac{e^2E^2}{b} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۱)$$

آهنگ کل جذب انرژی برای تمام N الکترون موجود در برگه برابر است با $dU/dt = N\,dU_e/dt$.

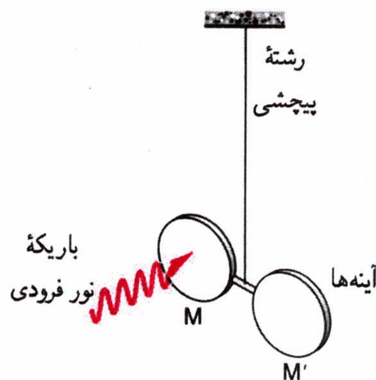
اکنون می‌توانیم عبارتی برای نیروی کل وارد بر برگه برحسب آهنگ جذب انرژی به‌دست آوریم، که این کار با ترکیب معادله‌های (۳۸ـ۳۰) و (۳۸ـ۳۱) انجام می‌شود

$$F = NF_B = \frac{Ne^2E^2}{cb} = \frac{1}{c}\frac{dU}{dt} = \frac{SA}{c} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۲)$$

که در اینجا A مساحت کل برگه است. اگر میانگین زمانی تمام کمیتها را معین کنیم، درمی‌یابیم که

$$\frac{F_{\rm av}}{A} = \frac{I}{c} \quad \text{(جذب)} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۳)$$

معادلهٔ (۳۸ـ۳۳) نشان می‌دهد که فشار کل (نیروی وارد بر واحد سطح) اعمال‌شده توسط تابش روی برگه متناسب است با شدت I تابش.



شکل ۳۸ـ۱۳ آرایشی که نیکولز و هال برای اندازه‌گیری فشار تابش به‌کار بردند. فشار نور تابیده‌شده به آینهٔ M سبب می‌شود که رشته به اندازهٔ زاویهٔ کوچکی بچرخد. بسیاری از جزییات مربوط به این آزمایش دقیق و بسیار ظریف از این شکل حذف شده است.

با استفاده از قانون دوم نیوتون به‌صورت $F = dp/dt$، می‌توانیم معادلهٔ (۳۸ـ۳۲) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$dp = \frac{dU}{c} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dU}{dt}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه، می‌رسیم به

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} \qquad \text{(جذب)} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۴)$$

این عبارت تغییر در تکانهٔ Δp جسمی را به‌دست می‌دهد که پس از جذب انرژی ΔU از یک موج الکترومغناطیسی "پس می‌نشیند".

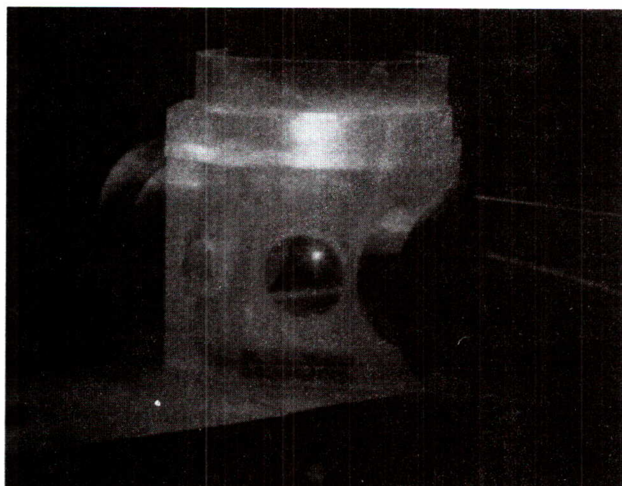
همچنین امکان دارد که یک جسم به‌جای جذب تابش فرودی آن را بازتاباند. چون موج باید به هنگام بازتابش جهتش را برعکس کند، جسم با دوبرابر تکانهٔ مربوط به حالت جذب پس می‌نشیند. (این مورد شبیه حالتی است که مولکول گازی که به دیوارهٔ ظرف فشار وارد می‌آورد در برخوردها تکانه‌اش برعکس می‌شود؛ بخش ۲۲ـ۲ را ببینید.) در مورد بازتابش، هم فشار واردشده از طرف موج به جسم و هم تکانهٔ اعمال‌شده بر جسم دوبرابر حالت جذب است:

$$\frac{F_{\text{av}}}{A} = \frac{2I}{c} \qquad \text{(بازتابش)} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۵)$$

$$\Delta p = \frac{2\Delta U}{c} \qquad \text{(بازتابش)} \qquad (۳۸\text{ـ}۳۶)$$

نخستین اندازه‌گیریهای فشار تابش را در سال ۱۹۰۳ میلادی نیکولز و هال* انجام دادند. آنها یک باریکهٔ نور را بر آینهٔ کوچکی تاباندند که، مطابق شکل ۳۸ـ۱۳، به یک رشتهٔ پیچشی متصل بود. فشار وارد بر آینه سبب شد که رشته به اندازهٔ زاویهٔ کوچک θ بچرخد. فشاری که آنها اندازه‌گیری کردند در گسترهٔ 10^{-5}N/m^2، یا در حدود 10^{-10} برابر کوچکتر از فشار جوّ، بود. می‌توان تصور کرد که آزمایشگران چه مراقبت خارق‌العاده‌ای باید انجام داده باشند تا بتوانند اثر به این کوچکی را مشاهده کنند. امروزه، لیزرها این امکان را فراهم می‌آورند که به شدت نور بسیار بیشتری دسترسی داشته باشیم و فشار باریکهٔ لیزری می‌تواند یک جسم کوچک را به حالت تعلیق در آورد (شکل ۳۸ـ۱۴).

* E. F. Nichols and G. F. Hull



شکل ۳۸ـ۱۴ یک قطرک بسیار ریز مایع (به قطر کمتر از $10\mu\text{m}$) به‌وسیلهٔ یک باریکهٔ لیزری قائم به حالت تعلیق در آمده است. لوله‌های افقی میکروسکوپهایی هستند که برای مشاهدهٔ نور پراکنده‌شده توسط قطرک به‌کار گرفته شده‌اند.

با آنکه مشاهدهٔ اثر فشار تابش ناشی از نور فرودی بر اجسام معمولی کاری دشوار است، اجسام میکروسکوپی به‌صورت قابل ملاحظه‌ای تحت تأثیر فشار تابش قرار می‌گیرند. ذرات کوچک غبار جداشده از دنباله‌دارها تحت تأثیر فشار تابش نور خورشید قرار می‌گیرند. این فشار ذرات غبار را از خورشید می‌راند، که ما آن را به‌صورت "دنبالهٔ" دنباله‌دار مشاهده می‌کنیم (شکل ۳۸ـ۱۵). حتی پیشنهاد شده است که برگه‌های بسیار بزرگ نازکی از مواد بازتابنده در فضا ساخته‌شده از آنها به‌عنوان "بادبان" فضاپیما در پهنهٔ سیستم خورشیدی استفاده شود.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۴ ذرهٔ غباری را در نظر بگیرید که از دنباله‌داری جدا شده و در فاصلهٔ R از خورشید قرار دارد و از همهٔ سیاره‌ها دور است. با فرض اینکه ذره تمام نور فرودآمده بر خود را جذب کند، شعاع r ذره را معین کنید، به‌طوری که نیروی ناشی از فشار تابش دقیقاً با ربایش گرانشی خورشید موازنه کند. فرض کنید ذره کروی است



شکل ۳۸_۱۵ دنباله‌دار هیل_بوپ (Hale-Bopp) که دارای دو دنباله است. دنباله روشنتر که در سمت راست قرار دارد ناشی از ذرات غبار است که به‌وسیلهٔ فشار تابش از خورشید رانده می‌شوند. دنبالهٔ کم‌سوتر در سمت چپ شکل ناشی از یونهایی از دنباله‌دار هستند که به‌وسیلهٔ بارهای خورشیدی (پروتونها و الکترونهای پرسرعتی که خورشید را ترک می‌کنند) شتاب می‌گیرند.

و چگالی آن برابر چگالی مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ پوستهٔ زمین، در حدود $۳٫۰ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{kg/m^{۳}}$، است.

حل. در نگاه اول به نظر می‌رسد که برای حل این مسئله اطلاعات کافی در اختیار نداریم، زیرا فاصلهٔ ذره، R، از خورشید را نمی‌دانیم. ولی، نیروی گرانش و شدت تابش (معادلهٔ ۳۸_۲۸)، هر دو برحسب فاصله به‌صورت $R^{-۲}$ تغییر می‌کنند، و در نتیجه فاصله از خورشید نباید تأثیری در محاسبه‌های ما داشته باشد.

نیروی وارد بر ذره به‌وسیلهٔ فشار نور را می‌توان از معادلهٔ (۳۸_۳۳) معین کرد. برای مساحت A که در آنجا نور جذب می‌شود از سطح دایره‌ای $\pi r^{۲}$ ذرهٔ غبار استفاده می‌کنیم. از برابر قراردادن نیروی ناشی از فشار نور با نیروی گرانشی می‌رسیم به

$$\frac{IA}{c} = \frac{GmM}{R^{۲}}$$

که در اینجا $m(=\rho V)$جرم ذرهٔ غبار است و M جرم خورشید. با جانشانی معادلهٔ (۳۸_۲۸) به‌جای شدت تابش، داریم

$$\frac{P(\pi r^{۲})}{۴\pi R^{۲} c} = \frac{GmM}{R^{۲}} = \frac{G\rho\left(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\right)M}{R^{۲}}$$

از حل این معادله برای r، نتیجه می‌گیریم

$$r = \frac{۳P}{۱۶\pi c G\rho M}$$

مقدارهای مربوط به توان تابش خورشید و جرم آن را می‌توان در پیوست (ج) یافت. از جانشانی مقدارهای عددی، می‌رسیم به

$$r = ۱٫۹ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{m} = ۰٫۱۹\mu\mathrm{m}$$

وقتی ذرات غبار با این اندازه، دنباله‌دار را ترک کنند، هیچ نیروی خالصی بر آنها وارد نمی‌آید و این ذرات با سرعتی برابر با سرعت دنباله‌دار در زمان ترک آن، در امتداد خط راست به حرکتشان ادامه می‌دهند. چون نیروی گرانش با جرم ذره افزایش می‌یابد (زیرا جرم متناسب با $r^{۳}$ است) در حالی‌که نیروی تابش با مساحت سطح مقطع (که متناسب با $r^{۲}$ است) افزایش پیدا می‌کند، ذرات بزرگتر به سوی خورشید سقوط می‌کنند ولی ذرات کوچکتر از خورشید رانده می‌شوند. طرح خالص برجای مانده از تمام این‌گونه ذرات، دنبالهٔ دنباله‌دار را به‌وجود می‌آورد.

چندگزینه‌ای

۳۸_۱ معادله‌های بنیادی نظریهٔ الکترومغناطیس

۱. علامت منفی در معادلهٔ (۳۸_۳) از کجا ناشی می‌شود؟

(الف) قانون گاؤس (ب) قانون فاراده (ج) قانون لنز

(د) قانون کول

۳۸_۲ میدانهای مغناطیسی القایی و جریان جابه‌جایی

۲. جریان در یک سیم دراز مستقیم به‌صورت $i = (۴٫۰\,\mu\mathrm{A/s})t$، تغییر می‌کند.

(۱) اندازهٔ جریان جابه‌جایی در این سیم چقدر است؟

(الف) $i_{\mathrm{d}} = ۴٫۰\,\mu\mathrm{A}$

(ب) $i_{\mathrm{d}} = i = (۴٫۰\,\mu\mathrm{A/s})t$

(ج) در این سیم هیچ جریان جابه‌جایی وجود ندارد.

(د) برای پاسخگویی به این پرسش به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

(۲) جهت جریان جابه‌جایی کدام است؟

(الف) موازی با جریان اصلی

(ب) پادموازی با جریان اصلی

(ج) هیچ جریان جابه‌جایی وجود ندارد.

۳۸ـ۳ معادله‌های ماکسول

۳. کدام‌یک از معادله‌های ماکسول مندرج در جدول ۳۸ـ۱ از استدلالهای نظری محض به‌دست آمده‌اند و نیاز به هیچ‌گونه اندازه‌گیری ندارند؟

(الف) هر چهار معادله

(ب) فقط معادلهٔ II

(ج) معادله‌های I و II معادله‌های قانون گاؤس

(د) هیچ‌کدام

۴. اگر تک‌قطبیهای مغناطیسی $q_{\rm m}$ کشف شده بودند چه جمله‌ای باید به قانون القای فاراده اضافه می‌کردیم؟ فرض کنید جریان مغناطیسی به‌صورت $i_{\rm m} = dq_{\rm m}/dt$ تعریف شده است.

(الف) $-\epsilon_\circ i_{\rm m}$ (ب) $-i_{\rm m}/\epsilon_\circ$

(ج) $-i_{\rm m}/\mu_\circ$ (د) $-\mu_\circ i_{\rm m}$

۳۸ـ۴ تولید موج الکترومغناطیسی

۵. یک جریان نوسانی در حلقه سیمی که در یک صفحهٔ افقی قرار گرفته موجهای الکترومغناطیسی تابش می‌کند. جهت بردار میدان الکتریکی در ناحیه‌ای که بسیار دور از شمال این حلقه قرارگرفته، کدام است؟

(الف) شمال به جنوب (ب) شرق به غرب (ج) بالا به پایین

۶. موجهای رادیویی AM به‌وسیلهٔ یک آنتن دوقطبی الکتریکی قائم تولید می‌شوند؛ این موجها به‌وسیلهٔ یک سیملولهٔ استوانه‌ای دراز دریافت می‌شوند. برای بهترین "برداشت" یا گرفتن موجهای AM، سیملوله را باید در چه جهتی قرار دهیم؟

(الف) محور سیملوله باید در امتداد قائم باشد.

(ب) محور سیملوله باید افقی بوده به سمت آنتن مخابراتی قرار گرفته باشد.

(ج) محور سیملوله باید افقی بوده در راستای عمود بر آنتن مخابراتی قرار گرفته باشد.

(د) اصلاً مهم نیست که سیملوله در چه امتدادی قرار گرفته است، زیرا سیگنالهای AM همسانگردند.

۳۸ـ۵ موجهای رونده و معادله‌های ماکسول

۷. معادلهٔ (۳۸ـ۶)، یعنی $E = cB$، کدام کمیتها را به‌هم ارتباط می‌دهد؟

(الف) لحظه‌ای (ب) میانگین (ج) ریشهٔ میانگین مربعی

(د) بیشینه (ه) تمام مقدارهای بالا برای E و B را.

۳۸ـ۶ انتقال انرژی و بردار پوئین‌تینگ

۸. در یک مکان و زمان معین، وقتی میدان مغناطیسیِ یک موج الکترومغناطیسی به سمت بالاست میدان الکتریکی آن به سمت شمال است. این موج الکترومغناطیسی در چه جهتی پیش می‌رود؟

(الف) شرق (ب) جنوب (ج) غرب (د) پایین

۹. از سه بردار موجود در معادلهٔ $\vec{\mathbf{S}} = 1/\mu_\circ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$، کدام جفت بردارها، برای یک موج الکترومغناطیسی تخت در فضای تهی همواره برهم عمودند؟ (برای این پرسش ممکن است بیش از یک پاسخ صحیح وجود داشته باشد.)

(الف) $\vec{\mathbf{S}}$ و $\vec{\mathbf{E}}$ (ب) $\vec{\mathbf{S}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$ (ج) $\vec{\mathbf{E}}$ و $\vec{\mathbf{B}}$

(د) هیچ‌کدام (ه) هر سه بردار باید عمود برهم باشند.

۱۰. یک چشمهٔ تابش الکترومغناطیسی در همهٔ جهتها به‌طوریکنواخت تابش می‌کند. اندازهٔ شدت میدان الکتریکی آن برحسب فاصلهٔ r از چشمه چگونه تغییر می‌کند؟

(الف) برای موج الکترومغناطیسی $E_{\rm m}$ ثابت است.

(ب) $E_{\rm m}$ متناسب است با $1/r$

(ج) $E_{\rm m}$ متناسب است با $1/r^2$

(د) $E_{\rm m}$ متناسب است با $1/r^3$

۳۸ـ۷ فشار تابش

۱۱. در اندازه‌گیری فشار تابش، یک موج الکترومغناطیسی مجاز است که از آینه بازتاب شود. اگر هنگامی که بسامد موج به نصف کاهش پیدا می‌کند $E_{\rm rms}$ دو برابر شود، در آن‌صورت فشار تابش به‌صورت زیر تغییر خواهد کرد:

(الف) چهار برابر می‌شود. (ب) دو برابر می‌شود.

(ج) ثابت می‌ماند. (د) به نصف کاهش می‌یابد.

پرسشها

۱. به بیان خود توضیح دهید که چرا قانون القای فاراده (جدول ۳۸ـ۱) را می‌توان با گفتن اینکه "میدان مغناطیسی متغیر، میدان الکتریکی تولید می‌کند" تعبیر کرد.

۲. اگر شار یکنواخت Φ_E که از یک حلقهٔ دایره‌ای تخت می‌گذرد برحسب زمان کاهش یابد، میدان مغناطیسی القایی (در صورتی‌که در امتداد $\vec{\mathbf{E}}$ به آن نگاه شود) ساعتگرد است یا پادساعتگرد؟

۳. اگر (همان‌طور که واقعیت دارد) مجموعهٔ یکاهایی وجود داشته باشد که در آن $\epsilon_\circ$ و $\mu_\circ$ ظاهر نشوند، معادلهٔ (۳۸ـ۱۹) چگونه صادق خواهد بود؟

۴. چرا نشان‌دادن اینکه "میدان مغناطیسی متغیر می‌تواند میدان الکتریکی تولید کند" بسیار ساده است ولی، با استفاده از وسایل ساده، نشان‌دادن اینکه "میدان الکتریکی متغیر می‌تواند میدان مغناطیسی تولید کند" بسیار دشوار است؟

۵. در شکل ۳۸ـ۲، دایره‌ای به شعاع $r > R$ در نظر بگیرید. چگونه می‌توان پیرامون این دایره، مانند مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱، میدان مغناطیسی القا کرد؟ بالاخره، در محل این دایره هیچ میدان الکتریکیی وجود ندارد و در آنجا $dE/dt = \circ$.

۶. در شکل ۳۸ـ۲، میدان $\vec{\mathbf{E}}$ به سمت داخل صفحهٔ شکل است و اندازهٔ آن افزوده می‌شود. حال اگر (الف) $\vec{\mathbf{E}}$ به طرف داخل صفحه و کاهشی باشد، (ب) $\vec{\mathbf{E}}$ به طرف خارج و افزایشی باشد، (ج) $\vec{\mathbf{E}}$ به طرف خارج و کاهشی باشد، و (د) $\vec{\mathbf{E}}$ ثابت باقی بماند، جهت میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را مشخص کنید.

۷. در شکل ۳۶ـ۸(ج)، وجود جریان جابه‌جایی برای حفظ پیوستگی جریان در خازن الزامی است. حال با توجه به اینکه هیچ باری روی خازن وجود ندارد، چگونه این جریان می‌تواند وجود داشته باشد؟

۸. (الف) در شکل ۳۸ـ۲، جهت جریان جابه‌جایی i_{d} کدام است؟ آیا می‌توانید، در همین شکل، قاعده‌ای بیابید که جهتهای (ب) $\vec{\mathbf{B}}$ و $\vec{\mathbf{E}}$ و (ج) $\vec{\mathbf{B}}$ و $d\vec{\mathbf{E}}/dt$ را به‌هم مربوط کند؟

۹. در نامیدن جملهٔ $\epsilon_\circ\, d\Phi_E/dt$ در معادلهٔ IV جدول ۳۸ـ۱، به نام "جریان جابه‌جایی" چه مزیتی وجود دارد؟

۱۰. آیا می‌توان جریان جابه‌جایی را با آمپرسنج اندازه‌گیری کرد؟ در این باره توضیح دهید.

۱۱. چرا آشکارسازی میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانهای رسانش در سیمها چنین آسان، ولی آشکارسازی آثار مغناطیسی مربوط به جریانهای جابه‌جایی در خازنها چنین دشوار است؟

۱۲. در جدول ۳۸ـ۱، سه نوع نبود ظاهری تقارن در معادله‌های ماکسول مشهود است. (الف) کمیتهای $\epsilon_\circ$ یا $\mu_\circ$ در معادله‌های I و IV ظاهر می‌شوند ولی در معادله‌های II و III وجود ندارند. (ب) معادلهٔ III دارای علامت منفی است ولی معادلهٔ IV چنین علامتی ندارد. (ج) در معادله‌های II و III "جمله‌های مربوط به قطب مغناطیسی" گم شده‌اند. کدام‌یک از این موارد نبود تقارن واقعی را نشان می‌دهد؟ اگر تک‌قطبیهای مغناطیسی کشف شوند، برای منظورکردن آنها، چگونه این معادله‌ها را بازنویسی خواهید کرد؟ (راهنمایی: فرض کنید شدت قطب مغناطیسی برابر با q_{m}، مانند کوانتوم بار الکتریکی e باشد؛ یکای SI بار q_{m} چیست؟)

۱۳. معادله‌های ماکسول در جدول ۳۸ـ۱ با این فرض نوشته شده‌اند که هیچ مادهٔ دی‌الکتریکی وجود ندارد. اگر این محدودیت را برداریم، معادله‌ها را باید به چه صورت بنویسیم؟

۱۴. دربارهٔ یک کاواک بازآواگر آکوستیکی، که اگر در آن هر گونه جریان دوره‌ای انرژی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر وجود داشته باشد، بحث کنید.

۱۵. یک کاواک بازآواگر آکوستیکی پُر از هوا و یک کاواک بازآواگر الکترومغناطیسی با همان اندازه دارای بسامدهای تشدیدی هستند که نسبت آنها در حدود 10^6 است. بسامد کدام‌یک از این دو بیشتر است و چرا؟

۱۶. جدار داخلی اغلب کاواکهای الکترومغناطیسی نقره‌اندود است، چرا؟

۱۷. در چه بخشهایی از چرخه (الف) جریان رسانش و (ب) جریان جابه‌جایی در کاواک شکل ۳۸ـ۳ برابر با صفر خواهد شد؟

۱۸. تغییرات زمانی بار الکتریکی در نقطه‌های مختلف جدارهٔ داخلی کاواک نوسانی الکترومغناطیسی شکل ۳۸ـ۳ را در یک چرخهٔ کامل بررسی کنید.

۱۹. به‌تقریب می‌توان گفت که مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی پیشرونده "یکدیگر را تغذیه می‌کنند". معنی این عبارت چیست؟

۲۰. "جریانهای جابه‌جایی در موج الکترومغناطیسی رونده حضور دارند و شاید بتوان مؤلفهٔ مغناطیسی میدان وابسته به موج را به این جریانها مربوط کرد." آیا این گزاره درست است؟ به‌طور مفصل در این مورد بحث کنید.

۲۱. آیا می‌توان موج الکترومغناطیسی را به‌وسیلهٔ میدان مغناطیسی منحرف کرد؟ به‌وسیلهٔ میدان الکتریکی چطور؟

۲۲. چرا برای درک چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی به اصلاح ماکسولی قانون آمپر (یعنی، جملهٔ $\mu_\circ \epsilon_\circ\, d\Phi_E/dt$ در جدول ۳۸ـ۱) نیاز داریم؟

۲۳. آیا ممکن است که روزی نظریهٔ الکترومغناطیس بتواند مقدار c

(یعنی $۳ \times ۱۰^۸ \mathrm{m/s}$) را نه برحسب $\mu_\circ$ و $\epsilon_\circ$ بلکه مستقیماً و به‌صورت عدد بدون توسل به هیچ‌گونه اندازه‌گیری پیش‌بینی کند؟

۲۴. اگر می‌خواستید بردار پوئین‌تینگ را برای نقطه‌های مختلف در داخل و اطراف یک مبدل محاسبه کنید، انتظار داشتید که طرح میدان چگونه باشد؟ فرض کنید یک اختلاف پتانسیل متناوب به سیم‌پیچ اولیه اعمال و یک بار مقاومتی به دو سر سیم‌پیچ ثانویه بسته شده باشد.

۲۵. علاوه بر اندازه‌گیریهای فشار تابش توسط نیکولز و هال، دو آزمایش تاریخی دیگر را نام ببرید که در آنها از ترازوی پیچشی استفاده شده است. هر دوی این آزمایشها در این کتاب بررسی شده‌اند، یکی در جلد اول و یکی در جلد سوم.

۲۶. آیا یک جسم می‌تواند انرژی نور را بدون انتقال تکانهٔ خطی جذب کند؟ اگر چنین است، مثالی بیاورید. اگر چنین نیست، چگونگی را توضیح دهید.

۲۷. وقتی چراغ‌قوه‌ای را روشن می‌کنید آیا هیچ نیرویی در ارتباط با گسیل نور بر آن وارد می‌شود؟

۲۸. به موجهای الکترومغناطیسی انرژی و تکانهٔ خطی نسبت می‌دهیم. آیا آنها تکانهٔ زاویه‌ای نیز دارند؟

۲۹. رابطهٔ بین شدت I یک موج الکترومغناطیسی و مقدار S بردار پوئین‌تینگ آن، در صورت وجود، کدام است؟

۳۰. وقتی روی ماسه‌های کنار ساحل در آفتاب دراز می‌کشید، چرا نسبت به دریافت انرژی گرمایی بسیار هوشیارید ولی نسبت به دریافت تکانهٔ خطی از همان چشمه کاملاً بی‌تفاوت. آیا این امر واقعیت دارد که هنگام دریافت یک توپ بسیار تند بیس‌بال انتقال انرژی آن را حس می‌کنید ولی متوجه تکانهٔ آن نمی‌شوید؟

۳۱. وقتی یک باریکهٔ نور موازی بر جسمی فرود می‌آید، تکانهٔ منتقل‌شده به جسم از معادله‌های (۳۸ـ۳۴) و (۳۸ـ۳۶) به‌دست می‌آید. اگر چشمهٔ نور را با سرعت زیاد، شاید با سرعت c ۱ر۰، به جسم نزدیک یا از آن دور شود آیا باز هم این معادله‌ها معتبرند؟

۳۲. این باور وجود دارد که فشار تابش مسئول ایجاد حد بالایی (در حدود $۱۰۰ M_{\mathrm{sun}}$) برای جرم یک ستاره است. در این باره توضیح دهید.

تمرینها

۳۸ـ۱ معادله‌های بنیادی نظریهٔ الکترومغناطیس

۳۸ـ۲ میدانهای مغناطیسی القایی و جریان جابه‌جایی

۱. در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱، کجا میدان مغناطیسی القایی برابر نصف مقدار بیشینهٔ آن است؟

۲. ثابت کنید که در یک خازن با صفحه‌های موازی می‌توان جریان جابه‌جایی را به‌صورت زیر نوشت

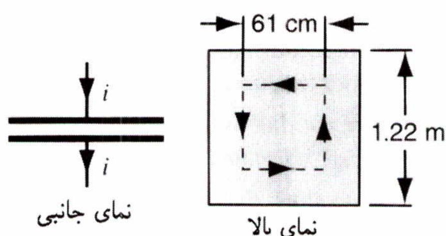
$$i_{\mathrm{d}} = C\frac{dV}{dt}$$

۳. یک خازن تخت به ظرفیت $\mu\mathrm{F}$ ۱ر۰ در اختیار دارید. چگونه جریان جابه‌جایی لحظه‌ای mA ۱ر۰ را در فاصلهٔ بین صفحه‌های آن برقرار می‌کنید؟

۴. نشان دهید که در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱، چگالی جریان جابه‌جایی j_{d}، برای $r < R$ به‌صورت زیر است

$$j_{\mathrm{d}} = \epsilon_\circ \frac{dE}{dt}$$

۵. یک خازن تخت، مانند شکل ۳۸ـ۱۶، دارای صفحه‌های مربعی به ضلع m ۲۲ر۱ است. جریانی به شدت A ۸۴ر۱ به خازن وارد (یا از آن خارج) می‌شود. (الف) جریان جابه‌جایی در ناحیهٔ بین صفحات خازن چقدر است؟ (ب) در این ناحیه dE/dt چقدر است؟ (ج) جریان جابه‌جایی که از مسیر مربع‌شکل خط‌چین بین صفحه‌ها می‌گذرد چقدر است؟ (د) مقدار $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ پیرامون این مسیر مربع‌شکل خط‌چین چقدر است؟



شکل ۳۸ـ۱۶ تمرین ۵.

۶. نشان دهید که در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸ـ۱، رابطه‌های به‌دست آمده برای $B(r)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

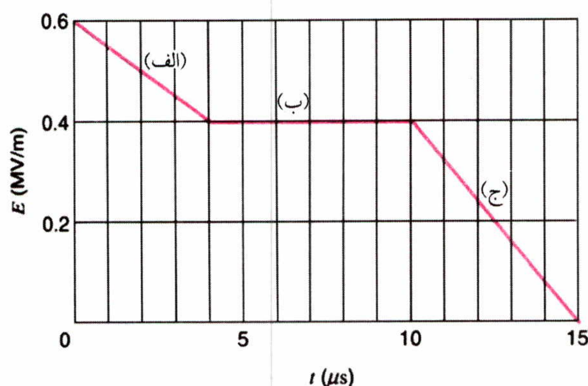
$$B(r) = \frac{\mu_\circ i_{\mathrm{d}}}{۲\pi r} \qquad (r \geq R)$$

$$B(r) = \frac{\mu_\circ i_{\mathrm{d}} r}{۲\pi R^۲} \qquad (r \leq R)$$

توجه کنید که این رابطه‌ها دقیقاً همان شکل رابطه‌های به‌دست آمده در فصل ۳۳ را دارند جز اینکه جریان رسانش i در آنها با جریان جابه‌جایی i_{d} جایگزین شده است.

۷. یک میدان الکتریکی یکنواخت در مدت $۱۵\mu\mathrm{s}$ به‌صورتی که در شکل ۳۸ـ۱۷ نشان داده شده است از شدت اولیهٔ $\mathrm{MV/m}$ ۶۰ر۰

به صفر فرو می‌افتد. در هر یک از بازه‌های زمانی (الف)، (ب)، و (ج) که روی شکل مشخص شده است، جریان جابه‌جایی عبوری از ناحیه‌ای به مساحت ۱٫۹ m^2 و عمود بر جهت میدان را محاسبه کنید. (رفتار میدان در انتهای بازه‌ها را نادیده بگیرید.)



شکل ۳۸ـ۱۷ تمرین ۷.

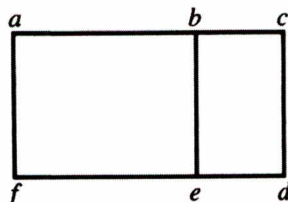
۸. یک خازن تخت با صفحه‌های دایره‌ای به قطر ۲۱٫۶ cm، مطابق شکل ۳۸ـ۲، پُر می‌شود. چگالی جریان جابه‌جایی در سرتاسر ناحیه یکنواخت و به طرف داخل صفحهٔ شکل و مقدار آن ۱٫۸۷ $\mathrm{mA/cm^2}$ است. (الف) میدان مغناطیسی B را، در فاصلهٔ $r = ۵۳٫۰$ mm از محور تقارن ناحیه، محاسبه کنید. (ب) تغییرات dE/dt را در این ناحیه محاسبه کنید.

۹. فرض کنید که شعاع صفحه‌های دایره‌ای یک خازن تخت، R، برابر ۳۲٫۱ mm و فاصلهٔ بین صفحه‌ها ۴٫۸۰ mm باشد. بین صفحه‌های این خازن یک اختلاف پتانسیل سینوسی با بیشینهٔ مقدار ۱۶۲ V اعمال می‌شود. بیشینه مقدار میدان مغناطیسی القایی در $r = R$ را تعیین کنید.

۳۸ـ۳ معادله‌های ماکسول

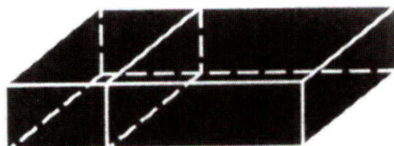
۱۰. عبارتهای مربوط به چهار کمیت زیر را، با درنظرگرفتن هر دو حالت $r < R$ و $r > R$ گردآوری کنید و به‌صورت جدول در آورید. چگونگی به‌دست آوردن این کمیتها را در کنارشان بنویسید و آنها را به‌عنوان کاربردهای جالبی از معادله‌های ماکسول در مورد مسائلی که تقارن استوانه‌ای دارند بررسی کنید. (الف) میدان $B(r)$ برای جریان i در یک رشته سیم دراز به شعاع R. (ب) میدان $E(r)$ برای استوانهٔ درازی به شعاع R و توزیع یکنواخت بار (ج) میدان $B(r)$ برای یک خازن تخت با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع R که در آن میدان E با آهنگی ثابت تغییر می‌کند. (د) میدان $E(r)$ برای یک ناحیهٔ استوانه‌ای به شعاع R که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت B با آهنگی ثابت تغییر می‌کند.

۱۱. همان‌طورکه در شکل ۳۸ـ۱۸ نشان داده‌ایم دو مسیر بستهٔ مجاور هم یعنی $abefa$ و $bcdeb$ در ضلع be مشترک‌اند. (الف) می‌توانیم معادلهٔ III جدول ۳۸ـ۱، یعنی $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -d\Phi_B/dt$ را برای هر یک از دو حلقهٔ بسته به‌طور جداگانه به‌کار ببریم. فقط با استفاده از این نتیجه نشان دهید که معادلهٔ III به‌طور خودکار در مسیر مرکب $abcdefa$ برقرار است. (ب) همین کار را با استفاده از معادلهٔ IV تکرار کنید. (ج) این رابطه را خاصیت "خودسازگاری" می‌خوانیم؛ چرا معادله‌های ماکسول باید خودسازگار باشند؟



شکل ۳۸ـ۱۸ تمرین ۱۱.

۱۲. همان‌طورکه در شکل ۳۸ـ۱۹ نشان داده‌ایم دو مکعب‌مستطیل بستهٔ مجاور هم دارای یک وجه مشترک‌اند. (الف) می‌توانیم معادلهٔ I در جدول ۳۸ـ۱، یعنی $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = q/\epsilon_0$ را به‌طور جداگانه در مورد هر کدام از دو سطح بسته به‌کار ببریم. فقط با استفاده از این نتیجه نشان دهید که معادلهٔ I به‌طور خودکار برای سطح مرکب برقرار است. (ب) همین کار را با استفاده از معادلهٔ II تکرار کنید. تمرین ۱۱ را ببینید.



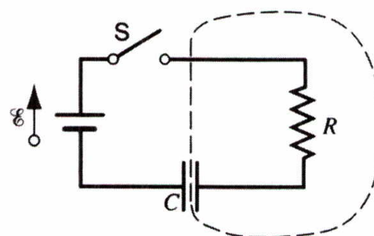
شکل ۳۸ـ۱۹ تمرین ۱۲.

۱۳. به بیان میکروسکوپی اصل پیوستگی جریان را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\oint (\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{j}}_{\mathrm{d}}) \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$$

که در اینجا $\vec{\mathbf{j}}$ چگالی جریان رسانش و $\vec{\mathbf{j}}_{\mathrm{d}}$ چگالی جریان جابه‌جایی است. این انتگرال را باید بتوان روی هر سطح بسته‌ای محاسبه کرد؛ این معادله اساساً حاکی از آن است که هر جریانی که به حجم محصوری

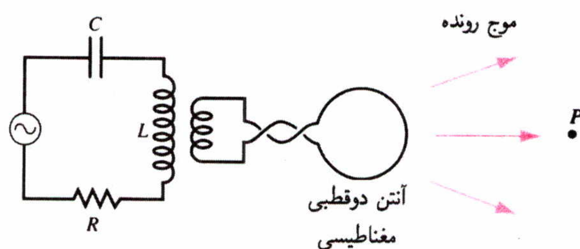
وارد شود باید از آن خارج شود. این معادله را در مورد رویهٔ نشان داده‌شده با خط‌چین در شکل ۳۸ـ۲۰، اندک زمانی پس از بسته‌شدن کلید S به‌کار ببندید.



شکل ۳۸ـ۲۰ تمرین ۱۳.

۳۸ـ۴ تولید موج الکترومغناطیسی

۱۴. در شکل ۳۸ـ۲۱ یک نوسانگر LC را نشان داده‌ایم که از طریق خط انتقال به آنتنی از نوع دوقطبی مغناطیسی متصل شده است. این آنتن را با شکل ۳۸ـ۵ مقایسه کنید، که آرایش مشابهی با آنتن دوقطبی الکتریکی دارد. (الف) مبنای نامگذاری این دو نوع آنتن چیست؟ (ب) برای توصیف موج الکترومغناطیسی که از کنار ناظر P در شکل ۳۸ـ۲۱ می‌گذرد، شکلهای متناظر با شکلهای ۳۸ـ۶ و ۳۸ـ۷ را رسم کنید.



شکل ۳۸ـ۲۱ تمرین ۱۴.

۱۵. برای ساختن نوسانگری که توان تولید امواج الکترومغناطیسی با طول موج ۵۵۰ nm (یعنی محدودهٔ نور مرئی) را داشته باشد، چه القاگری باید به یک خازن با ظرفیت ۱۷ pF متصل شود؟ دربارهٔ پاسخ خود اظهارنظر کنید.

۳۸ـ۵ موجهای رونده و معادله‌های ماکسول

۱۶. میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی تخت با مؤلفه‌های زیر مشخص شده است: $E_x=0$، $E_y=0$ و $E_z=E_0 \sin k(x-ct)$ که در اینجا $E_0 = ۲٫۳۴ \times ۱۰^{-۴}\text{V/m}$ و $k = ۹٫۷۲ \times ۱۰^{۶}\text{m}^{-۱}$ است. این موج در جهت $+x$ منتشر می‌شود. (الف) رابطه‌های مربوط به مؤلفه‌های میدان مغناطیسی این موج را بنویسید. (ب) طول موج این موج را تعیین کنید.

۱۷. یک موج الکترومغناطیسی تخت دارای بیشینهٔ شدت میدان الکتریکی $۳۲۱\mu\text{V/m}$ است. بیشینهٔ شدت میدان مغناطیسی آن را تعیین کنید.

۱۸. با شروع از معادله‌های (۳۸ـ۱۴) و (۳۸ـ۱۷) نشان دهید که مؤلفه‌های الکتریکی و مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی تخت رونده، یعنی $E(x,t)$ و $B(x,t)$ باید در "معادله‌های موج" صدق کنند، یعنی باید داشته باشیم

$$\frac{\partial^۲ E}{\partial t^۲} = c^۲ \frac{\partial^۲ E}{\partial x^۲}$$

و

$$\frac{\partial^۲ B}{\partial t^۲} = c^۲ \frac{\partial^۲ B}{\partial x^۲}$$

۱۹. (الف) نشان دهید که معادله‌های (۳۸ـ۱۱) و (۳۸ـ۱۲) در معادله‌های موج نمایش‌یافته در تمرین ۱۸ صدق می‌کنند. (ب) نشان دهید که هر عبارتی به‌صورت $E = E_\text{m} f(kx \pm \omega t)$ و $B = B_\text{m} f(kx \pm \omega t)$ که در آنها $f(kx \pm \omega t)$ یک تابع دلخواه است، نیز در معادله‌های موج صدق می‌کند.

۳۸ـ۶ انتقال انرژی و بردار پوئین‌تینگ

۲۰. با یافتن جهت بردار پوئین‌تینگ، $\vec{\text{S}}$، نشان دهید که جهت میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در تمام نقطه‌های شکلهای ۳۸ـ۶، ۳۸ـ۷، و ۳۸ـ۸ در تمام زمانها با جهتهای مفروض انتشار سازگار است.

۲۱. لیزرهای نئودیمیم‌ـشیشه که اخیراً وارد کار شده‌اند می‌توانند توان ۱۰۰ TW را در تپهای ۱٫۰ ns با طول موج $۰٫۲۶\mu\text{m}$ تأمین کنند. در هر تک تپ چه مقدار انرژی موجود است؟

۲۲. یک موج الکترومغناطیسی تخت در جهت y منفی حرکت می‌کند. در یک مکان و زمان مشخص، میدان مغناطیسی در جهت مثبت محور z قرار دارد و اندازه‌اش ۲۸ nT است. جهت و اندازهٔ میدان الکتریکی در آن مکان و در آن زمان کدام است؟

۲۳. نزدیکترین همسایهٔ ستاره‌ای، αـقنطورس، ۴٫۳۰ سال نوری از ما فاصله دارد. گفته می‌شود که برنامه‌های TV از سیارهٔ ما به این ستاره رسیده است و امکان دارد که ساکنان فرضی یک سیارهٔ فرضی که گرد این ستاره می‌چرخد، آن را مشاهده کرده باشند. توان خروجی یک ایستگاه فرستندهٔ TV روی زمین ۹۶۰ kW است. شدت سیگنال این فرستنده را در ستارهٔ αـقنطورس معین کنید.

۲۴. (الف) نشان دهید که در موج الکترومغناطیسیِ تختِ رونده شدت میانگین تابش، یعنی میانگین آهنگ انتقال انرژی به‌ازای واحد سطح از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$S_{\text{av}} = \frac{cB_{\text{m}}^{۲}}{۲\mu_۰}$$

(ب) شدت میانگین موج الکترومغناطیسیِ تختِ رونده‌ای که برای آن B_{m}، بیشینهٔ مقدار مؤلفهٔ میدان مغناطیسی، برابر با $۱٫۰ \times ۱۰^{-۴}\ \text{T}$ باشد، چقدر است؟

۲۵. شدت تابش مستقیم خورشید، که در جو زمین جذب نشده باشد، در یک روز خاص تابستانی $۱۳۰\ \text{W/m}^۲$ است. در چه فاصله‌ای از یک بخاری برقی با توان $۱٫۰\ \text{kW}$ باید قرار بگیرید تا همان شدت را احساس کنید. فرض کنید بخاری به‌طور یکنواخت در همهٔ جهتها تابش می‌کند.

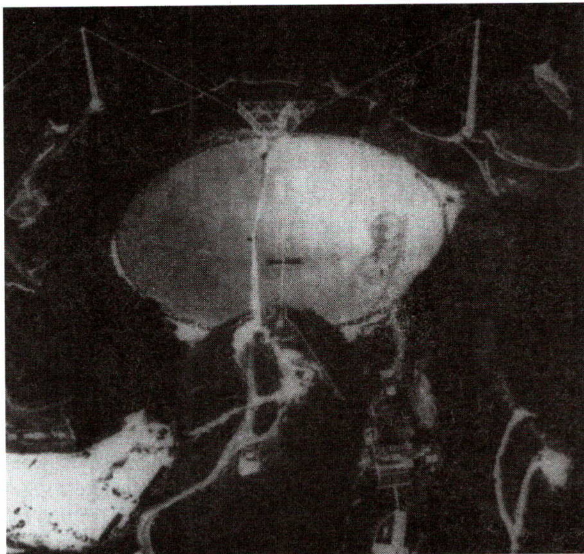
۲۶. ثابت کنید که برای هر نقطه‌ای در موج الکترومغناطیسی، مانند مورد شکل ۳۸ـ۸، چگالی انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی با چگالی انرژی ذخیره‌شده در میدان مغناطیسی برابر است.

۲۷. وقتی مستقیماً $۱۶۲\ \text{m}$ به یک چراغ خیابانی نزدیک می‌شوید شدت نور ۱٫۵۰ برابر شدت نور در مکان اولیه می‌شود. (الف) فاصلهٔ چراغ از مکان اولیهٔ شما چقدر است؟ (لامپ به‌طور یکنواخت در همهٔ جهتها تابش می‌کند.) (ب) آیا می‌توانید توان خروجی لامپ را تعیین کنید؟ اگر نمی‌توانید، توضیح دهید چرا.

۲۸. نور خورشید، درست در بالای جو، با شدت $۱٫۳۸\ \text{kW/m}^۲$ با زمین برخورد می‌کند. با فرض اینکه نور خورشید موج تخت باشد (الف) E_{m} و (ب) B_{m} را محاسبه کنید.

۲۹. بیشینهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ $۱۱٫۲\ \text{m}$ از یک چشمهٔ نور نقطه‌ای $۱٫۹۶\ \text{V/m}$ است. (الف) دامنهٔ میدان مغناطیسی، (ب) شدت، و (ج) توان خروجی چشمهٔ نور را محاسبه کنید.

۳۰. فرانک د. دریک یک پژوهشگر فعال در طرح SETI (درجستجوی هوش فرازمینی) گفته است که رادیو تلسکوپ بزرگی که در آرشیبوی پورتوریکو قرار دارد "می‌تواند سیگنالی که توان فقط ۱ پیکووات را در کل سطح زمین می‌گستراند آشکار سازد." شکل ۳۸ـ۲۲ را ببینید. (الف) برای چنین سیگنالی، توان واقعی که آنتن آرشیبو دریافت می‌کند چقدر است؟ قطر این آنتن $۳۰۵\ \text{m}$ است. (ب) توان خروجی یک چشمه در مرکز کهکشان راه‌شیری که بتواند چنین سیگنالی گسیل کند چقدر است؟ فاصلهٔ مرکز کهکشان $۲٫۳ \times ۱۰^۴$ سال نوری است. فرض کنید این چشمه در تمام جهتها به‌صورت یکنواخت تابش می‌کند.



شکل ۳۸ـ۲۲ تمرین ۳۰.

۳۱. هواپیمایی که در فاصلهٔ $۱۱٫۳\ \text{km}$ از یک فرستندهٔ رادیویی در پرواز است، سیگنالی با شدت $۷٫۸۳\ \mu\text{W/m}^۲$ دریافت می‌کند. (الف) دامنهٔ میدان الکتریکی این سیگنال در موقعیت هواپیما، (ب) دامنهٔ میدان مغناطیسی در موقعیت هواپیما، و (ج) کل توان ارسالی توسط فرستنده را محاسبه کنید، فرض کنید فرستنده در همهٔ جهتها به‌طور یکنواخت تابش می‌کند.

۳۲. در خلال یک آزمون، یک سیستم رادار مراقبتی ناتو، که در بسامد $۱۲\ \text{GHz}$ و با توان خروجی $۱۸۳\ \text{kW}$ کار می‌کند، می‌کوشد که یک هواپیمای تهاجمی "دشمن" را در فاصلهٔ $۸۸٫۲\ \text{km}$ آشکار سازد. هواپیمای هدف چنان طراحی شده است که سطح مقطع مؤثر بسیار کوچک $۰٫۲۲۲\ \text{m}^۲$ را برای بازتاب امواج رادار داشته باشد. فرض کنید باریکهٔ رادار به‌صورت همسانگرد روی نیمکرهٔ جلویی گسترده شده باشد. البته هم برای ارسال و هم برای بازتاب. جذب انرژی در جوّ را نادیده بگیرید. برای باریکهٔ بازتابیده که در محل رادار دریافت می‌شود (الف) شدت، (ب) دامنهٔ بردار میدان الکتریکی، و (ج) مقدار ریشهٔ میانگین مربعی میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

۳۸ـ۷ فشار تابش

۳۳. فرض کنید به مدت ۲٫۵ ساعت در آفتاب درازکشیده و مساحت $۱٫۳\ \text{m}^۲$ را در معرض تابش قرار داده باشید و پرتوهای خورشید با زاویهٔ ۹۰° و شدت $۱٫۱\ \text{kW/m}^۲$ بر بدن شما فرود می‌آید. فرض کنید پرتوها به‌طور کامل جذب شوند، در این‌صورت بدن شما چه تکانه‌ای دریافت کرده است؟

۳۴. میانگین شدت تابش خورشید که به‌طور قائم، درست در بالای جوّ، بر سطح زمین فرود می‌آید ۱٫۳۸ kW/m^2 است. (الف) با فرض اینکه تابش به‌طور کامل جذب شود، چه فشار تابشی بر این سطح وارد می‌شود؟ (ب) این فشار در مقایسه با فشار جوّ زمین در سطح دریا که برابر ۱۰۱ kPa است، چگونه ارزیابی می‌شود؟

۳۵. برای متراکم کردن پلاسماهای گازی با فشار تابش از لیزر پُرتوان استفاده می‌شود. اگر چگالی الکترون به اندازهٔ کافی زیاد باشد ضریب بازتابش پلاسما برابر واحد است. لیزری که تپهای تابش با توان قلهٔ ۱٫۵ GW تولید می‌کند بر یک پلاسمای با چگالی زیاد الکترون به مساحت ۱٫۳ mm^2 متمرکز شده است. فشار وارد بر این پلاسما را مشخص کنید.

۳۶. فشار تابش را در فاصلهٔ ۱٫۵۰ متری از یک لامپ ۵۰۰ واتی محاسبه کنید. فرض کنید سطحی که بر آن فشار وارد می‌شود در مقابل لامپ قرار گرفته و یک جذب‌کنندهٔ کامل است و نیز فرض کنید لامپ به‌طور یکنواخت در همهٔ جهتها تابش می‌کند.

۳۷. تابش خورشیدی با شدت ۱٫۳۸ kW/m^2 به زمین برخورد می‌کند. (الف) با فرض اینکه زمین مانند یک قرص تخت عمود بر پرتوهای خورشید عمل می‌کند و نیز فرض اینکه تمام انرژی فرودی را جذب می‌کند، نیرویی که فشار تابش به زمین وارد می‌کند محاسبه کنید. (ب) با محاسبهٔ نسبت $F_{\text{rad}}/F_{\text{grav}}$، این نیرو را با نیروی ربایش گرانشی خورشید مقایسه کنید.

۳۸. نشان دهید که بردار $c\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ دارای ابعاد [(مساحت·زمان)/تکانه] است، در صورتی‌که $\mu_0^{-1}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ دارای ابعاد [(مساحت·زمان)/انرژی] است. (به همان ترتیبی که از بردار $\vec{\mathbf{S}} = \mu_0^{-1}\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ برای محاسبهٔ جریان انرژی استفاده می‌شود، می‌توان از بردار $c\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ برای محاسبهٔ جریان تکانه استفاده کرد.)

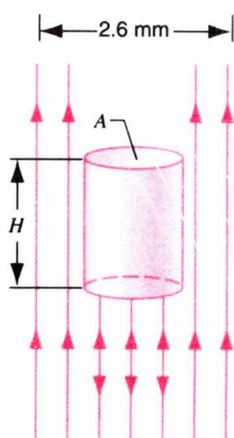
۳۹. تابش با شدت I معمولاً بر سطح جسمی فرود می‌آید که کسر f آن را جذب و بقیه را باز می‌تاباند. در این حالت فشار تابش چقدر است؟

۴۰. برای یک موج تخت که به‌طور قائم بر یک سطح تخت فرود می‌آید، ثابت کنید که فشار تابش وارد بر سطح با چگالی انرژی موجود در باریکه در خارج از آن سطح برابر است. این رابطه، بدون توجه به اینکه چه کسری از انرژی فرودی بازتابش می‌یابد، برقرار است.

۴۱. برای جریانی از گلوله‌ها که به‌طور قائم بر یک سطح تخت فرود می‌آیند، ثابت کنید که "فشار" مساوی دو برابر چگالی انرژی جنبشی موجود در جریان در بالای سطح است؛ فرض کنید سطح به‌طور کامل گلوله‌ها را جذب می‌کند. این رفتار را با رفتار نور مقایسه کنید؛ تمرین ۴۰ را ببینید.

۴۲. یک سفینهٔ فضایی کوچک که جرم آن، به همراه سرنشین ۱۵۰۰ kg است، به فضای خارج می‌رود که در آنجا میدان گرانشی ناچیز است. اگر فضانورد یک باریکهٔ لیزر ۱۰٫۰ کیلوواتی را به‌کار اندازد، این سفینه به علت نیروی واکنش مربوط به تکانه‌ای که باریکه حمل می‌کند در یک روز چه سرعتی به‌دست می‌آورد؟

۴۳. توان خروجی یک لیزر ۴٫۶ W و قطر باریکهٔ آن ۲٫۶ mm است. اگر این باریکه به‌طور قائم به طرف بالا نشانه‌گیری شود، ارتفاع H یک استوانهٔ کاملاً بازتابنده که بتوان آن را با فشار تابش اعمال‌شده از طرف باریکه "معلق" نگه داشت چقدر است؟ فرض کنید چگالی استوانه ۱٫۲ g/cm^3 است. شکل ۳۸ـ۲۳ را ببینید.



شکل ۳۸ـ۲۳ تمرین ۴۳.

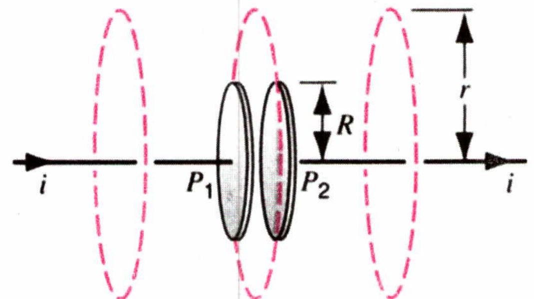
۴۴. در تمرین ۸ فصل ۳ کشتی بادبانی خورشیدی دیانا را توصیف کرده‌ایم. این کشتی بادبانی چنان طراحی شده است که با بهره‌گیری از فشار نور خورشید در پهنهٔ سیستم خورشیدی سفر کند. مساحت بادبان ۳٫۱ km^2 و جرم این کشتی ۹۳۰ kg است. تحقیق کنید که بیشینهٔ نیروی تابش وارد بر بادبان در فاصله‌ای از خورشید برابر با شعاع مدار زمین ۲۹ N است.

مسئله‌ها

۱. در شکل ۳۸ـ۲۴ صفحه‌های P_1 و P_2 مربوط به یک خازن تخت دایره‌ای به شعاع R را نشان داده‌ایم. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است این صفحه‌ها به دو رشته سیم دراز مستقیم که در آنها جریان رسانش ثابت i برقرار است متصل شده‌اند. همچنین در این

شکل سه دایرهٔ فرضی به شعاع r نشان داده شده‌اند که دوتای آنها در خارج از خازن قرار دارند و یکی در فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن. نشان دهید که میدان مغناطیسی در محیط هر یک از این دایره‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

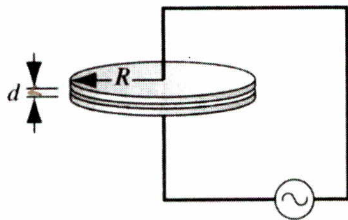
$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi r}$$



شکل ۳۸ـ۲۴ مسئلهٔ ۱.

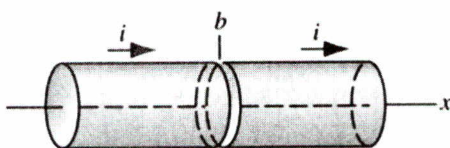
۲. در سال ۱۹۲۹ میلادی م. ر. وان کائوونبرگ برای اولین بار موفق به اندازه‌گیری مستقیم جریان جابه‌جایی i_d بین دو صفحهٔ یک خازن با صفحه‌های موازی شد. این خازن، همان‌طور که در شکل ۳۸ـ۲ پیشنهاد شده، به یک اختلاف پتانسیل متناوب متصل شده بود. او از صفحه‌های دایره‌ای استفاده کرد که شعاع مؤثر آنها ۴۰٫۰ cm و ظرفیت خازن ۱۰۰ pF بود. اختلاف پتانسیل اعمال‌شده دارای بیشینهٔ مقدار ΔV_m برابر با ۱۷۴ kV و با بسامد ۵۰٫۰ Hz بود. (الف) بیشینهٔ جریان جابه‌جایی بین صفحه‌ها چقدر بود؟ (ب) چرا اختلاف پتانسیل تا این حد بالا اختیار شده بود؟ (این اندازه‌گیریها به‌قدری حساس و دقیق بودند که تنها با گذشت بیش از ۶۰ سال پس از آنکه ماکسول مفهوم جابه‌جایی را اعلام کرد به‌صورتی مستقیم انجام شد! این آزمایش در شمارهٔ ۸ مجلهٔ ژورنال دو فیزیک در سال ۱۹۲۹ میلادی توصیف شده است.)

۳. خازن شکل ۳۸ـ۲۵ از دو صفحهٔ دایره‌ای با شعاع $R = ۱۸٫۲\ \text{cm}$ تشکیل و به یک چشمهٔ نیروی محرکه الکتریکی $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin \omega t$ متصل شده است که برای آن $\mathscr{E}_m = ۲۲۵\ \text{V}$ و $\omega = ۱۲۸\ \text{rad/s}$ است. بیشینهٔ جریان جابه‌جایی برابر با $i_d = ۷٫۶۳ \mu\text{A}$ است. آثار لبه‌ای میدان الکتریکی روی لبه‌های صفحه‌ها را نادیده می‌گیریم. (الف) بیشینهٔ مقدار جریان چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ مقدار $d\Phi_E/dt$، که در آن Φ_E شار الکتریکی گذرنده در ناحیهٔ بین صفحه‌هاست، چقدر است؟ (ج) فاصلهٔ d بین صفحه‌های خازن چقدر است؟ (د) بیشینهٔ مقدار میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را در فاصلهٔ بین صفحه‌ها و به فاصلهٔ $r = ۱۱٫۰\ \text{cm}$ از مرکز مشخص کنید.



شکل ۳۸ـ۲۵ مسئلهٔ ۳.

۴. در شکل ۳۸ـ۲۶ میلهٔ رسانای استوانه‌ای درازی به شعاع R را نشان داده‌ایم که محور آن بر محور x قرار دارد. یک برش نازک در $x = b$ در میله به‌وجود آورده‌ایم. جریان رسانش i که با زمان به‌صورت $i = \alpha t$ افزایش می‌یابد در میله به طرف راست برقرار می‌شود؛ α یک ضریب تناسب (مثبت) است. در لحظهٔ $t = ۰$ روی دو رویهٔ بریده‌شده در نزدیکی $x = b$ هیچ‌گونه باری وجود ندارد. (الف) اندازهٔ بار موجود روی این رویه‌ها را برحسب زمان تعیین کنید. (ب) با استفاده از معادلهٔ I جدول ۳۸ـ۱، مقدار E را در فضای بین دو بخش میله برحسب زمان، تعیین کنید. (ج) خطهای $\vec{\mathbf{B}}$ را برای $r < R$ رسم کنید. در اینجا r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از محور x است. (د) با استفاده از معادلهٔ IV جدول ۳۸ـ۱ مقدار $B(r)$ را در فضای بین دو قسمت بریده‌شده برای $r < R$ به‌دست آورید. (هـ) جواب قسمت آخر را با $B(r)$ مربوط به داخل میله در $r < R$ مقایسه کنید.



شکل ۳۸ـ۲۶ مسئلهٔ ۴.

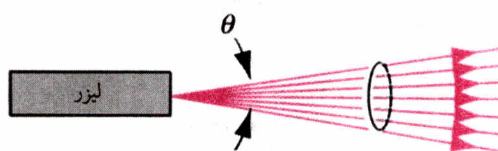
۵. اضلاع مکعبی به ضلع a با محورهای x، y، و z یک دستگاه مختصات دکارتی موازی است. میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{\mathbf{E}}$ موازی محور y، و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{\mathbf{B}}$ موازی محور x است. (الف) از دیدگاه بردار پوئین‌تینگ آهنگ عبور انرژی از هر کدام از وجه‌های این مکعب را محاسبه کنید و (ب) آهنگ تغییر احتمالی انرژی ذخیره‌شده در مکعب را حساب کنید.

۶. یک کاواک الکترومغناطیسی استوانه‌ای به قطر ۴٫۸ cm و طول ۷٫۳ cm در مُد نشان داده‌شده در شکل ۳۸ـ۳ نوسان می‌کند. (الف) فرض کنید، برای نقطه‌های واقع بر محور کاواک، $E_m = ۱۳\ \text{kV/m}$.

بسامد نوسان در این کاواک $2{,}4\ \text{GHz}$ است. برای این نقطه‌های محوری، بیشینهٔ آهنگ تغییر E $(dE/dt)_{\text{m}}$ چقدر است؟ (ب) فرض کنید میانگین مقدار $(dE/dt)_{\text{m}}$، برای تمام نقطه‌های روی سطح مقطع کاواک، نصف مقدار مشخص‌شده در بالا برای نقطه‌های محوری باشد. با پذیرفتن این فرض، بیشینهٔ مقدار B روی سطح استوانه‌ای کاواک چقدر است؟

۷. شدت میانگین نور خورشید که، به‌طور عمود، درست در بالای جوّ زمین فرود می‌آید، در طول سال به علت تغییر فاصلهٔ زمین‌ـخورشید، تغییر می‌کند. نشان دهید که تغییرات نسبی سالانه، تقریباً از رابطهٔ $\Delta I/I = 4e$ به‌دست می‌آید، که در اینجا e خروج از مرکز مدار بیضوی زمین به گرد خورشید است.

۸. تابش گسیل‌شده از لیزر دقیقاً یک باریکهٔ موازی نیست؛ بلکه باریکه به‌صورت مخروطی با سطح مقطع دایره است که در فضا گسترده می‌شود. زاویهٔ θ مخروط (شکل ۳۸ـ۲۷) را زاویهٔ کامل واگرایی باریکه می‌نامیم. یک لیزر آرگون با توان $3{,}85\ \text{kW}$ را که در طول موج $514{,}5\ \text{nm}$ تابش می‌کند در یک آزمایش فاصله‌یابی به طرف ماه نشانه می‌رویم؛ زاویهٔ کامل واگرایی باریکهٔ این لیزر $0{,}88\ \mu\text{rad}$ است. شدت باریکه را در سطح ماه مشخص کنید.



شکل ۳۸ـ۲۷ مسئلهٔ ۸.

۹. امکان وجود امواج الکترومغناطیسی ساکن زیر را بررسی کنید:

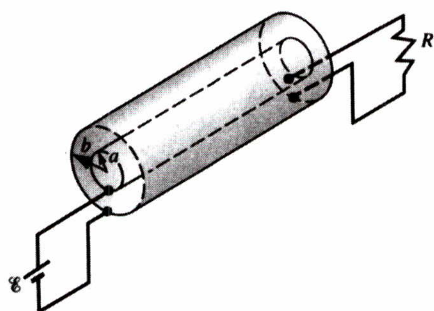
$$E = E_{\text{m}} \sin kx \sin \omega t$$

$$B = B_{\text{m}} \cos kx \cos \omega t$$

(الف) نشان دهید که اگر E_{m} با B_{m} رابطهٔ مناسبی داشته باشد و ω هم به‌طور مناسب به k مربوط شده باشد این رابطه‌ها در معادله‌های (۳۸ـ۱۴) و (۳۸ـ۱۷) صدق می‌کنند. این رابطه‌ها کدام‌اند؟ (ب) بردار پوئین‌تینگ (لحظه‌ای) را مشخص کنید (ج) نشان دهید که میانگین زمانی جریان توان از هر سطحی برابر با صفر است. (د) جریان انرژی را در این وضعیت توصیف کنید.

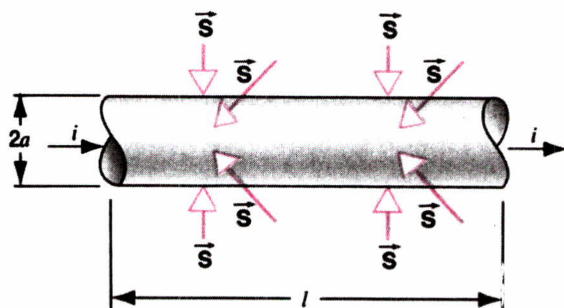
۱۰. یک رشته سیم مسی (قطر= $2{,}48\ \text{mm}$؛ مقاومت برابر $1{,}00\ \Omega$ را برای $300\ \text{m}$ سیم) حامل جریان $25{,}0\ \text{A}$ است. (الف) میدان الکتریکی، (ب) میدان مغناطیسی، و (ج) اندازهٔ بردار پوئین‌تینگ را برای نقطه‌ای روی سطح این سیم محاسبه کنید.

۱۱. یک کابل هم‌محور (با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b) به‌عنوان خط انتقال بین باتری $\mathscr{E}$ و مقاومت R، مطابق شکل ۳۸ـ۲۸ به‌کار رفته است. (الف) E و B را برای $a < r < b$ محاسبه کنید. (ب) بردار پوئین‌تینگ $\vec{\mathbf{S}}$ را برای $a < r < b$ محاسبه کنید. (ج) با انتگرال‌گیری مناسب بردار پوئین‌تینگ نشان دهید که کل توانی که از سطح مقطع حلقوی $a < r < b$ می‌گذرد برابر است با $\mathscr{E}^2/R$. آیا این جواب منطقی است؟ (د) نشان دهید که جهت بردار $\vec{\mathbf{S}}$، بدون توجه به اینکه باتری چگونه به مقاومت وصل شده است، همواره از باتری به مقاومت است.



شکل ۳۸ـ۲۸ مسئلهٔ ۱۱.

۱۲. در شکل ۳۸ـ۲۹، یک مقاومت استوانه‌ای به طول l، شعاع a و مقاومت ویژهٔ ρ را نشان داده‌ایم، که حامل جریان i است. (الف) نشان دهید که بردار پوئین‌تینگ $\vec{\mathbf{S}}$ در سطح مقاومت در همه جا، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، عمود بر سطح است. (ب) نشان دهید که آهنگ جریان انرژی به داخل این مقاومت از طریق جدارهٔ استوانه‌ای آن، که با انتگرال‌گیری بردار پوئین‌تینگ روی این سطح محاسبه می‌شود، برابر است با آهنگ تولید انرژی داخلی،



شکل ۳۸ـ۲۹ مسئلهٔ ۱۲.

یعنی داریم

$$\int \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = i^{۲} R$$

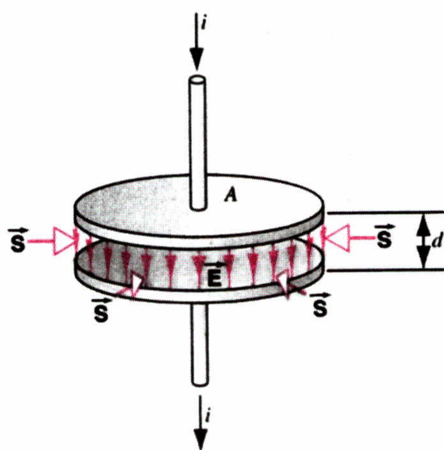
که در اینجا $d\vec{\mathbf{A}}$ عنصری از سطح استوانه‌ای است. از دیدگاه بردار پوئین‌تینگ، این بدان معنی است که انرژیی که در یک مقاومت به‌صورت انرژی داخلی پدید می‌آید از سیمهای اتصال وارد آن نمی‌شود بلکه از طریق فضا وارد می‌شود که سیمها و مقاومت را احاطه کرده‌اند.

۱۳. یک موج الکترومغناطیسی تخت، با طول موج ۳٫۱۸ m در جهت $+x$ در فضای آزاد پیش می‌رود و بردار الکتریکی $\vec{\mathbf{E}}$ آن با دامنهٔ ۲۸۸ V/m، در امتداد محور y است. (الف) بسامد این موج چقدر است؟ (ب) جهت و دامنهٔ میدان مغناطیسی این موج کدام است؟ (ج) اگر $E = E_{\rm m} \sin(kx - \omega t)$ باشد، مقدارهای مربوط به k و ω چقدر است؟ (د) شدت موج را تعیین کنید. (ه) اگر این موج بر یک برگهٔ جذب‌کنندهٔ کامل به مساحت ۱٫۸۵ m^{۲} فرود آید، با چه آهنگی تکانه به ورقه منتقل خواهد شد و فشار تابش وارد بر برگه چقدر است؟

۱۴. در شکل ۳۸ـ۳۰ یک خازن با صفحه‌های موازی یا خازن تخت را در حال پُرشدن نشان داده‌ایم. (الف) نشان دهید که بردار پوئین‌تینگ $\vec{\mathbf{S}}$ در همه جا به‌صورت شعاعی به طرف داخل استوانه است. (ب) نشان دهید که آهنگ جریان انرژی به این حجم، که با انتگرال‌گیری بردار پوئین‌تینگ روی جدار استوانه‌ای این حجم محاسبه می‌شود، برابر است با آهنگ افزایش انرژی الکتروستاتیکی ذخیره‌شده؛ یعنی،

$$\int \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = Ad \frac{d}{dt} \left(\frac{۱}{۲} \epsilon_{\circ} E^{۲} \right)$$

که در اینجا Ad حجم خازن و $۱/۲ \epsilon_{\circ} E^{۲}$ چگالی انرژی برای تمام نقطه‌های داخل این حجم استوانه‌ای است. این تحلیل نشان می‌دهد که از دیدگاه بردار پوئین‌تینگ، انرژی ذخیره‌شده در خازن نه از طریق سیمها بلکه از طریق فضای اطراف سیمها و صفحه‌ها به آن وارد می‌شود. (راهنمایی: برای یافتن $\vec{\mathbf{S}}$ باید ابتدا میدان $\vec{\mathbf{B}}$ را تعیین کنیم، که میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در فرایند باردارشدن خازن است؛ شکل ۳۸ـ۲ را ببینید. آثار لبه‌ای خطهای $\vec{\mathbf{E}}$ را نادیده بگیرید.)



شکل ۳۸ـ۳۰ مسئلهٔ ۱۴.

۱۵. یک لیزر هلیم‌ـنئون از نوعی که در اغلب آزمایشگاههای فیزیک یافت می‌شود دارای باریکه‌ای با توان خروجی ۵٫۰۰ mW در طول موج ۶۳۳ nm است. این باریکه را یک عدسی در یک لکهٔ دایره‌ای، که قطر مؤثر آن ۲٫۱۰ طول موج است، متمرکز می‌کند. (الف) شدت باریکهٔ کانونی‌شده، (ب) فشار تابش وارد بر یک کرهٔ بسیار کوچک کاملاً جذب‌کننده که قطر آن با قطر لکهٔ کانونی برابر است، (ج) نیروی وارد بر این کره، و (د) شتاب منتقل‌شده به کره را محاسبه کنید. چگالی کره را ۴٫۸۸ g/cm^{۳} در نظر بگیرید.

۱۶. پیشنهاد شده است که می‌توان یک سفینهٔ فضایی را به‌وسیلهٔ فشار تابش با بهره‌گیری از یک بادبان بزرگ ساخته‌شده از یک برگهٔ نازک در سیستم خورشیدی به‌پیش راند. اگر بخواهیم اندازهٔ نیروی تابش برابر با جاذبهٔ گرانشی خورشید باشد، بادبان باید چه اندازه‌ای داشته باشد؟ فرض کنید جرم سفینه + بادبان برابر ۱۶۵۰ kg باشد که بادبان کاملاً بازتابنده است و عمود بر پرتوهای خورشید قرارگرفته است. برای داده‌های مورد نیاز به پیوست ج رجوع کنید.

پیوستها

پیوست الف

سیستم بین‌المللی یکاها (SI)[1]

یکاهای اصلی SI

کمیت	یکا	نماد	تعریف
طول	متر	m	" ... طول مسیری که نور آن‌را در خلأ در $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه طی می‌کند." (۱۹۸۳)
جرم	کیلوگرم	kg	" ... جرم نمونهٔ بین‌المللی کیلوگرم." (۱۹۰۱)
زمان	ثانیه	s	" ... مدتی برابر با ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ دورهٔ تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایهٔ اتم سزیوم ۱۳۳." (۱۹۶۷)
جریان الکتریکی	آمپر	A	" ... جریان ثابتی که اگر در دو سیم راست به‌طول نامحدود و سطح مقطع دایره‌ای ناچیز که به‌فاصلهٔ یک متر موازی با یکدیگر در خلأ واقع شده‌اند برقرار باشد، نیرویی برابر با ۲×۱۰^{-۷} نیوتون به‌ازای هر متر از طول سیمها میان آنها ایجاد کند." (۱۹۴۸)
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	" ... $\frac{۱}{۲۷۳٫۱۶}$ دمای مطلق نقطهٔ سه‌گانهٔ آب." (۱۹۶۷)
مقدار ماده	مول	mol	" ... مقدار مادهٔ موجود در هر سیستمی که تعداد اجزای بنیادی آن برابر با تعداد اتمهای موجود در ۰٫۰۱۲ کیلوگرم از کربن ۱۲ باشد." (۱۹۷۱)
شدت روشنایی	شمع	cd	" ... شدت روشنایی چشمه‌ای که تابش تک‌رنگ با بسامد ۵۴۰×۱۰^{۱۲} هرتز را در راستای مشخصی گسیل می‌دارد و شدت تابش در آن راستا برابر با $\frac{۱}{۶۸۳}$ وات به‌ازای هر استرادیان است." (۱۹۷۹)

۱. این تعریفها (در تاریخهای نشان داده شده) در "کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها"، که یک مجمع بین‌المللی است، پذیرفته شده‌اند. در این کتاب از کندلا استفاده نمی‌کنیم.
برگرفته شده از:

"Guide for the Use of the International System of Units (SI)," National Bureau of Standards Special Publication 811,1995 edition.

بعضی از یکاهای فرعی SI

کمیت	یکا	نماد	یکای معادل
سطح	مترمربع	$m^{۲}$	
حجم	مترمکعب	$m^{۳}$	
بسامد	هرتز	Hz	$s^{-۱}$
چگالی (جرمی)	کیلوگرم بر مترمکعب	$kg/m^{۳}$	
سرعت	متر بر ثانیه	m/s	
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad/s	
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	$m/s^{۲}$	
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	$rad/s^{۲}$	
نیرو	نیوتون	N	$kg \cdot m/s^{۲}$
فشار	پاسکال	Pa	$N/m^{۲}$
کار، انرژی، مقدار گرما	ژول	J	$N \cdot m$
توان	وات	W	J/s
مقدار الکتریسیته	کولن	C	$A \cdot s$
اختلاف پتانسیل، نیروی محرکهٔ الکتریکی	ولت	V	$N \cdot m/C$
میدان الکتریکی	ولت بر متر	V/m	N/C
مقاومت الکتریکی	اهم	Ω	V/A
ظرفیت	فاراد	F	$A \cdot s/V$
شار مغناطیسی	وبر	Wb	$V \cdot s$
القاییدگی	هانری	H	$V \cdot s/A$
میدان مغناطیسی	تسلا	T	$Wb/m^{۲}, N/A \cdot m$
آنتروپی	ژول بر کلوین	J/K	
ظرفیت گرمایی ویژه	ژول بر کیلوگرم کلوین	$J/(kg \cdot K)$	
رسانندگی گرمایی	وات بر متر کلوین	$W/(m \cdot K)$	
شدت تابش	وات بر استرادیان	W/sr	

یکاهای مکمل SI

کمیت	یکا	نماد
زاویه	رادیان	rad
زاویهٔ فضایی	استرادیان	sr

پیوست ب

بعضی ثابتهای بنیادی فیزیک*

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	بهترین مقدار (تا سال ۱۹۹۸) مقدار[1]	عدم قطعیت[2]
سرعت نور در خلأ	c	۳٫۰۰ × ۱۰^۸m/s	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	دقیق
بار بنیادی	e	۱٫۶۰ × ۱۰^−۱۹C	۱٫۶۰۲۱۷۶۴۶۲	۰٫۰۳۹
ثابت الکتریکی (گذردهی)	ε_0	۸٫۸۵ × ۱۰^−۱۲F/m	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	دقیق
ثابت مغناطیسی(تراوایی)	μ_0	۱٫۲۶ × ۱۰^−۶H/m	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	دقیق
جرم الکترون	m_e	۹٫۱۱ × ۱۰^−۳۱kg	۹٫۱۰۹۳۸۱۸۸	۰٫۰۷۹
جرم الکترون[3]	m_e	۵٫۴۹ × ۱۰^−۴u	۵٫۴۸۵۷۹۹۱۱۰	۰٫۰۰۲۱
جرم پروتون	m_p	۱٫۶۷ × ۱۰^−۲۷kg	۱٫۶۷۲۶۲۱۵۸	۰٫۰۷۹
جرم پروتون[3]	m_p	۱٫۰۰۷۳u	۱٫۰۰۷۲۷۶۴۶۶۸۸	۰٫۰۰۰۱۳
جرم نوترون	m_n	۱٫۶۷ × ۱۰^−۲۷kg	۱٫۶۷۴۹۲۷۱۶	۰٫۰۷۹
جرم نوترون[3]	m_n	۱٫۰۰۸۷u	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۱۵۷۸	۰٫۰۰۰۵۴
نسبت بار به جرم الکترون	e/m_e	۱٫۷۶ × ۱۰^۱۱C/kg	۱٫۷۵۸۸۲۰۱۷۴	۰٫۰۴۰
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	m_p/m_e	۱۸۴۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۶۶۷۵	۰٫۰۰۲۱
ثابت پلانک	h	۶٫۶۳ × ۱۰^−۳۴J · s	۶٫۶۲۶۰۶۸۷۶	۰٫۰۷۸
طول‌موج کامپتونی الکترون	λ_e	۲٫۴۳ × ۱۰^−۱۲m	۲٫۴۲۶۳۱۰۲۱۵	۰٫۰۰۷۳
ثابت مولی گازها	R	۸٫۳۱J/mol · K	۸٫۳۱۴۴۷۲	۱٫۷
ثابت آووگادرو	N_A	۶٫۰۲ × ۱۰^۲۳mol^−۱	۶٫۰۲۲۱۴۱۹۹	۰٫۰۷۹
ثابت بولتزمن	k	۱٫۳۸ × ۱۰^−۲۳J/K	۱٫۳۸۰۶۵۰۳	۱٫۷
حجم مولی گاز ایده‌آل در شرایط متعارفی STP[4]	V_m	۲٫۲۴ × ۱۰^−۲m^۳/mol	۲٫۲۴۱۳۹۹۶	۱٫۷

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶) مقدار	عدم قطعیت
ثابت فارادی	F	$۹٫۶۵ \times ۱۰^{۴}\,\mathrm{C/mol}$	۹٫۶۴۸۵۳۴۱۵	۰٫۰۴۰
ثابت استفان-بولتزمن	σ	$۵٫۶۷ \times ۱۰^{-۸}\,\mathrm{W/m^{۲} \cdot K^{۴}}$	۵٫۶۷۰۴۰۰	۷٫۰
ثابت ریدبرگ	R_{∞}	$۱٫۱۰ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m^{-۱}}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۶۸۵۴۹	۰٫۰۰۰۰۰۷۶
ثابت گرانش	G	$۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^{۳}/s^{۲} \cdot kg}$	۶٫۶۷۳	۱۵۰۰
شعاع بور	$a_{۰}$	$۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m}$	۵٫۲۹۱۷۷۲۰۸۳	۰٫۰۰۳۷
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_{e}	$۹٫۲۸ \times ۱۰^{-۲۴}\,\mathrm{J/T}$	۹٫۲۸۴۷۶۳۶۲	۰٫۰۴۰
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_{p}	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{J/T}$	۱٫۴۱۰۶۰۶۶۳۳	۰٫۰۴۱
مگنتون بور	μ_{B}	$۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۴}\,\mathrm{J/T}$	۹٫۲۷۴۰۰۸۹۹	۰٫۰۴۰
مگنتون هسته	μ_{N}	$۵٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{J/T}$	۵٫۰۵۰۷۸۳۱۷	۰٫۰۴۰
ثابت ساختار ریز	α	۱/۱۳۷	۱/۱۳۷٫۰۳۵۹۹۹۷۶	۰٫۰۰۳۷
کوانتوم شار مغناطیسی	$\Phi_{۰}$	$۲٫۰۷ \times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{Wb}$	۲٫۰۶۷۸۳۳۶۳۶	۰٫۰۳۹
ثابت فون کلیزینگ (مقاومت هال کوانتیده)	R_{K}	۲۵۸۰۰Ω	۲۵۸۱۲٫۸۰۷۵۷۲	۰٫۰۰۳۷

۱. با همان یکا و همان توان دَهِ مقدار محاسباتی.

۲. قسمت در میلیون.

۳. جرم برحسب یکای (وحدت‌یافته) اتمی جرم، $۱\mathrm{u} = ۱٫۶۶۰۵۳۸۷۳ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$.

۴. شرایط متعارفی (STP)ـــ دما و فشار استاندارد=دمای صفر درجهٔ سلیسیوس و فشار ۱٫۰ بار.

* برگرفته‌شده از مرجع زیر:

Peter J. Mohr and Barry N. Taylor, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 28, no. 6(1999) and *Reviews of Modern Physics*, vol. 72, no.2(2000).

پیوست ج

اطلاعات نجومی

خورشید، زمین و ماه

ویژگی	خورشید [1]	زمین	ماه
جرم (kg)	$۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$	$۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۷٫۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$
شعاع متوسط (m)	$۶٫۹۶ \times ۱۰^{۸}$	$۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}$	$۱٫۷۴ \times ۱۰^{۶}$
چگالی متوسط (kg/m^3)	۱۴۱۰	۵۵۲۰	۳۳۴۰
شتاب ثقل در سطح (m/s^2)	۲۷۴	۹٫۸۱	۱٫۶۷
سرعت گریز (km/s)	۶۱۸	۱۱٫۲	۲٫۳۸
دورهٔ تناوب[2] چرخش (d)	۲۶ تا ۳۷[3]	۰٫۹۹۷	۲۷٫۳
شعاع متوسط مدار (km)	$۲٫۶ \times ۱۰^{۱۷}$ [4]	$۱٫۵۰ \times ۱۰^{۸}$ [5]	$۳٫۸۲ \times ۱۰^{۵}$ [6]
دورهٔ تناوب مداری	$۲٫۴ \times ۱۰^{۸}$ سال[4]	۱٫۰۰ سال[5]	۲۷٫۳ روز[6]

۱. توان تابشی خورشید $۳٫۹۰ \times ۱۰^{۲۶} W$ است؛ با فرض تابش عمودی، انرژی خورشید با آهنگ $۱۳۸۰ W/m^2$ به بالای جو زمین می‌رسد.

۲. نسبت به ستاره‌های دور.

۳. خورشید ــ که کره‌ای از گاز است ــ مثل جسم صلب نمی‌چرخد؛ دورهٔ چرخش آن در استوایش ۲۶ روز و در قطبهایش ۳۷ روز است.

۴. حول مرکز کهکشان.

۵. حول خورشید.

۶. حول زمین.

برخی از خصوصیات سیاره‌های منظومهٔ شمسی

	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	ارانوس	نپتون	پلوتون
فاصلهٔ متوسط از خورشید (10^6km)	۵۷٫۹	۱۰۸	۱۵۰	۲۲۸	۷۷۸	۱۴۳۰	۲۸۷۰	۴۵۰۰	۵۹۰۰
دورهٔ گردش به‌دور خورشید (سال)	۰٫۲۴۱	۰٫۶۱۵	۱٫۰۰	۱٫۸۸	۱۱٫۹	۲۹٫۵	۸۴٫۰	۱۶۵	۲۴۸
دورهٔ چرخش[1] (روز)	۵۸٫۷	۲۲۴۳	۰٫۹۹۷	۱٫۰۳	۰٫۴۰۹	۰٫۴۲۶	۰٫۴۵۱[2]	۰٫۶۵۸	۶٫۳۹
سرعت مداری (km/s)	۴۷٫۹	۳۵٫۰	۲۹٫۸	۲۴٫۱	۱۳٫۱	۹٫۶۴	۶٫۸۱	۵٫۴۳	۴٫۷۴
تمایل محور به مدار	< ۲۸°	≈ ۳°	۲۳٫۴°	۲۵٫۰°	۳٫۰۸°	۲۶٫۷°	۹۷٫۹°	۲۹٫۶°	۵۷٫۵°
تمایل مدار به مدار زمین	۷٫۰۰°	۳٫۳۹°	—	۱٫۸۵°	۱٫۳۰°	۲٫۴۹°	۰٫۷۷°	۱٫۷۷°	۱۷٫۲°
خروج از مرکز مدار	۰٫۲۰۶	۰٫۰۰۶۸	۰٫۰۱۶۷	۰٫۰۹۳۴	۰٫۰۴۸۵	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۴۷۲	۰٫۰۰۸۶	۰٫۲۵۰
قطر استوایی (km)	۴۸۸۰	۱۲۱۰۰	۱۲۸۰۰	۶۷۹۰	۱۴۳۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۵۱۸۰۰	۴۹۵۰۰	۲۳۰۰
جرم (نسبت به زمین = ۱)	۰٫۰۵۵۸	۰٫۸۱۵	۱٫۰۰۰	۰٫۱۰۷	۳۱۸	۹۵٫۱	۱۴٫۵	۱۷٫۲	۰٫۰۰۲
چگالی متوسط (g/cm^3)	۵٫۶۰	۵٫۲۰	۵٫۵۲	۳٫۹۵	۱٫۳۱	۰٫۷۰۴	۱٫۲۱	۱٫۶۷	۲٫۰۳
شتاب ثقل در سطح[3] (m/s^2)	۳٫۷۸	۸٫۶۰	۹٫۷۸	۳٫۷۲	۲۲٫۹	۹٫۰۵	۷٫۷۷	۱۱٫۰	۰٫۰۳
سرعت گریز (km/s)	۴٫۳	۱۰٫۳	۱۱٫۲	۵٫۰	۵۹٫۵	۳۵٫۶	۲۱٫۲	۲۳٫۶	۱٫۳
تعداد قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	۱۶+حلقه‌ها	۱۹+حلقه‌ها	۱۵+حلقه‌ها	۸+حلقه‌ها	۱

۱. نسبت به ستاره‌های دور.

۲. جهت چرخش در خلاف جهت گردش مداری است.

۳. در استوای سیاره.

پیوست د

خواص عناصر

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm³) در ۲۰°C	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
آکتینیم	Actinum	Ac	۸۹	(۲۲۷)	۱۰٫۱ (کلسینه)	۱۰۵۱	۳۲۰۰	۰٫۱۲۰
آلومینیم	Aluminium	Al	۱۳	۲۶٫۹۸۱۵	۲٫۶۹۹	۶۶۰	۲۵۱۹	۰٫۸۹۷
آمریکیم	Americium	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳٫۷	۱۱۷۶	۲۰۱۱	—
آنتیموان	Antimony	Sb	۵۱	۱۲۱٫۷۶	۶٫۶۹	۶۳۰٫۶	۱۵۸۷	۰٫۲۰۷
آرگون	Argon	Ar	۱۸	۳۹٫۹۴۸	$۱٫۶۶۲۶ \times ۱۰^{-۳}$	−۱۸۹٫۳	−۱۸۵٫۹	۰٫۵۲۰
آرسنیک	Arsenic	As	۳۳	۷۴٫۹۲۱۶	۵٫۷۲	۸۱۷ (۲۸ جو)	۶۱۴ (تصعید)	۰٫۳۲۹
استاتین	Astatine	At	۸۵	(۲۱۰)	—	۳۰۲	۳۳۷	—
باریم	Barium	Ba	۵۶	۱۳۷٫۳۳	۳٫۵	۷۲۷	۱۵۹۷	۰٫۲۰۴
برکلیم	Berkelium	Bk	۹۷	(۲۴۷)	۱۴ (برآوردی)	۱۰۵۰	—	—
بریلیم	Beryllium	Be	۴	۹٫۰۱۲۲	۱٫۸۴۸	۱۲۸۷	۲۴۷۱	۱٫۸۳
بیسموت	Bismuth	Bi	۸۳	۲۰۸٫۹۸۰	۹٫۷۵	۲۷۱٫۴	۱۵۶۴	۰٫۱۲۲
بوهریم	Bohrium	Bh	۱۰۷	(۲۶۴)	—	—	—	—
بور	Boron	B	۵	۱۰٫۸۱	۲٫۳۴	۲۰۷۵	۴۰۰۰	۱٫۰۳
برم	Bromine	Br	۳۵	۷۹٫۹۰۴	۳٫۱۲ (مایع)	−۷٫۲	۵۸٫۸	۰٫۲۲۶
کادمیم	Cadmium	Cd	۴۸	۱۱۲٫۴۱	۸٫۶۵	۳۲۱٫۱	۷۶۷	۰٫۲۳۲
کلسیم	Calcium	Ca	۲۰	۴۰٫۰۸	۱٫۵۵	۸۴۲	۱۴۸۴	۰٫۶۴۷
کالیفرنیم	Californium	Cf	۹۸	(۲۵۱)	—	۹۰۰ (برآوردی)	—	—
کربن	Carbon	C	۶	۱۲٫۰۱۱	۲٫۲۵	۳۵۵۰	—	۰٫۷۰۹
سریم	Cerium	Ce	۵۸	۱۴۰٫۱۲	۶٫۷۷۰	۷۹۸	۳۴۲۴	۰٫۱۹۲
سزیم	Cesium	Cs	۵۵	۱۳۲٫۹۰۵	۱٫۸۷۳	۲۸٫۴۴	۶۷۱	۰٫۲۴۲
کلر	Chlorine	Cl	۱۷	۳۵٫۴۵۳	$۳٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۳}$ (۰°C)	−۱۰۱٫۵	−۳۴٫۰	۰٫۴۷۹

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^{۳}) در (°C)۲۰	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g° · C) در (°C)۲۵
کرم	Chromium	Cr	۲۴	۵۱٫۹۹۶	۷٫۱۹	۱۹۰۷	۲۶۷۱	۰٫۴۴۹
کبالت	Cobalt	Co	۲۷	۵۸٫۹۳۳۲	۸٫۸۵	۱۴۹۵	۲۹۲۷	۰٫۴۲۱
مس	Copper	Cu	۲۹	۶۳٫۵۴	۸٫۹۶	۱۰۸۴٫۶	۲۵۶۲	۰٫۳۸۵
کوریم	Curium	Cm	۹۶	(۲۴۷)	۱۳٫۵ (کلسینه)	۱۳۴۵	—	—
دوبنیم	Dubnium	Db	۱۰۵	(۲۶۲)	—	—	—	—
دیسپروزیم	Dysprosium	Dy	۶۶	۱۶۲٫۵۰	۸٫۵۵	۱۴۱۲	۲۵۶۷	۰٫۱۷۰
اینشتینیم	Einsteinium	Es	۹۹	(۲۵۲)	—	۸۶۰ (برآوردی)	—	—
اربیم	Erbium	Er	۶۸	۱۶۷٫۲۶	۹٫۰۷	۱۵۲۹	۲۸۶۸	۰٫۱۶۸
اروپیم	Europium	Eu	۶۳	۱۵۱٫۹۶	۵٫۲۴۴	۸۲۲	۱۵۲۹	۰٫۱۸۲
فرمیم	Fermium	Fm	۱۰۰	(۲۵۷)	—	۱۵۲۷	—	—
فلوئور	Fluorine	F	۹	۱۸٫۹۹۸۴	۱٫۶۹۶ × ۱۰$^{-۳}$(۰°C)	−۲۱۹٫۶	−۱۸۸٫۱	۰٫۸۲۴
فرانسیم	Francium	Fr	۸۷	(۲۲۳)	—	۲۷	۶۷۷	—
گادولینیم	Gadolinium	Gd	۶۴	۱۵۷٫۲۵	۷٫۹۰	۱۳۱۳	۳۲۷۳	۰٫۲۳۶
گالیم	Gallium	Ga	۳۱	۶۹٫۷۲	۵٫۹۰۴	۲۹٫۷۶	۲۲۰۴	۰٫۳۷۱
ژرمانیم	Germanium	Ge	۳۲	۷۲٫۶۱	۵٫۳۲۳	۹۳۸٫۳	۲۸۳۳	۰٫۳۲۰
طلا	Gold	Au	۷۹	۱۹۶٫۹۶۷	۱۹٫۳	۱۰۶۴٫۱۸	۲۸۵۶	۰٫۱۲۹
هافنیم	Hafnium	Hf	۷۲	۱۷۸٫۴۹	۱۳٫۳۱	۲۲۳۳	۴۶۰۳	۰٫۱۴۴
هاسیم	Hasium	Hs	۱۰۸	(۲۶۹)	—	—	—	—
هلیم	Helium	He	۲	۴٫۰۰۲۶	۰٫۱۶۶۴ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۷۲٫۲	−۲۶۸٫۹	۵٫۱۹
هولمیم	Holmium	Ho	۶۷	۱۶۴٫۹۳۰	۸٫۷۹	۱۴۷۴	۲۷۰۰	۰٫۱۶۵
هیدروژن	Hydrogen	H	۱	۱٫۰۰۷۹۷	۰٫۰۸۳۷۵ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۵۹٫۳۴	−۲۵۲٫۸۷	۱۴٫۳
ایندیم	Indium	In	۴۹	۱۱۴٫۸۲	۷٫۳۱	۱۵۶٫۶	۲۰۷۲	۰٫۲۳۳
ید	Iodine	I	۵۳	۱۲۶٫۹۰۴۴	۴٫۹۳	۱۱۳٫۷	۱۸۴٫۴	۰٫۱۴۵
ایریدیم	Iridium	Ir	۷۷	۱۹۲٫۲	۲۲٫۴	۲۴۴۶	۴۴۲۸	۰٫۱۳۱
آهن	Iron	Fe	۲۶	۵۵٫۸۴۵	۷٫۸۷	۱۵۳۸	۲۸۶۱	۰٫۴۴۹
کریپتون	Krypton	Kr	۳۶	۸۳٫۸۰	۳٫۴۸۸ × ۱۰$^{-۳}$	−۱۵۷٫۴	−۱۵۳٫۲	۰٫۲۴۸
لانتان	Lanthanum	La	۵۷	۱۳۸٫۹۱	۶٫۱۴۵	۹۱۸	۳۴۶۴	۰٫۱۹۵
لورنسیم	Lawrencium	Lr	۱۰۳	(۲۶۰)	—	—	—	—
سرب	Lead	Pb	۸۲	۲۰۷٫۱۹	۱۱٫۳۵	۳۲۷٫۵	۱۷۴۹	۰٫۱۲۹
لیتیم	Lithium	Li	۳	۶٫۹۴۱	۰٫۵۳۴	۱۸۰٫۵	۱۳۴۲	۳٫۵۸
لوتتیم	Lutetium	Lu	۷۱	۱۷۴٫۹۷	۹٫۸۴	۱۶۶۳	۳۴۰۲	۰٫۱۵۴
منیزیم	Magnesium	Mg	۱۲	۲۴٫۳۰۵	۱٫۷۴	۶۵۰	۱۰۹۰	۱٫۰۲
منگنز	Manganese	Mn	۲۵	۵۴٫۹۳۸۰	۷٫۴۳	۱۲۴۴	۲۰۶۱	۰٫۷۹
مایتنریم	Meitnerium	Mt	۱۰۹	(۲۶۸)	—	—	—	—
مندلویم	Mendelevium	Md	۱۰۱	(۲۵۸)	—	۸۲۷	—	—
جیوه	Mercury	Hg	۸۰	۲۰۰٫۵۹	۱۳٫۵۵	−۳۸٫۸۳	۳۵۶٫۷	۰٫۱۴۰
مولیبدن	Molybdenum	Mo	۴۲	۹۵٫۹۴	۱۰٫۲۲	۲۶۲۳	۴۶۳۹	۰٫۲۵۱
نئودیمیم	Neodymium	Nd	۶۰	۱۴۴٫۲۴	۷٫۰۰	۱۰۲۱	۳۰۷۴	۰٫۱۹۰
نئون	Neon	Ne	۱۰	۲۰٫۱۸۰	۰٫۸۳۸۷ × ۱۰$^{-۳}$	−۲۴۸٫۶	−۲۴۶٫۰	۱٫۰۳
نپتونیم	Neptunium	Np	۹۳	(۲۳۷)	۲۰٫۲۵	۶۴۴	۳۹۰۲	۱٫۲۶
نیکل	Nickel	Ni	۲۸	۵۸٫۶۹	۸٫۹۰۲	۱۴۵۵	۲۹۱۳	۰٫۴۴۴

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی $(g/cm^{۳})$ در ۲۰(°C)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g° · C) در ۲۵(°C)
نئوبیم	Niobium	Nb	۴۱	۹۲٫۹۰۶	۸٫۵۷	۲۴۷۷	۴۷۴۴	۰٫۲۶۵
نیتروژن	Nitrogen	N	۷	۱۴٫۰۰۶۷	$۱٫۱۶۴۹ \times ۱۰^{-۳}$	−۲۱۰٫۰	−۱۹۵٫۸	۱٫۰۴
نوبلیم	Nobelium	No	۱۰۲	(۲۵۹)	—	—	—	—
اسمیم	Osmium	Os	۷۶	۱۹۰٫۲	۲۲٫۵۷	۳۰۳۳	۵۰۱۲	۰٫۱۳۰
اکسیژن	Oxygen	O	۸	۱۵٫۹۹۹۴	$۱٫۳۳۱۸ \times ۱۰^{-۳}$	−۲۱۸٫۸	−۱۸۳٫۰	۰٫۹۱۸
پالادیم	Palladium	Pd	۴۶	۱۰۶٫۴	۱۲٫۰۲	۱۵۵۵	۲۹۶۳	۰٫۲۴۶
فسفر	Phosphorus	P	۱۵	۳۰٫۹۷۳۸	۱٫۸۲	۴۴٫۱۵	۲۸۰٫۵	۰٫۷۶۹
پلاتین	Platinum	Pt	۷۸	۱۹۵٫۰۸	۲۱٫۴۵	۱۷۶۸	۳۸۲۵	۰٫۱۳۳
پلوتونیم	Plutonium	Pu	۹۴	(۲۴۴)	۱۹٫۸۴	۶۴۰	۳۲۲۸	۰٫۱۳۰
پولونیم	Polonium	Po	۸۴	(۲۰۹)	۹٫۳۲	۲۵۴	۹۶۲	—
پتاسیم	Potassium	K	۱۹	۳۹٫۰۹۸	۰٫۸۶	۶۳٫۲۸	۷۵۹	۰٫۷۵۷
پرازئودینیم	Praseodynium	Pr	۵۹	۱۴۰٫۹۰۷	۶٫۷۷۳	۹۳۱	۳۵۲۰	۰٫۱۹۳
پرومتیم	Promethium	Pm	۶۱	(۱۴۵)	۷٫۲۶۴	۱۰۴۲	۳۰۰۰ (برآوردی)	—
پروتاکتینیم	Protactinium	Pa	۹۱	(۲۳۱)	۱۵٫۴ (کلسینه)	۱۵۷۲	—	—
رادیم	Radium	Ra	۸۸	(۲۲۶)	۵٫۰	۷۰۰	۱۱۴۰	—
رادون	Radon	Rn	۸۶	(۲۲۲)	$۹٫۹۶ \times ۱۰^{-۳}$(۰°C)	−۷۱	−۶۱٫۷	۰٫۰۹۴
رنیم	Rhenium	Re	۷۵	۱۸۶٫۲	۲۱٫۰۲	۳۱۸۶	۵۵۹۶	۰٫۱۳۷
رودیم	Rhodium	Rh	۴۵	۱۰۲٫۹۰۵	۱۲٫۴۱	۱۹۶۴	۳۶۹۵	۰٫۲۴۳
روبیدیم	Rubidium	Rb	۳۷	۸۵٫۴۷	۱٫۵۳	۳۹٫۳۱	۶۸۸	۰٫۳۶۳
روتنیم	Ruthenium	Ru	۴۴	۱۰۱٫۰۷	۱۲٫۴۱	۲۳۳۴	۴۱۵۰	۰٫۲۳۸
رادرفوردیم	Rutherfordium	Rf	۱۰۴	(۲۶۱)	—	—	—	—
ساماریم	Samarium	Sm	۶۲	۱۵۰٫۳۵	۷٫۵۲	۱۰۷۴	۱۷۹۴	۰٫۱۹۷
اسکاندیم	Scandium	Sc	۲۱	۴۴٫۹۵۶	۲٫۹۹	۱۵۴۱	۲۸۳۶	۰٫۵۶۸
سیبورگیم	Seaborgium	Sg	۱۰۶	(۲۶۶)	—	—	—	—
سلنیم	Selenium	Se	۳۴	۷۸٫۹۶	۴٫۷۹	۲۲۱	۶۸۵	۰٫۳۲۱
سیلیسیوم	Silicon	Si	۱۴	۲۸٫۰۸۶	۲٫۳۳	۱۴۱۴	۳۲۶۵	۰٫۷۰۵
نقره	Silver	Ag	۴۷	۱۰۷٫۶۸	۱۰٫۴۹	۹۶۱٫۸	۲۱۶۲	۰٫۲۳۵
سدیم	Sodium	Na	۱۱	۲۲٫۹۸۹۸	۰٫۹۷۱	۹۷٫۷۲	۸۸۳	۱٫۲۳
استرونسیم	Strontium	Sr	۳۸	۸۷٫۶۲	۲٫۵۴	۷۷۷	۱۳۸۲	۰٫۳۰۱
گوگرد	Sulfur	S	۱۶	۳۲٫۰۶۶	۲٫۰۷	۱۱۵٫۲	۴۴۴٫۶	۰٫۷۱۰
تانتال	Tantalum	Ta	۷۳	۱۸۰٫۹۴۸	۱۶٫۶	۳۰۱۷	۵۴۵۸	۰٫۱۴۰
تکنسیم	Technetium	Tc	۴۳	(۹۸)	۱۱٫۵ (کلسینه)	۲۱۵۷	۴۲۶۵	—
تلور	Tellurium	Te	۵۲	۱۲۷٫۶۰	۶٫۲۴	۴۴۹٫۵	۹۸۸	۰٫۲۰۲
تربیم	Terbium	Tb	۶۵	۱۵۸٫۹۲۴	۸٫۲۳	۱۳۵۶	۳۲۳۰	۰٫۱۸۲
تالیم	Thallium	Tl	۸۱	۲۰۴٫۳۸	۱۱٫۸۵	۳۰۴	۱۴۷۳	۰٫۱۲۹
توریم	Thorium	Th	۹۰	(۲۳۲)	۱۱٫۷۲	۱۷۵۰	۴۷۸۸	۰٫۱۱۳
تولیم	Thulium	Tm	۶۹	۱۶۸٫۹۳۴	۹٫۳۲	۱۵۴۵	۱۹۵۰	۰٫۱۶۰
قلع	Tin	Sn	۵۰	۱۱۸٫۷۱	۷٫۳۱	۲۳۱٫۹۳	۲۶۰۲	۰٫۲۲۸
تیتان	Titanium	Ti	۲۲	۴۷۸۸	۴٫۵۴	۱۶۶۸	۳۲۸۷	۰٫۵۲۳
تنگستن	Tungsten	W	۷۴	۱۸۳٫۸۵	۱۹٫۳	۳۴۲۲	۵۵۵۵	۰٫۱۳۲
اورانیم	Uranium	U	۹۲	(۲۳۸)	۱۸٫۹۵	۱۱۳۵	۴۱۳۱	۰٫۱۱۶
وانادیم	Vanadium	V	۲۳	۵۰٫۹۴۲	۶٫۱۱	۱۹۱۰	۳۴۰۷	۰٫۴۸۹
ژنون	Xenon	Xe	۵۴	۱۳۱٫۳۰	$۵٫۴۹۵ \times ۱۰^{-۳}$	−۱۱۱٫۷۵	−۱۰۸٫۰	۰٫۱۵۸

عنصر		نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm^3) در ۲۰(°C)	نقطهٔ ذوب (°C)	نقطهٔ جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g° · C) در ۲۵(°C)
آنان‌نیلیم	Ununnilium*	Uun	۱۱۰	(۲۷۱)	—	—	—	—
آنان‌اونیم	Unununium*	Uuu	۱۱۱	(۲۷۲)	—	—	—	—
آنان‌بیم	Ununbium*	Uub	۱۱۲	(۲۷۷)	—	—	—	—
آنان‌کوادیم	Ununquadium*	Uuq	۱۱۴	(۲۸۵)	—	—	—	—
آنان‌هگزیم	Ununhexium*	Uuh	۱۱۶	(۲۸۹)	—	—	—	—
آنان‌اُکتیم	Ununoctium*	Uuo	۱۱۸	(۲۹۳)	—	—	—	—
ایتربیم	Ytterbium	Yb	۷۰	۱۷۳٫۰۴	۶٫۹۶۶	۸۱۹	۱۱۹۶	۰٫۱۵۵
ایتریم	Yttrium	Y	۳۹	۸۸٫۹۰۵	۴٫۴۶۹	۱۵۲۲	۳۳۴۵	۰٫۲۹۸
روی	Zine	Zn	۳۰	۶۵٫۳۹	۷٫۱۳۳	۴۱۹٫۵۳	۹۰۷	۰٫۳۸۸
زیرکونیم	Zirconium	Zr	۴۰	۹۱٫۲۲	۶٫۵۰۶	۱۸۵۵	۴۴۰۹	۰٫۲۷۸

مقادیر مربوط به جرمهای مولی متناظر است با جرم یک مول از اتمهای آن عنصر. برای گازهای دو اتمی (H_2، O_2، N_2، و سایر) جرم یک مول از مولکولها دو برابر مقدار مندرج در جدول است.

اعداد داخل پرانتز در ستون جرم مولی عبارت‌اند از اعداد جرمی طولانی عمرترین ایزوتوپهای عناصر رادیواکتیو.

همهٔ خواص فیزیکی مربوط به فشار یک اتمسفرند، مگر طور دیگری مشخص شده باشد.

اطلاعات مربوط به گازها فقط برای گازهایی معتبرند که در حالت مولکولی عادی خودشان ـــ مثل H_2، He، O_2، Ne و غیره ـــ باشند. مقادیر گرمای ویژهٔ گازها در فشار ثابت محاسبه شده‌اند.

* این نامها، نامهای موقتی این عناصر هستند.

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 79th edition (CRC Press, 1998).

پیوست ه

جدول تناوبی عناصر

	فلزات قلیایی (شامل هیدروژن)																		گازهای بی‌اثر
1	1 H																		2 He
2	3 Li	4 Be												5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg												13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca		21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr		39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-70	71 Lu	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	88-102	103 Lr	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Uun*	111 Uuu*	112 Uub*	113	114 Uuq*	115	116 Uuh*	117	118 Uuo*

سری لانتانید	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb
سری اکتینید	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No

* کشف این عناصر گزارش‌شده ولی فعلاً برای آنها نامی انتخاب نشده است. نمادهای نشان داده شده در اینجا معرف نامهای موقتی این عناصر هستند.

پیوست و

ذرات بنیادی

۱. ذرات بسیط

لپتونها

ذره	نماد	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	محصولات نوعی واپاشی
الکترون	e^-	e^+	-۱	۱/۲	۰٫۵۱۱	∞	
نوترینوی الکترون	ν_e	$\overline{\nu}_e$	۰	۱/۲	$< ۰٫۰۰۰۰۱۵$	∞	
موئون	μ^-	μ^+	-۱	۱/۲	۱۰۵٫۷	$۲٫۲ \times ۱۰^{-۶}$	$e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$
نوترینوی موئون	ν_μ	$\overline{\nu}_\mu$	۰	۱/۲	$< ۰٫۱۹$	∞	
تاوء	τ^-	τ^+	-۱	۱/۲	۱۷۷۷	$۲٫۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$\mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$
نوترینوی تاوء	ν_τ	$\overline{\nu}_\tau$	۰	۱/۲	< ۱۸	∞	

کوارکها

طعم	نماد	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم سکون[1] (MeV)	خواص دیگر
بالا	u	$\overline{u}$	$+۲/۳$	۱/۲	۳	$C = S = T = B = ۰$
پایین	d	$\overline{d}$	$-۱/۳$	۱/۲	۶	$C = S = T = B = ۰$
افسون	c	$\overline{c}$	$+۲/۳$	۱/۲	۱۳۰۰	افسون$(C) = +۱$
شگفتی	s	$\overline{s}$	$-۱/۳$	۱/۲	۱۲۰	شگفتی$(S) = -۱$
سر	t	$\overline{t}$	$+۲/۳$	۱/۲	۱۷۴۰۰۰	سر بودن$(T) = +۱$
ته	b	$\overline{b}$	$-۱/۳$	۱/۲	۴۳۰۰	ته بودن$(B) = -۱$

ذرات میدان

ذره	نماد	برهم‌کنش	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (GeV)
گراویتون[2]		گرانش	۰	۲	۰
بوزون ضعیف	W^+W^-	ضعیف	±۱	۱	۸۰٫۴
بوزون ضعیف	Z°	ضعیف	۰	۱	۹۱٫۲
فوتون	γ	الکترومغناطیسی	۰	۱	۰
گلوئون	g	قوی (رنگ)	۰	۱	۰

۲. بعضی ذرات مرکب

باریونها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (MeV)	عمرمتوسط (s)	واپاشی نوعی
پروتون	p	uud	$\overline{\mathrm{p}}$	+۱	۱/۲	۹۳۸	$> ۱۰^{۳۳}$	$\pi^\circ + \mathrm{e}^+(?)$
نوترون	n	udd	$\overline{\mathrm{n}}$	۰	۱/۲	۹۴۰	۸۸۷	$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$
لاندا	Λ°	uds	$\overline{\Lambda^\circ}$	۰	۱/۲	۱۱۱۶	$۲٫۶ \times ۱۰^{-۱۰}$	$\mathrm{p} + \pi^-$
اومگا	Ω^-	sss	$\overline{\Omega^-}$	−۱	۳/۲	۱۶۷۲	$۸٫۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	$\Lambda^\circ + \mathrm{K}^-$
دلتا	Δ^{++}	uuu	$\overline{\Delta^{++}}$	+۲	۳/۲	۱۲۳۲	$۵٫۷ \times ۱۰^{-۲۴}$	$\mathrm{p} + \pi^+$
افون لاندا	Λ_c^+	udc	$\overline{\Lambda_\mathrm{c}^+}$	+۱	۱/۲	۲۲۸۵	$۱٫۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$\Lambda^\circ + \pi^+$

مزونها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین $(h/۲\pi)$	جرم‌سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	واپاشی نوعی
پیون	π^+	$\mathrm{u\overline{d}}$	π^-	+۱	۰	۱۴۰	$۲٫۶ \times ۱۰^{-۸}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
پیون	π°	$\mathrm{u\overline{u}} + \mathrm{d\overline{d}}$	π°	۰	۰	۱۳۵	$۸٫۴ \times ۱۰^{-۱۷}$	$\gamma + \gamma$
کائون	K^+	$\mathrm{u\overline{s}}$	K^-	+۱	۰	۴۹۴	$۱٫۲ \times ۱۰^{-۸}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
کائون	K°	$\mathrm{d\overline{s}}$	$\overline{\mathrm{K}^\circ}$	۰	۰	۴۹۸	$۰٫۹ \times ۱۰^{-۱۰}$	$\pi^+ + \pi^-$
رو	ρ^+	$\mathrm{u\overline{d}}$	ρ^-	+۱	۱	۷۷۰	$۴٫۴ \times ۱۰^{-۲۴}$	$\pi^+ + \pi^-$
مزون D	D^+	$\mathrm{c\overline{d}}$	D^-	+۱	۰	۱۸۶۹	$۱٫۱ \times ۱۰^{-۱۲}$	$\mathrm{K}^- + \pi^+ + \pi^+$
پی‌سای	ψ	$\mathrm{c\overline{c}}$	ψ	۰	−۱	۳۰۹۷	$۷٫۶ \times ۱۰^{-۲۱}$	$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-$
مزون B	B^+	$\mathrm{u\overline{b}}$	B^-	+۱	۰	۵۲۷۹	$۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۲}$	$\mathrm{D}^- + \pi^+ + \pi^+$
اوپسیلون	Υ	$\mathrm{b\overline{b}}$	Υ	۰	۱	۹۴۶۰	$۱٫۳ \times ۱۰^{-۲۰}$	$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-$

۱. چون تا به حال کوارک آزاد مشاهده نشده، اندازه‌گیری جرم سکون کوارکها در حالت آزاد هم ممکن نبوده است. جرمهای سکونی که در این جدول آمده‌اند، جرمهای مؤثرند و مربوط به کوارکهایی هستند که ذرات مرکب را می‌سازند و به آنها مقیدند.

۲. انتظار می‌رود چنین ذراتی وجود داشته باشند ولی هنوز مشاهده نشده‌اند.

منبع:

"Review of Particle Properties," *European Physical Journal C*, vol. 15(2000).

پیوست ز

ضرایب تبدیل

ضرایب تبدیل را می‌توان مستقیماً از جدولها خواند. به‌عنوان مثال، ۱ درجه = $۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ دور، پس $۱۶٫۷^\circ = ۱۶٫۷ \times ۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$ دور. کمیتهای SI با حروف سیاه نشان داده شده‌اند و بخشی از آنها از کتاب زیر گرفته شده است.

G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, Prenice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

زاویهٔ مسطحه

	°	′	″	**rad**	rev
یک درجه =	۱	۶۰	۳۶۰۰	$۱٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۳}$
یک دقیقه =	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	$۲٫۹۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۶۳۰ \times ۱۰^{-۵}$
یک ثانیه =	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۴٫۸۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۷۱۶ \times ۱۰^{-۷}$
یک رادیان =	۵۷٫۳۰	۳۴۳۸	$۲٫۰۶۳ \times ۱۰^{۵}$	۱	۰٫۱۵۹۲
یک دور =	۳۶۰	$۲٫۱۶ \times ۱۰^{۴}$	$۱٫۲۹۶ \times ۱۰^{۶}$	۶٫۲۸۳	۱

زاویهٔ فضایی

۱ کره = ۴π استرادیان = ۱۲٫۵۷ رادیان

طول

	cm	**m**	km	in	ft	mil
یک سانتی‌متر =	۱	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۵}$	۰٫۳۹۳۷	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۶}$
یک متر =	۱۰۰	۱	$۱۰^{-۳}$	۳۹٫۳۷	۳٫۲۸۱	$۶٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک کیلومتر =	$۱۰^{۵}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۹۳۷ \times ۱۰^{۴}$	۳۲۸۱	۰٫۶۲۱۴
یک اینچ =	۲٫۵۴۰	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۵۴۰ \times ۱۰^{-۵}$	۱	$۸٫۳۳۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۵۷۸ \times ۱۰^{-۵}$
یک فوت =	۳۰٫۴۸	۰٫۳۰۴۸	$۳٫۰۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	۱۲	۱	$۱٫۸۹۴ \times ۱۰^{-۴}$
یک مایل =	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{۵}$	۱۶۰۹	۱٫۶۰۹	$۶٫۳۳۶ \times ۱۰^{۴}$	۵۲۸۰	۱

یک آنگستروم = $۱۰^{-۱۰}$ متر
یک مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر = ۱٫۱۵۱ مایل = ۶۰۷۸ فوت
یک فرمی = $۱۰^{-۱۵}$ متر

یک سال نوری = $۹٫۴۶۰ \times ۱۰^{۱۲}$ کیلومتر
یک پارسک = $۳٫۰۸۴ \times ۱۰^{۱۳}$ کیلومتر
یک فاتوم = ۶ فوت
یک شعاع بور = $۵٫۲۹۲ \times ۱۰^{-۱۱}$ متر

یک یارد = ۳ فوت
یک راد = ۱۶٫۵ فوت
یک میل = $۱۰^{-۳}$ اینچ
۱ نانومتر = $۱۰^{-۹}$ متر

مساحت

	$\mathrm{m}^{۲}$	$\mathrm{cm}^{۲}$	$\mathrm{ft}^{۲}$	$\mathrm{in}^{۲}$
یک متر مربع =	۱	$۱۰^{۴}$	۱۰٫۷۶	۱۵۵۰
یک سانتی‌متر مربع=	$۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۰۷۶ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۱۵۵۰
یک فوت مربع=	$۹٫۲۹۰ \times ۱۰^{-۲}$	۹۲۹٫۰	۱	۱۴۴
یک اینچ مربع =	$۶٫۴۵۲ \times ۱۰^{-۴}$	۶٫۴۵۲	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

یک مایل مربع = $۱۰^{۷} \times ۲٫۷۸۸$ فوت مربع = ۶۴۰ ایکر

۱ ایکر = ۴۳۵۶۰ فوت مربع

یک بارن = $۱۰^{-۲۸}$ مترمربع

۱ هکتار = $۱۰^{۴}$ مترمربع = ۲٫۴۷۱ ایکر

حجم

	$\mathrm{m}^{۳}$	$\mathrm{cm}^{۳}$	li	$\mathrm{ft}^{۳}$	$\mathrm{in}^{۲}$
یک مترمکعب =	۱	$۱۰^{۶}$	۱۰۰۰	۳۵٫۳۱	$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^{۴}$
یک سانتی‌مترمکعب =	$۱۰^{-۶}$	۱	$۱٫۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۲}$
یک لیتر =	$۱٫۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۲}$	۶۱٫۰۲
یک فوت‌مکعب =	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^{۴}$	۲۸٫۳۲	۱	۱۷۲۸
یک اینچ‌مکعب =	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۵}$	۱۶٫۳۹	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	۱

یک گالن مایع امریکایی = ۴ کوارت مایع امریکایی = ۸ پینت امریکایی = ۱۲۸ اونس مایع امریکایی = ۲۳۱ اینچ مکعب

یک گالن امپریال انگلیسی = ۲۷۷٫۴ اینچ مکعب = ۱٫۲۰۱ گالن مایع امریکایی

جرم

	g	**kg**	slug	u	oz	lb	ton
یک گرم =	۱	۰٫۰۰۱	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$	$۳٫۵۲۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۶}$
یک کیلوگرم =	۱۰۰۰	۱	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۶}$	۳۵٫۲۷	۲٫۲۰۵	$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۳}$
یک اسلاگ =	$۱٫۴۵۹ \times ۱۰^{۴}$	۱۴٫۵۹	۱	$۸٫۷۸۶ \times ۱۰^{۲۷}$	۵۱۴٫۸	۳۲٫۱۷	$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک u =	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۱۳۸ \times ۱۰^{-۲۸}$	۱	$۵٫۸۵۷ \times ۱۰^{-۲۶}$	$۳٫۶۶۲ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۸۳۰ \times ۱۰^{-۳۰}$
یک اونس =	۲۸٫۳۵	$۲٫۸۳۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۹۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۷۱۸ \times ۱۰^{۲۵}$	۱	$۶٫۲۵۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
یک پوند =	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۳۲ \times ۱۰^{۲۶}$	۱۶	۱	۰٫۰۰۰۵
یک تن =	$۹٫۰۷۲ \times ۱۰^{۵}$	۹۰۷٫۲	۶۲٫۱۶	$۵٫۴۶۳ \times ۱۰^{۲۹}$	$۳٫۲ \times ۱۰^{۴}$	۲۰۰۰	۱

یک تن متریک = ۱۰۰۰ کیلوگرم

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکای جرم نیستند، ولی غالباً به این عنوان به‌کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم $۱\mathrm{kg} = ۲٫۲۰۵\mathrm{lb}$. به این معناست که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ \mathrm{m/s}^{۲}$)، یک کیلوگرم جرمی است که ۲٫۲۰۵ پوند وزن دارد.

چگالی

	$\mathrm{slug/ft}^{۳}$	$\mathrm{kg/m}^{۳}$	$\mathrm{g/cm}^{۳}$	$\mathrm{lb/ft}^{۳}$	$\mathrm{lb/in}^{۳}$
یک اسلاگ بر فوت‌مکعب =	۱	۵۱۵٫۴	۰٫۵۱۵۴	۳۲٫۱۷	$۱٫۸۶۲ \times ۱۰^{-۲}$
یک کیلوگرم بر مترمکعب =	$۱٫۹۴۰ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۰٫۰۰۱	$۶٫۲۴۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۵}$
یک گرم بر سانتی‌مترمکعب =	۱٫۹۴۰	۱۰۰۰	۱	۶۲٫۴۳	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر فوت‌مکعب =	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱۶٫۰۲	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$
یک پوند بر اینچ‌مکعب =	۵۳٫۷۱	$۲٫۷۶۸ \times ۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۱۷۲۸	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند چگالی وزنی هستند و به این جهت، از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی متفاوت‌اند. به جدول جرم رجوع کنید.

زمان

	y	d	h	min	s
یک سال =	۱	۳۶۵٫۲	$۸٫۷۶۶ \times ۱۰^{۳}$	$۵٫۲۵۹ \times ۱۰^{۵}$	$۳٫۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$
یک روز =	$۲٫۷۳۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱	۲۴	۱۴۴۰	$۸٫۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$
یک ساعت =	$۱٫۱۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۱۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	۳۶۰۰
یک دقیقه =	$۱٫۹۰۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۶۰
یک ثانیه =	$۳٫۱۶۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۱٫۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۷۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

سرعت

	ft/s	km/h	m/s	mi/h	cm/s
یک فوت بر ثانیه =	۱	۱٫۰۹۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸
یک کیلومتر بر ساعت =	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸
یک متر بر ثانیه =	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰
یک مایل بر ساعت =	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰
یک سانتی‌متر بر ثانیه =	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۱	$۲٫۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱

یک نات = یک مایل دریایی بر ساعت = ۱٫۶۸۸ فوت بر ثانیه

یک مایل بر دقیقه = ۸۸٫۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰٫۰۰ مایل بر ساعت

نیرو

	dyn	N	lb	pdl	gf	kgf
یک دین =	۱	$۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۲۳۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۲۰ \times ۱۰^{-۶}$
یک نیوتون =	$۱۰^{۵}$	۱	۰٫۲۲۴۸	۷٫۲۳۳	۱۰۲٫۰	۰٫۱۰۲۰
یک پوند =	$۴٫۴۴۸ \times ۱۰^{۵}$	۴٫۴۴۸	۱	۳۲٫۱۷	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶
یک پوندال =	$۱٫۳۸۳ \times ۱۰^{۴}$	۰٫۱۳۸۳	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۴٫۱۰	$۱٫۴۱۰ \times ۱۰^{-۲}$
یک گرم نیرو =	۹۸۰٫۷	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۰۹۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۰٫۰۰۱
یک کیلوگرم نیرو =	$۹٫۸۰۷ \times ۱۰^{۵}$	۹٫۸۰۷	۲٫۲۰۵	۷۰٫۹۳	۱۰۰۰	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند، یکای نیرو نیستند ولی غالباً به این عنوان به‌کار می‌روند. برای نمونه، اگر بنویسیم یک گرم نیرو "=" ۹۸۰٫۷ دین، منظورمان این است که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ m/s^{۲}$)، یک گرم جرم تحت تأثیر یک نیروی ۹۸۰٫۷ دین قرار دارد.

فشار

	atm	$dyn/cm^{۲}$	اینچ آب	cm − Hg	Pa	$lb/in^{۲}$	$lb/ft^{۲}$
یک اتمسفر =	۱	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۶}$	۴۰۶٫۸	۷۶	$۱٫۰۱۳ \times ۱۰^{۵}$	۱۴٫۷۰	۲۱۱۶
یک دین بر سانتی‌مترمربع =	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۷}$	۱	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۱	$۱٫۴۰۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۳}$
یک اینچ آب[1] در ۴ درجهٔ سلسیوس =	$۲٫۴۵۸ \times ۱۰^{-۳}$	۲۴۹۱	۱	۰٫۱۸۶۸	۲۴۹٫۱	$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	۵٫۲۰۲
یک سانتی‌متر جیوه[1] در صفر درجهٔ سلسیوس =	$۱٫۳۱۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۳۳ \times ۱۰^{۴}$	۵٫۳۵۳	۱	۱۳۳۳	۰٫۱۹۳۴	۲۷٫۸۵
یک پاسکال =	$۹٫۸۶۹ \times ۱۰^{-۶}$	۱۰	$۴٫۰۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۵۰۱ \times ۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۴۵۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۰۸۹ \times ۱۰^{-۲}$
یک پوند بر اینچ مربع =	$۶٫۸۰۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۵٫۱۷۱	$۶٫۸۹۵ \times ۱۰^{۳}$	۱	۱۴۴
یک پوند بر فوت مربع =	$۴٫۷۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	۴۷۸٫۸	۰٫۱۹۲۲	$۳٫۵۹۱ \times ۱۰^{-۲}$	۴۷٫۸۸	$۶٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱

۱. هر جا که شتاب گرانی دارای مقدار متعارف ۹٫۸۰۶۶۵ متر بر مجذور ثانیه است.

یک بار = $۱۰^{۶}$ دین بر سانتی‌مترمربع = ۰٫۱ مگاپاسکال   یک میلی‌بار = $۱۰^{۳}$ دین بر سانتی‌مترمربع = $۱۰^{۲}$ پاسکال

یک تور = ۱ میلی‌متر جیوه

انرژی، کار، گرما

	Btu	erg	ft · lb	hp · h	J	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
یکای انگلیسی گرما =	۱	۱٫۰۵۵ $\times ۱۰^{۱۰}$	۷۷۷٫۹	۳٫۹۲۹ $\times ۱۰^{-۴}$	۱۰۵۵	۲۵۲٫۰	۲٫۹۳۰ $\times ۱۰^{-۴}$	۶٫۵۸۵ $\times ۱۰^{۲۱}$	۶٫۵۸۵ $\times ۱۰^{۱۵}$	۱٫۱۷۴ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۷٫۰۷۰ $\times ۱۰^{۱۲}$
یک ارگ =	۹٫۴۸۱ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۱	۷٫۳۷۶ $\times ۱۰^{-۸}$	۳٫۷۲۵ $\times ۱۰^{-۱۴}$	$۱۰^{-۷}$	۲٫۳۸۹ $\times ۱۰^{-۸}$	۲٫۷۷۸ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۱}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۵}$	۱٫۱۱۳ $\times ۱۰^{-۲۴}$	۶۷۰٫۲
یک فوت پوند =	۱٫۲۸۵ $\times ۱۰^{-۳}$	۱٫۳۵۶ $\times ۱۰^{۷}$	۱	۵٫۰۵۱ $\times ۱۰^{-۷}$	۱٫۳۵۶	۰٫۳۲۳۸	۳٫۷۶۶ $\times ۱۰^{-۷}$	۸٫۴۶۴ $\times ۱۰^{۱۸}$	۸٫۴۶۴ $\times ۱۰^{۱۲}$	۱٫۵۰۹ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۹٫۰۳۷ $\times ۱۰^{۹}$
یک اسب بخار ساعت =	۲۵۴۵	۲٫۶۸۵ $\times ۱۰^{۱۳}$	۱٫۹۸۰ $\times ۱۰^{۶}$	۱	۲٫۶۸۵ $\times ۱۰^{۶}$	۶٫۴۱۳ $\times ۱۰^{۵}$	۰٫۷۴۵۷	۱٫۶۷۶ $\times ۱۰^{۲۵}$	۱٫۶۷۶ $\times ۱۰^{۱۹}$	۲٫۹۸۸ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۱٫۷۹۹ $\times ۱۰^{۱۶}$
یک ژول =	۹٫۴۸۱ $\times ۱۰^{-۴}$	$۱۰^{۷}$	۰٫۷۳۷۶	۳٫۷۲۵ $\times ۱۰^{-۷}$	۱	۰٫۲۳۸۹	۲٫۷۷۸ $\times ۱۰^{-۷}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۸}$	۶٫۲۴۲ $\times ۱۰^{۱۲}$	۱٫۱۱۳ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۶٫۷۰۲ $\times ۱۰^{۹}$
یک کالری =	۳٫۹۶۹ $\times ۱۰^{-۳}$	۴٫۱۸۶ $\times ۱۰^{۷}$	۳٫۰۸۸	۱٫۵۶۰ $\times ۱۰^{-۶}$	۴٫۱۸۶	۱	۱٫۱۶۳ $\times ۱۰^{-۶}$	۲٫۶۱۳ $\times ۱۰^{۱۹}$	۲٫۶۱۳ $\times ۱۰^{۱۳}$	۴٫۶۶۰ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۲٫۸۰۶ $\times ۱۰^{۱۰}$
یک کیلووات ساعت =	۳۴۱۳	۳٫۶ $\times ۱۰^{۱۳}$	۲٫۶۵۵ $\times ۱۰^{۶}$	۱٫۳۴۱	۳٫۶ $\times ۱۰^{۶}$	۸٫۶۰۰ $\times ۱۰^{۵}$	۱	۲٫۲۴۷ $\times ۱۰^{۲۵}$	۲٫۲۴۷ $\times ۱۰^{۱۹}$	۴٫۰۰۷ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۲٫۴۱۳ $\times ۱۰^{۱۶}$
یک الکترون ولت =	۱٫۵۱۹ $\times ۱۰^{-۲۲}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۲}$	۱٫۱۸۲ $\times ۱۰^{-۱۹}$	۵٫۹۶۷ $\times ۱۰^{-۲۶}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۹}$	۳٫۸۲۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۴٫۴۵۰ $\times ۱۰^{-۲۶}$	۱	$۱۰^{-۶}$	۱٫۷۸۳ $\times ۱۰^{-۳۶}$	۱٫۰۷۴ $\times ۱۰^{-۹}$
یک مگا الکترون ولت =	۱٫۵۱۹ $\times ۱۰^{-۱۶}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۶}$	۱٫۱۸۲ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۵٫۹۶۷ $\times ۱۰^{-۲۰}$	۱٫۶۰۲ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۳٫۸۲۷ $\times ۱۰^{-۱۴}$	۴٫۴۵۰ $\times ۱۰^{-۲۰}$	$۱۰^{۶}$	۱	۱٫۷۸۳ $\times ۱۰^{-۳۰}$	۱٫۰۷۴ $\times ۱۰^{-۳}$
یک کیلوگرم =	۸٫۵۲۱ $\times ۱۰^{۱۳}$	۸٫۹۸۷ $\times ۱۰^{۲۳}$	۶٫۶۲۹ $\times ۱۰^{۱۶}$	۳٫۳۴۸ $\times ۱۰^{۱۰}$	۸٫۹۸۷ $\times ۱۰^{۱۶}$	۲٫۱۴۶ $\times ۱۰^{۱۶}$	۲٫۴۹۷ $\times ۱۰^{۱۰}$	۵٫۶۱۰ $\times ۱۰^{۳۵}$	۵٫۶۱۰ $\times ۱۰^{۲۹}$	۱	۶٫۰۲۲ $\times ۱۰^{۲۶}$
یکای جرم اتمی =	۱٫۴۱۵ $\times ۱۰^{-۱۳}$	۱٫۴۹۲ $\times ۱۰^{-۳}$	۱٫۱۰۱ $\times ۱۰^{-۱۰}$	۵٫۵۵۹ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۱٫۴۹۲ $\times ۱۰^{-۱۰}$	۳٫۵۶۴ $\times ۱۰^{-۱۱}$	۴٫۱۴۶ $\times ۱۰^{-۱۷}$	۹٫۳۲ $\times ۱۰^{۸}$	۹۳۲٫۰	۱٫۶۶۱ $\times ۱۰^{-۲۷}$	۱

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکاهای خاص انرژی نیستند ولی به مناسبت در اینجا ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم‌ارزی نسبیتی جرم‌ـانرژی $E = mc^۲$ به‌دست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی (u) به‌انرژی، به‌دست می‌دهند.

توان

	Btu/h	ft · lb/s	hp	cal/s	kW	W
یک یکای انگلیسی گرما بر ساعت =	۱	۰٫۲۱۶۱	۳٫۹۲۹ $\times ۱۰^{-۴}$	۶٫۹۹۸ $\times ۱۰^{-۲}$	۲٫۹۳۰ $\times ۱۰^{-۴}$	۰٫۲۹۳۰
یک فوت‌ـپوند بر ثانیه =	۴٫۶۲۸	۱	۱٫۸۱۸ $\times ۱۰^{-۳}$	۰٫۳۲۳۹	۱٫۳۵۶ $\times ۱۰^{-۳}$	۱٫۳۵۶
یک اسب بخار =	۲۵۴۵	۵۵۰	۱	۱۷۸٫۱	۰٫۷۴۵۷	۷۴۵٫۷
یک کالری بر ثانیه =	۱۴٫۲۹	۳٫۰۸۸	۵٫۶۱۵ $\times ۱۰^{-۳}$	۱	۴٫۱۸۶ $\times ۱۰^{-۳}$	۴٫۱۸۶
یک کیلووات ساعت =	۳۴۱۳	۷۳۷٫۶	۱٫۳۴۱	۲۳۸٫۹	۱	۱۰۰۰
یک وات =	۳٫۴۱۳	۰٫۷۳۷۶	۱٫۳۴۱ $\times ۱۰^{-۳}$	۰٫۲۳۸۹	۰٫۰۰۱	۱

شار مغناطیسی

	ماکسول	وبر (W)
۱ ماکسول =	۱	$۱۰^{-۸}$
۱ وبر =	$۱۰^{۸}$	۱

میدان مغناطیسی

	گاؤس	تسلا (T)	میلی‌گاؤس
۱ گاؤس =	۱	$۱۰^{-۴}$	۱۰۰۰
۱ تسلا =	$۱۰^{۴}$	۱	$۱۰^{۷}$
۱ میلی‌گاؤس =	۰٫۰۰۱	$۱۰^{-۷}$	۱

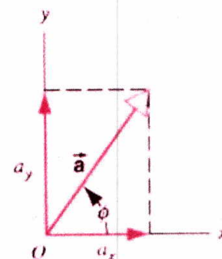
پیوست ح

بردارها

ح -۱ مؤلفه‌های بردار

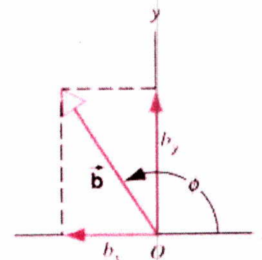
$$a_x = a\cos\phi \qquad a_y = a\sin\phi$$

$$a = \sqrt{a_x^{۲} + a_y^{۲}} \qquad \tan\phi = a_y/a_x$$



$$b_x = b\cos\phi\ (< ۰)$$

$$b_y = b\sin\phi\ (> ۰)$$



$$a_x = a\sin\theta\cos\phi$$

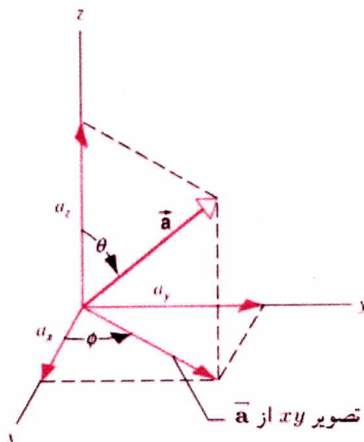
$$a_y = a\sin\theta\sin\phi$$

$$a_z = a\cos\theta$$

$$a = \sqrt{a_x^{۲} + a_y^{۲} + a_z^{۲}}$$

$$\tan\phi = a_y/a_x$$

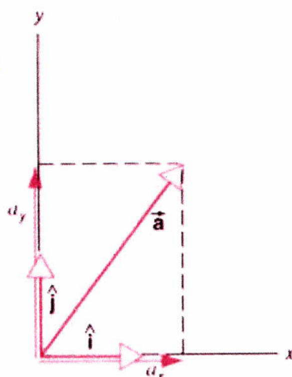
$$\cos\theta = a_z/a$$



ح -۲ بردارهای یکه

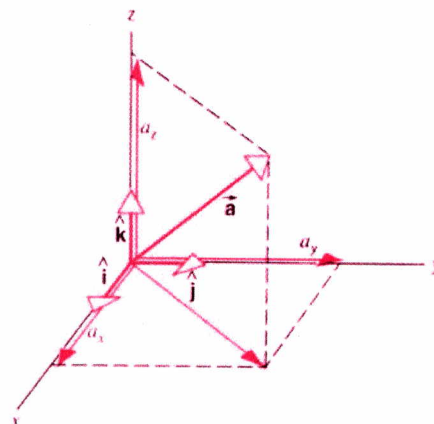
دکارتی دوبعدی

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$



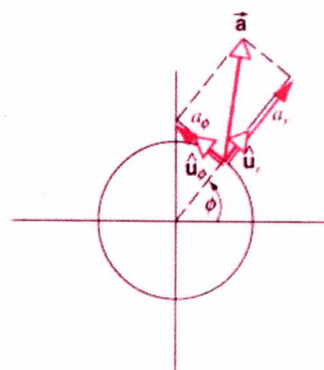
سه‌دکارتی سه‌بعدی

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$



قطبی دوبعدی

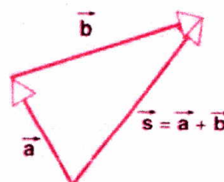
$$\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_\phi\hat{u}_\phi$$



ح -۳ جمع بردارها

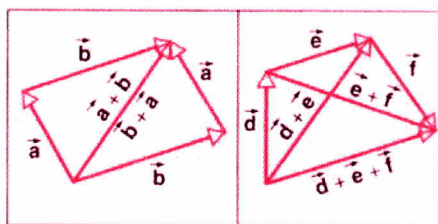
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$s_x = a_x + b_x \qquad s_y = a_y + b_y$$



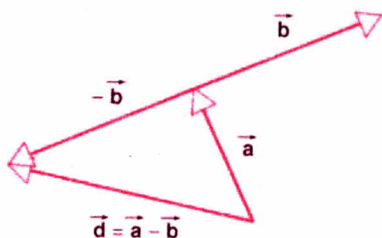
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(قانون جابه‌جایی)}$$

$$\vec{d} + (\vec{e} + \vec{f}) = (\vec{d} + \vec{e}) + \vec{f} \quad \text{(قانون انجمنی)}$$



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$d_x = a_x - b_x \qquad d_y = a_y - b_y$$



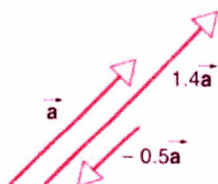
ح -۴ ضرب بردارها

ضرب بردار در یک اسکالر

$$\vec{b} = c\vec{a}$$

$$b_x = ca_x \qquad b_y = ca_y$$

$$b = |c|a$$



ضرب داخلی (یا اسکالر) دو بردار

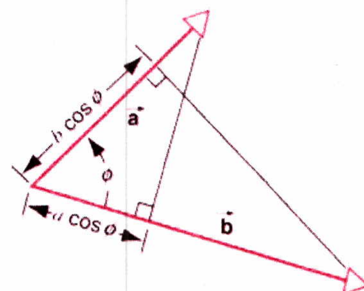
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi = a(b\cos\phi) = b(a\cos\phi)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = ۱$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = ۰$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

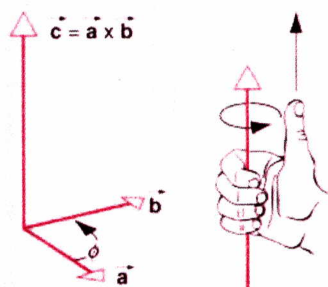


ضرب خارجی (۱ برداری) دو بردار

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$
$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\phi$$

جهت $\vec{c}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و با قاعده دست راست تعیین می‌شود.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$
$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$



$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$
$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s=\text{یک اسکالر})$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

پیوست ط

فرمولهای ریاضی

هندسه

دایره‌ای به شعاع r: محیط $= 2\pi r$؛ مساحت $= \pi r^2$

کره‌ای به شعاع r: مساحت $= 4\pi r^2$؛ حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

استوانهٔ قائمی به شعاع r و ارتفاع h:

مساحت $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$؛ حجم $= \pi r^2 h$

مثلثی با قاعدهٔ a و ارتفاع h: مساحت $= \frac{1}{2}ah$

معادلهٔ درجهٔ دو

$$ax^2 + bx + c = 0$$

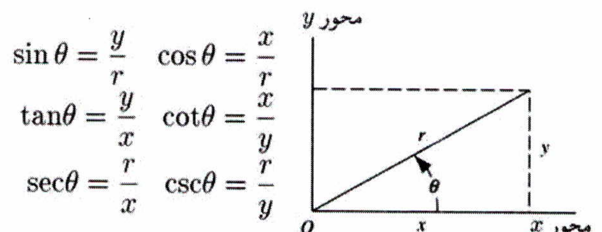
$$\Rightarrow\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

توابع مثلثاتی زاویهٔ θ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

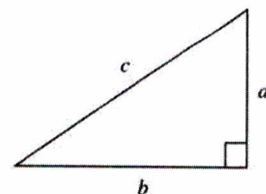
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



قضیهٔ فیثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$



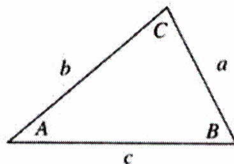
در مثلث

زاویه‌های A، B، C مقابل اضلاع a، b، c هستند.

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$



نشانه‌ها و نمادهای ریاضی

$=$ مساوی است با

$\approx$ تقریباً مساوی است با

$\sim$ از مرتبهٔ بزرگی است

$\neq$ مساوی نیست با (متفاوت است با)

$\equiv$ یکسان است با، طبق تعریف عبارت است از، متحد است با

$>$ بزرگتر است از ($\gg$ خیلی بزرگتر است از)

$<$ کوچکتر است از ($\ll$ خیلی کوچکتر است از)

$\geq$ بزرگتر است یا مساوی است با (یا کوچکتر نیست از)

$\leq$ کوچکتر است یا مساوی است با (یا بزرگتر نیست از)

$\pm$ به‌اضافه یا منهای ($\sqrt{4} = \pm 2$)

$\propto$ متناسب است با

$\sum$ علامت جمع

$\overline{x}$ مقدار متوسط x (همچنین x_{av})

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

بسط دوجمله‌ای

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \cdots (x^2 < 1)$$

بسط نمایی

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots (|x| < 1)$$

بسط مثلثاتی (θ برحسب رادیان)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

مشتقها و انتگرالها

در آنچه در اینجا می‌آید، u و v توابعی از x هستند و a و m مقادیر ثابت‌اند. به هر یک از انتگرالهای نامعین باید یک ثابت (اختیاری) انتگرال‌گیری اضافه کرد.

---

۱. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

۲. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$

۳. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

۴. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

۵. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

۶. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

۷. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

۸. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

۹. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

۱۰. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

۱۱. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

۱۲. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

۱۳. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

۱۴. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

۱۵. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

۱۶. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

۱. $\int dx = x$

۲. $\int au\,dx = a\int u\,dx$

۳. $\int (u+v)dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

۴. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\,(m \neq -1)$

۵. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$

۶. $\int u\dfrac{dv}{dx}dx = uv - \int v\dfrac{du}{dx}dx$

۷. $\int e^x dx = e^x$

۸. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

۹. $\int \cos x\,dx = \sin x$

۱۰. $\int \tan x\,dx = -\ln\cos x$

۱۱. $\int \sin^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x$

۱۲. $\int \cos^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x$

۱۳. $\int e^{-ax}dx = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$

۱۴. $\int xe^{-ax}dx = -\dfrac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

۱۵. $\int x^2e^{-ax}dx = -\dfrac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$

۱۶. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$

۱۷. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

۱۸. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}} = \dfrac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}$

پیوست ی

برندگان جایزهٔ نوبل

سال	نام		
۱۹۰۱	ویلهلم کنراد رونتگن Wilhelm Konrad Röntgen	(۱۸۴۵ – ۱۹۲۳)	به‌خاطر کشف پرتوهای x
۱۹۰۲	هندریک آنتون لورنتس Hendrik Antoon Lorentz	(۱۸۵۳ – ۱۹۲۸)	به‌خاطر پژوهشهایشان دربارهٔ اثر میدان مغناطیسی بر پدیده‌های تابشی.
	پیتر زیمان Pieter Zeeman	(۱۸۶۵ – ۱۹۴۳)	
۱۹۰۳	آنتوان هانری بکرل Antoine Henri Becquerel	(۱۸۵۲ – ۱۹۰۸)	به‌خاطر کشف پرتوزایی طبیعی.
	پیر کوری Pierre Curie	(۱۸۵۹ – ۱۹۰۶)	به‌خاطر پژوهشهای مشترکشان دربارهٔ پدیده‌های تابشی‌ای که توسط بکرل کشف شده بود.
	ماری اسکودوسکا-کوری Marie Sklowdowska-Curie	(۱۸۶۷ – ۱۹۳۴)	
۱۹۰۴	لرد ریلی (جان ویلیام استرات) Lord Rayleigh (John William Strutt)	(۱۸۴۲ – ۱۹۱۹)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد چگالی گازهای مهم و همچنین به‌خاطر کشف آرگون.
۱۹۰۵	فیلیپ ادوارد آنتون فون‌لنارد Philipp Eduard Anton von Lenard	(۱۸۶۲ – ۱۹۴۷)	به‌خاطر کارهایش در مورد پرتوهای کاتودی.
۱۹۰۶	جوزف جان تامسون Joseph John Thomson	(۱۸۵۶ – ۱۹۴۰)	به‌خاطر پژوهشهای نظری و تجربی‌اش در مورد رسانایی الکتریکی گازها.
۱۹۰۷	آلبرت آبراهام مایکلسون Albert Abraham Michelson	(۱۸۵۲ – ۱۹۳۱)	به‌خاطر طراحی اسبابهای اندازه‌گیری دقیق اپتیکی و پژوهشهایی که به کمک آنها انجام داد.
۱۹۰۸	گابریل لیپمان Gabriel Lippmann	(۱۸۴۵ – ۱۹۲۱)	به‌خاطر ابداع روش باز تولید رنگها با نورنگاری بر پایهٔ پدیده‌های تداخلی.
۱۹۰۹	گولیلمو مارکونی Guglielmo Marconi	(۱۸۷۴ – ۱۹۳۷)	به‌خاطر سهمی که در تکمیل تلگراف بی‌سیم داشتند.
	کارل فردیناند براون Carl Ferdinand Braun	(۱۸۵۰ – ۱۹۱۸)	
۱۹۱۰	یوهانس دیدریک وان‌دروالس Johannes Diderik van der Waals	(۱۸۳۷ – ۱۹۲۳)	به‌خاطر کارش در مورد معادلهٔ حالت گازها و مایعات.
۱۹۱۱	ویلهلم وین Wilhelm Wien	(۱۸۶۴ – ۱۹۲۸)	به‌خاطر تحقیقاتش دربارهٔ قوانین حاکم بر تابش گرمایی.
۱۹۱۲	نیلس گوستاو دالن Nils Gustaf Dalen	(۱۸۶۹ – ۱۹۳۷)	به‌خاطر اختراع تنظیم‌کننده‌های خودکار، که در فانوسهای دریایی و راهنماهای شناور به‌کار می‌رود.

سال	نام		علت
۱۹۱۳	هایک کامرلینگ اونس Heike Kamerlingh Onnes	(۱۸۵۳ – ۱۹۲۶)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد خواص ماده در دماهای پایین، که علاوه بر نتایج دیگر منجر به تولید هلیم مایع هم شد.
۱۹۱۴	ماکس فون لاؤ Max von Laue	(۱۸۷۹ – ۱۹۶۰)	به‌خاطر کشف پراش پرتوهای x از بلورها.
۱۹۱۵	ویلیام هنری براگ William Henry Bragg	(۱۸۶۲ – ۱۹۴۲)	به‌خاطر خدماتشان در تحلیل ساختارهای بلوری به‌وسیلهٔ پرتوهای x.
	ویلیام لارنس براگ William Lawrence Bragg	(۱۸۹۰ – ۱۹۷۱)	
۱۹۱۷	چارلز گلوور بارکلا Charles Glover Barkla	(۱۸۷۷ – ۱۹۴۴)	به‌خاطر کشف پرتوهای x مشخصهٔ عناصر.
۱۹۱۸	ماکس پلانک Max Planck	(۱۸۵۸ – ۱۹۴۷)	به‌خاطر کشف کوانتومهای انرژی.
۱۹۱۹	یوهانس اشتارک Johannes Stark	(۱۸۷۴ – ۱۹۵۷)	به‌خاطر کشف اثر دوپلر در پرتوهای مثبت و شکافتگی خطوط طیفی در میدانهای الکتریکی.
۱۹۲۰	شارل ادوارد گیوم Charles Edouard Guillaume	(۱۸۶۱ – ۱۹۳۸)	به‌خاطر کشف نابهنجاریها در آلیاژهای فولادی نیکل، که امکان اندازه‌گیریهای دقیقی را در فیزیک فراهم کرد.
۱۹۲۱	آلبرت اینشتین Albert Einstein	(۱۸۷۹ – ۱۹۵۵)	به‌خاطر خدماتش به فیزیک نظری، و بەویژه به‌خاطر کشف اثر فوتوالکتریک.
۱۹۲۲	نیلس بور Niels Bohr	(۱۸۸۵ – ۱۹۶۲)	به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار اتمها و تابشهای ناشی از آنها.
۱۹۲۳	رابرت اندروز میلیکان Robert Andrews Millikan	(۱۸۶۸ – ۱۹۵۳)	به‌خاطر تحقیقاتش در مورد بار الکتریکی بنیادی و اثر فوتوالکتریک.
۱۹۲۴	کارل مان‌گئورگ زیگبان Karl Manne George Siegbahn	(۱۸۸۶ – ۱۹۵۴)	به‌خاطر کشفها و پژوهشهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی پرتو ایکسی.
۱۹۲۵	جیمز فرانک James Franck	(۱۸۸۲ – ۱۹۶۴)	به‌خاطر کشف قوانین حاکم بر برخورد الکترون با اتم.
	گوستاو هرتز Gustav Hertz	(۱۸۸۷ – ۱۹۷۵)	
۱۹۲۶	ژان باتیست پرن Jean Baptiste perrin	(۱۸۷۰ – ۱۹۴۲)	به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار ناپیوستهٔ ماده و به‌خصوص کشف تعادل ته‌نشینی.
۱۹۲۷	آرتور هالی کامپتون Arthur Holly Compton	(۱۸۹۲ – ۱۹۶۲)	به‌خاطر کشف اثری که به نام خودش معروف شد.
	چارلز تامسون ریز ویلسون Charles Thomson Rees Wilson	(۱۸۶۹ – ۱۹۵۹)	به‌خاطر ابداع روش مرئی کردن مسیر ذرات باردار با چگالیدن بخار.
۱۹۲۸	اوئن ویلانز ریچاردسون Owen Willans Richardson	(۱۸۷۹ – ۱۹۵۹)	به‌خاطر تحقیق در بارهٔ پدیدهٔ گرمایونی و به‌خصوص به‌خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد.
۱۹۲۹	لویی–ویکتور دوبروی (Prince) Louis-Victor de Broglie	(۱۸۹۲ – ۱۹۸۷)	به‌خاطر کشف خصلت موجی الکترون.
۱۹۳۰	چاندراسکارا ونکاتا رامان (Sir) Chandrasekhara Venkata Raman	(۱۸۸۸ – ۱۹۷۰)	به‌خاطر کارهایش در مورد پراکنش نور و کشف اثری که به نام خود او معروف شد.
۱۹۳۲	ورنر هایزنبرگ Werner Heisenberg	(۱۹۰۱ – ۱۹۷۶)	به‌خاطر سهم مهمی که در ابداع مکانیک کوانتومی داشته است.

سال	برنده	تاریخ تولد و وفات	علت
۱۹۳۳	اروین شرودینگر Erwin Schrodinger	(۱۸۸۷ – ۱۹۶۱)	به‌خاطر کشف و ابداع شکلهای جدید و پربار نظریهٔ اتمی.
	پاؤل آدرین موریس دیراک Paul Adrien Maurice Dirac	(۱۹۰۲ – ۱۹۸۴)	
۱۹۳۵	جیمز چادویک James Chadwick	(۱۸۹۱ – ۱۹۷۴)	به‌خاطر کشف نوترون.
۱۹۳۶	ویکتور فرانتس هس Victor Franz Hess	(۱۸۸۳ – ۱۹۶۴)	به‌خاطر کشف تابش کیهانی.
	کارل دیوید آندرسون Carl David Anderson	(۱۹۰۵ – ۱۹۹۱)	به‌خاطر کشف پوزیترون.
۱۹۳۷	کلینتون جوزف دیویسون Clinton Joseph Davisson	(۱۸۸۱ – ۱۹۵۸)	به‌خاطر کشف تجربی پراش الکترونها توسط بلورها.
	جورج پاگت تامسون George Paget Thomson	(۱۸۹۲ – ۱۹۷۵)	
۱۹۳۸	انریکو فرمی Enrico Fermi	(۱۹۰۱ – ۱۹۵۴)	به‌خاطر نشان دادن پرتوزایی مصنوعی بعضی عناصر در اثر دریافت تابش نوترون، و کشف بعضی واکنشهای هسته‌ای که با تاباندن نوترونهای کند ایجاد می‌شود.
۱۹۳۹	ارنست اورلاندو لارنس Ernest Orlndo Lawrence	(۱۹۰۱ – ۱۹۵۸)	به‌خاطر اختراع و تکمیل سیکلوترون و نتایج حاصل از آن، به‌خصوص در بارهٔ عناصر پرتوزای مصنوعی.
۱۹۴۳	اوتو اشترن Otto Stern	(۱۸۸۸ – ۱۹۶۹)	به‌خاطر سهمش در ابداع روش پرتو مولکولی و به خاطر کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.
۱۹۴۴	ایزیدور ایزاک رابی Isidor Isaac Rabi	(۱۸۹۸ – ۱۹۸۸)	به‌خاطر ابداع روش تشدید برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.
۱۹۴۵	ولفگانگ پائولی Wolfgang Pauli	(۱۹۰۰ – ۱۹۵۸)	به‌خاطر کشف اصل طرد، که به اصل پائولی هم معروف است.
۱۹۴۶	پرسی ویلیامز بریجمن Percy Williams Bridgman	(۱۸۸۲ – ۱۹۶۱)	به‌خاطر اختراع وسیله‌ای برای تولید فشارهای فوق‌العاده زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینهٔ فیزیک فشارهای بالا داشته است.
۱۹۴۷	سر ادوارد ویکتور اپلتون Sir Edward Victor Appleton	(۱۸۹۲ – ۱۹۶۵)	به‌خاطر پژوهشهایش در مورد فیزیک جو بالایی، به‌خصوص به‌خاطر کشف لایهٔ معروف به اپلتون.
۱۹۴۸	پاتریک مینارد استوارت بلاکت Patrick Maynard Stuart Blackett	(۱۸۹۷ – ۱۹۷۴)	به‌خاطر تکمیل روش اتاقک ابر ویلسون، و واقعیتهایی که به وسیلهٔ این روش در زمینه‌های فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی کشف کرد.
۱۹۴۹	هیدکی یوکاوا Hideki Yukawa	(۱۹۰۷ – ۱۹۸۱)	به‌خاطر پیشگویی وجود مزونها بر پایهٔ تحقیقات نظری‌اش در بارهٔ نیروهای هسته‌ای.
۱۹۵۰	سیسل فرانک پاول Cecil Frank Powell	(۱۹۰۳ – ۱۹۶۹)	به‌خاطر تکمیل روش نورنگاشتی مطالعهٔ فرایندهای هسته‌ای و کشفهایش در مورد مزونها با استفاده از این روش.
۱۹۵۱	جان داگلاس کاکرافت (Sir) John Douglas Cockcroft	(۱۸۹۷ – ۱۹۶۷)	به‌خاطر کار پیشگامانه‌شان در مورد استحالهٔ هسته‌های اتمی به‌وسیلهٔ ذرات اتمی شتابدار.
	ارنست توماس سینتون والتون Ernest Thomas Sinton Walton	(۱۹۰۳ – ۱۹۹۵)	
۱۹۵۲	فلیکس بلوخ Felix Bloch	(۱۹۰۵ – ۱۹۸۳)	به‌خاطر طرح روشهای نو برای آزمایشهای دقیق مغناطیسی هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.

سال	نام	تاریخ تولد و وفات / نام لاتین	علت
	ادوارد میلز پورسل	(۱۹۱۲ – ۱۹۹۷) Edward Mills Purcell	
۱۹۵۳	فریتس زرنیکه	(۱۸۸۸ – ۱۹۶۶) Frits Zernike	به‌خاطر ارائه روش تباین فاز، به‌خصوص به‌خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.
۱۹۵۴	ماکس بورن	(۱۸۸۲ – ۱۹۷۰) Max Born	به‌خاطر پژوهشهای بنیادی‌اش در مکانیک کوانتومی، به‌خصوص به‌خاطر تعبیر آماری تابع موج.
	والتر بوث	(۱۸۹۱ – ۱۹۵۷) Walther Bothe	به‌خاطر ابداع روش تطابق و کشفهایش با استفاده از این روش.
۱۹۵۵	ویلیز اوژن لمب	(۱۹۱۳–) Willis Eugne Lamb	به‌خاطر کشفهایش در مورد ساختار ریز طیف هیدروژن.
	پولی کارپ کوش	(۱۹۱۱ – ۱۹۹۳) Polykarp Kusch	به‌خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.
۱۹۵۶	ویلیام شاکلی	(۱۹۱۰ – ۱۹۸۹) William Shockley	به‌خاطر پژوهشهایشان در بارهٔ نیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.
	جان باردین	(۱۹۰۸ – ۱۹۹۱) John Bardeen	
	والتر هاوزر براتین	(۱۹۰۲ – ۱۹۸۷) Walter Houser Brattain	
۱۹۵۷	چن نینگ یانگ	(۱۹۲۲–) Chen Ning Yang	به‌خاطر پژوهش بینادی‌شان در مورد قوانین پاریته که منجر به کشفهای مهمی در مورد ذرات بنیادی شد.
	تسونگ دائولی	(۱۹۲۶–) Tsung Dao Lee	
۱۹۵۸	پاول آلکسیویچ چرنکوف	(۱۹۰۴ – ۱۹۹۰) Pavel Aleksejevic Cerenkov	به‌خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.
	ایلیا میخائیلویچ فرانک	(۱۹۰۸ – ۱۹۹۰) Il'ja Michajlovic Frank	
	ایگور ایوانویچ تام	(۱۸۹۵ – ۱۹۷۱) Igor Evgen'evic Tamm	
۱۹۵۹	امیلیو جینو سگری	(۱۹۰۵ – ۱۹۸۹) Emilio Gino Segre	به‌خاطر کشف پادپروتون.
	اوئن چمبرلین	(۱۹۲۰–) Owen chamberlian	
۱۹۶۰	دونالد آرتور گلیزر	(۱۹۲۶–) Donald Arthur Glaser	به‌خاطر اختراع اتاقک حباب.
۱۹۶۱	روبرت هوفشتاتر	(۱۹۱۵ – ۱۹۹۰) Robert Hofstadter	به‌خاطر مطالعات بدیع‌اش در مورد پراکنش الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایش در بارهٔ ساختار نوکلئونها.
	رودولف لودویگ موسبائر	(۱۹۲۹–) Rudolf Ludwig Mössbauer	به‌خاطر تحقیقاتش در مورد جذب تشدیدی پرتوهای گاما و کشف اثری در همین زمینه که به نام خود او معروف شده است.
۱۹۶۲	لف داویدویچ لانداؤ	(۱۹۰۸ – ۱۹۶۸) Lev Davidovic Landau	به‌خاطر نظریه‌های بدیع‌اش در بارهٔ مادهٔ چگال، به‌خصوص در مورد هلیوم مایع.
۱۹۶۳	یوجین پال ویگنر	(۱۹۰۲ – ۱۹۹۵) Eugene Paul Wigner	به‌خاطر سهمش در تدوین نظریهٔ هستهٔ اتم و ذرات بنیادی، به‌خصوص از طریق کشف و کاربرد اصول بنیادی تقارن.

سال	نام	تاریخ	علت
	ماریا جو پرت مایر Maria Goeppert Mayer	(۱۹۰۶ – ۱۹۷۲)	به‌خاطر کشفهایشان در مورد ساختار پوسته‌ای هسته.
	جی. هانس. دی. ینسن J. Hans D. Jensen	(۱۹۰۷ – ۱۹۷۳)	
۱۹۶۴	چارلز تاونز Charles H. Townes	(۱۹۱۵–)	به‌خاطر کارهای اساسی در زمینهٔ الکترونیک کوانتومی، که منجر به ساخت نوسانگرها و تقویت‌کننده‌ها بر پایه اصل میزر-لیزر شد.
	نیکولای باسوف Nikolai G. Basov	(۱۹۲۲–)	
	الکساندر پرو خوروف Alexander M. Prochorov	(۱۹۱۶–)	
۱۹۶۵	سن-ایتیر و توماناگا Sin- Itiro Tomonaga	(۱۹۰۶ – ۱۹۷۹)	به‌خاطر تحقیقات بنیادی‌شان در زمینهٔ الکترودینامیک کوانتومی که پیامدهای ژرفی در فیزیک ذرات بنیادی داشت.
	جولیان شوینگر Julian Schwinger	(۱۹۱۸ – ۱۹۹۴)	
	ریچارد فاینمن Richard P. Feynman	(۱۹۱۸ – ۱۹۸۸)	
۱۹۶۶	آلفرد کاستلر Alfred Kastler	(۱۹۰۲ – ۱۹۸۴)	به‌خاطر کشف و توسعهٔ روشهای اپتیکی برای مطالعهٔ تشدید هرتزی در اتمها.
۲۹۶۷	هانس آلبرشت بته Hans Albrecht Bethe	(۱۹۰۶–)	به‌خاطر مشارکتهایش در نظریهٔ واکنشهای هسته‌ای، به‌خصوص کشفهایش در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.
۱۹۶۸	لوئیس آلوارز Luise W. Alvarez	(۱۹۱۱ – ۱۹۸۸)	به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌اش در توسعهٔ فیزیک ذرات بنیادی، به‌خصوص با کشف تعداد زیادی از حالتهای تشدیدی.
۱۹۶۹	موری گل-مان Murray Gell-Mann	(۱۹۲۹ – ۱۹۹۵)	به‌خاطر مشارکتش در طبقه‌بندی ذرات بنیادی و برهم‌کنشهای آنها، و کشفهایش در این مورد.
۱۹۷۰	هانس آلون Hannes Alfven	(۱۹۰۸–)	به‌خاطر کار اساسی و کشفهایش در زمینهٔ مغناطوهیدرودینامیک، با کاربردهای مفید در فیزیک پلاسما.
	لویی نل Louis Neel	(۱۹۰۴–)	به‌خاطر پژوهش بنیادی و کشفهایش در بارهٔ پادفرومغناطیس و فری‌مغناطیس، با کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد.
۱۹۷۱	دنیس گابور Dennis Gabor	(۱۹۰۰ – ۱۹۷۹)	به‌خاطر کشف اصول تمام‌نگاری (هولوگرافی).
۱۹۷۲	جان باردین John Bardeen	(۱۹۰۸ – ۱۹۹۱)	به‌خاطر پرداختن نظریه‌ای برای ابررسانایی
	لئون کوپر Leon N. Cooper	(۱۹۳۰–)	
	رابرت شریفر J. Robert Schrieffer	(۱۹۳۱–)	
۱۹۷۳	لئو ایزاکی Leo Esaki	(۱۹۲۵–)	به‌خاطر کشف پدیدهٔ تونل‌زنی در نیمرساناها.
	ایوار جیاور Ivar Giaever	(۱۹۲۹–)	به‌خاطر کشف پدیدهٔ تونل‌زنی در ابررساناها.
	برایان جوزفسون Brian D. Josephson	(۱۹۴۰–)	به‌خاطر پیشگویی نظری خصوصیات عبور ابر جریان از سد تونلی.

۱۹۷۴	آنتونی هیویش Antony Hewish	(۱۹۲۴–)	به‌خاطر کشف تپ‌اخترها.
	مارتین رایل (Sir) Martin Ryle	(۱۹۱۸ – ۱۹۸۴)	به‌خاطر کار پیشگامانه‌اش در زمینهٔ نجوم رادیویی.
۱۹۷۵	آگه بور Aage Bohr	(۱۹۲۲–)	به‌خاطر کشف ارتباط میان حرکت جمعی و حرکت ذره، و تدوین نظریه‌ای در مورد ساختار هستهٔ اتم بر این اساس.
	بن ماتلسون Ben Mottelson	(۱۹۲۶–)	
	جیمز رینواتر James Rainwater	(۱۹۱۷ – ۱۹۸۶)	
۱۹۷۶	برتون ریشتر Burton Richter	(۱۹۳۱–)	به‌خاطر کشف یک ذرهٔ بنیادی مهم (به‌طور مستقل).
	ساموئل چائوچونگ تینگ Samuel Chao Chung Ting	(۱۹۳۶–)	
۱۹۷۷	فیلیپ وارن اندرسون Philip Warren Anderson	(۱۹۲۳–)	به‌خاطر تحقیقات نظری بنیادی‌شان دربارهٔ ساختار الکترونی سیستمهای مغناطیسی و سیستمهای نامنظم.
	نویل فرانسیس موت Nevil Francis Mott	(۱۹۰۵ – ۱۹۹۶)	
	جان هاسبروگ وان ولک	(۱۸۹۹ – ۱۹۸۰)	
۱۹۷۸	پیتر کاپیتزا Peter L. Kapitza	(۱۸۹۴ – ۱۹۸۴)	به‌خاطر ابداعات و کشفهای اساسی در فیزیک دماهای پایین.
	آرنو پنزیاس Arno N. Penzias	(۱۹۲۶–)	به‌خاطر کشف تابش میکروموجی زمینهٔ کیهانی.
	رابرت وودرو ویلسون Robert Woodrow Wilson	(۱۹۳۶–)	
۱۹۷۹	شلدون لی گلاشو Sheldon lee Glashow	(۱۹۳۲–)	به‌خاطر تدوین مدل وحدت‌یافتهٔ نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی، و به‌خاطر پیشگویی وجود جریانهای خنثی.
	عبدالسلام Abdus Salam	(۱۹۲۶ – ۱۹۹۶)	
	استیون واینبرگ Steven Weinberg	(۱۹۳۳–)	
۱۹۸۰	جیمز کرونین James W. Cronin	(۱۹۳۱–)	به‌خاطر کشف موارد نقض اصول تقارن بنیادی در واپاشی مزونهای Kی خنثی.
	وال فیچ Val L. Fitch	(۱۹۲۳–)	
۱۹۸۱	نیکولاس بلومبرگن Nicolaas Bloembergen	(۱۹۲۰–)	به‌خاطر سهمشان در تکمیل طیف‌نمایی لیزری.
	آرتور لئونارد شاؤلو Arthur Leonard Schawlow	(۱۹۲۱ – ۱۹۹۹)	
	کای زیگبان Kai M. Siegbahn	(۱۹۱۸ – ۱۹۹۹)	به‌خاطر کارهایش در پیشبرد طیف‌نمایی الکترونی با توان تفکیک زیاد.
۱۹۸۲	کنت گدِس ویلسون Kenneth Geddes Wilson	(۱۹۳۶–)	به‌خاطر ابداع روشی برای تحلیل پدیده‌های بحرانی.

سال	نام		توضیح
۱۹۸۳	سوبرامانیان چاندراسکار Subrehmanyan Chandrasekhar	(۱۹۱۰ – ۱۹۹۵)	به‌خاطر مطالعات نظری‌اش دربارهٔ ساختار و تحول ستاره‌ها.
	ویلیام فاؤلر William A. Fowler	(۱۹۱۱ – ۱۹۹۵)	به‌خاطر مطالعاتش در مورد تشکیل عناصر شیمیایی در عالم.
۱۹۸۴	کارلو روبیا Carlo Rubbia	(–۱۹۳۴)	به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌شان در "پروژهٔ بزرگ "که به کشف ذرات میدانی W و Z منجر شد.
	سایمون وان درمیر Simon Van Der Meer	(–۱۹۲۵)	
۱۹۸۵	کلاؤس فون کلیتسینگ Klaus von Klizing	(–۱۹۴۳)	به‌خاطر کشف اثر کوانتومی هال.
۱۹۸۶	ارنست روسکا Ernst Ruska	(۱۹۰۶ – ۱۹۸۸)	به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.
	گرد بینیگ Gerd Binnig	(–۱۹۴۷)	به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی تونلی روبشی.
	هاینریش روهرر Heinrich Rohrer	(–۱۹۳۳)	
۱۹۸۷	کارل آلکس مولر Karl Alex Müller	(–۱۹۲۷)	به‌خاطر کشف ابررسانایی گرم.
	گئورگ بدنورز J. Georg Bednorz	(–۱۹۵۰)	
۱۹۸۸	لیون لدرمن Leon M. Lederman	(–۱۹۲۲)	به‌خاطر آزمایشهایشان با باریکه‌های نوترینو و کشف نوترینوی موئون.
	ملوین شوارتز Melvin Schwartz	(–۱۹۳۲)	
	جک استینبرگر Jack Steinberger	(–۱۹۲۱)	
۱۹۸۹	هانس دهملت Hans G. Dehmelt	(–۱۹۲۲)	به‌خاطر ابداع فنی برای دام‌اندازی اتمهای منفرد
	ولفگانگ پاؤل Wolfgang Paul	(۱۹۱۳ – ۱۹۹۳)	
	نورمن رمزی Norman F. Ramsey	(–۱۹۱۵)	به‌خاطر کشفهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی تشدیدی اتمی، که به‌ساخت میرزهیدروژن و ساعت اتمی منجر شد.
۱۹۹۰	ریچارد تیلور Richard E. Taplor	(–۱۹۲۹)	به‌خاطر آزمایشهایشان دربارهٔ پراکنش الکترونها از هسته‌ها، که حاکی از حضور کوارک در نوکلئونهاست.
	جرومی فریدمن Jerome I. Friedman	(–۱۹۳۰)	
	هنری کندال Henry W. Kendall	(۱۹۲۶ – ۱۹۹۹)	
۱۹۹۱	پی‌یر ژیل دژن Pierre-Gilles de Gennes	(–۱۹۳۲)	به‌خاطر کشفهایی در مورد آرایش مولکولها در موادی مثل بلورهای مایع، ابررساناها، و پولیمرها.
۱۹۹۲	ژرژ شارپاک Georges Charpak	(–۱۹۲۴)	به‌خاطر موفقیتهایش در طراحی آشکارسازهای الکترونیکی سریع برای ذرات پرانرژی

۱۹۹۳	جوزف ا. ج تیلور	۱۹۴۱–	برای کشف و تفسیر اولین تپ‌اختر دوتایی
	راسل ا. هالس	۱۹۵۰–	
۱۹۹۴	برترام ان. بروکهاوس	۱۹۱۸–	برای توسعهٔ روشهای پراکندگی نوترون
	کلیفورد جی. شول	۱۹۱۵–	
۱۹۹۵	مارتین ال. پرل	۱۹۲۷–	برای کشف لپتون تأو
	فردریک راینس	۱۹۹۸ – ۱۹۱۸	برای آشکارسازی نوترینو
۱۹۹۶	دیوید ام. لی	۱۹۳۱–	برای کشف اَبَرشارگی در ^{3}He
	داگلاس ام. اوشراف	۱۹۴۵–	
	رابرت سی. ریچاردسون	۱۹۳۷–	
۱۹۹۷	استیون چو	۱۹۴۸–	برای توسعه روشهای خنک‌سازی و به‌دام انداختن اتمها با نور لیزر
	کلود کوهن-تانوچی	۱۹۳۳–	
	ویلیام دی. فیلیپس	۱۹۴۸–	
۱۹۹۸	رابرت بی. لافلین	۱۹۵۰–	برای کشف شکل جدیدی از شارهٔ کوانتومی با برانگیختگیهای دارای بار کسری
	هورست ال. استورمر	۱۹۴۹–	
	دانیل سی. دزویی	۱۹۳۹–	
۱۹۹۹	گراؤس توفت	۱۹۴۶–	برای توضیح ساختار کوانتومی برهم‌کنشهای الکتروضعیف در فیزیک
	مارتینوس ج. جی. فلتمن	۱۹۳۹–	
۲۰۰۰	ژورس ای. آلفروف	۱۹۳۰–	برای توسعهٔ نیمرساناهای با ساختار ناهمگن
	هربرت کرومر	۱۹۲۸–	به‌کار رفته در سرعتهای زیاد و اوپتو، الکترونیک.
	جک اس. کیلبی	۱۹۲۳–	برای نقش او در اختراع مدار یکپارچه

پاسخ به تمرینها و مسئله‌های فرد

فصل ۲۵

تمرینها

۱. ۰٫۵۰C. ۳. ۲٫۷۴N. ۵. (الف) ۱٫۷۷N؛ (ب) ۳٫۰۷N.

۷. $q_1 = -4q_2$. ۹. ۲۴٫۵N، در امتداد نیمساز زاویه.

۱۱. در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۸۲٫۳cm از بار مثبت و ۱۴۴cm از بار منفی. ۱۵. (الف) $\vec{\mathbf{F}} = F_z\hat{\mathbf{k}}$.

(ب) $(2q_0 q/4\pi\epsilon_0 R^2)[1 - [z^2/(z^2+R^2)]^{1/2}](z/|z|)\hat{\mathbf{k}}$.

۱۷. در امتداد محور y در فاصلهٔ $(y^4 + y^2L^2/4)^{1/4}$

(الف) در سمت راست بار q_1 یا (ب) در سمت چپ بار q_0.

۱۹. $F_z = -(q_0\lambda/2\pi\epsilon_0)[1/y - 1/(y^2+L^2/4)^{1/2}]$

۲۱. (الف) بور؛ (ب) نیتروژن؛ (ج) کربن. ۲۳. ۲٫۸۹nN.

۲۵. ۳٫۸N. ۲۷. ۵٫۰۸m زیر الکترون. ۲۹. ۱۳٫۴MC.

۳۱. (الف) ۵۷٫۱TC، نه؛ (ب) ۵۹۸ تن متریک.

مسئله‌ها

۱. ۱٫۰۰μC و ۳٫۰۰μC، ولی با علامت مخالف.

۳. (الف) یک بار $-4q/9$ باید روی پاره‌خطی که دو بار مثبت را به‌هم وصل می‌کند قرار داده شود، و در فاصلهٔ $L/3$ از بار $+q$.

۵. (ب) ۲٫۹۶cm. ۷. $q = Q/2$. ۹. $(\pi^3 m\epsilon_0 d^3/2qQ)^{1/2}$.

۱۱. $a/\sqrt{2}$.

فصل ۲۶

تمرینها

۱. ۱۰٫۵mN/C، به‌سمت غرب. ۳. ۲۰۳nN/C، بالا.

۵. ۱۴۴pC.

۷. ۱۹٫۵kN/C. ۹. ۹ : ۳۰. ۱۳. $R/\sqrt{3}$. ۱۵. (الف) ۱۰۴nC؛

(ب) 1.31×10^{17}؛ (ج) 4.96×10^{-6}. ۱۷. (الف) ۶٫۵۰cm؛

(ب) ۴٫۸۰μC. ۲۳. به طرف راست. ۲۷. (الف) ۶٫۵۳cm؛

(ب) ۲۶٫۹ns. (ج) ۰٫۱۲۱.

۲۹. (الف) ۵۸۵kN/C، به‌سمت بار منفی؛ (ب) ۹۳٫۶fN، به‌سمت بار مثبت. ۳۱. $5e$.

۳۳. $1.64 \times 10^{-19}\mathrm{C}$ (≈ ٪۲٫۵ بالا). ۳۵. ۱٫۲mm.

۳۷. (الف) صفر؛ (ب) $8.5 \times 10^{-22}\,\mathrm{N\cdot m}$؛ (ج) صفر.

مسئله‌ها

۱. (ب) موازی با $\vec{\mathbf{p}}$. ۳. (الف) $qz/4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}$؛

(ب) $(q_1-q_2)R/2\pi^2\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}$. ۵. $+q$ در $z=+2a$ و $z=-2a$، $-4q$ در $z=+a$ و $z=-a$، $+6q$ در $z=0$.

۱۱. صفحهٔ بالایی؛ ۴٫۰۶cm. ۱۳. $2pE\cos\theta_0$.

۱۵. (الف) $8q/\pi\epsilon_0 a^3$.

فصل ۲۷

تمرینها

۱. $-7.8\,\mathrm{mN\cdot m^2/C}$. ۳. (الف) $-\pi R^2E$؛ (ب) πR^2E.

۵. $208\,\mathrm{kN\cdot m^2/C}$. ۷. $q/6\epsilon_0$. ۹. ۴٫۶μC.

۱۳. (الف) ۳۲۲nC؛ (ب) ۱۴۳nC. ۱۵. (الف) صفر؛ (ب) σ/ϵ_0، به‌سمت چپ؛ (ج) صفر.

۱۷. $5.09\,\mu\mathrm{C/m^3}$. ۱۹. ‎−۱٫۱۳nC.

۲۱. (الف) ۲٫۱۹MN/C، شعاعی به طرف خارج؛

(ب) ۴۳۶kN/C، شعاعی به طرف داخل.

۲۳. ۹۷٫۹cm. ۲۵. (ب) $\rho R^2/2\epsilon_0 r$. ۲۷. (الف) $452\,\mathrm{nC/m^2}$؛

(ب) ۵۱٫۱kN/C. ۲۹. (الف) ۵۳MN/C؛ (ب) ۶۰N/C.

مسئله‌ها

۳. $5.11\,\mathrm{nC/m^2}$. ۵. (الف) $q/2\pi\epsilon_0 Lr$، شعاعی به‌سمت داخل؛

(ب) $-q$ روی هر دو سطح داخلی و خارجی؛ (ج) $q/2\pi\epsilon_0 Lr$، شعاعی به‌سمت خارج.
۷. (الف) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$؛ (ب) صفر. ۹. ۲۷۰eV.
۱۱. (الف) $q/4\pi\epsilon_0 r^2$؛ (ب) $q/4\pi\epsilon_0 r^2$؛ (ج) فقط در داخل خود پوسته؛ (د) بله، بارها روی سطوح القا شده‌اند؛ (هـ) نه؛ (ز) نه.
۱۳. $q/2\pi a^2$. ۱۹. (الف) $-Q$؛ (ب) $-Q$؛ (ج) $-(Q+q)$؛ (د) بله.

فصل ۲۸

تمرینها

۱. (الف) ۴۸۴keV؛ (ب) صفر.
۳. (الف) ۲۷٫۲fJ؛ (ب) ۳٫۰۲ × 10^{-31}kg، با ضریبی در حدود ۳ خطا دارد. ۵. (الف) ۳٫۰kN؛ (ب) ۲۴۰MeV.
۷. (الف) ۳۰GJ؛ (ب) ۷٫۱km/s؛ (ج) ۹٫۰ × 10^{4}kg.
۹. ۲٫۶km/s. ۱۱. (الف) ۲۷٫۲V؛ (ب) −۲۷٫۲eV؛ (ج) ۱۳٫۶eV؛ (د) ۱۳٫۶eV. ۱۳. (الف) ۲۴٫۴kV/m؛ (ب) ۲٫۹۳kV. ۱۵. (الف) ۱۳۲MV/m؛ (ب) ۸٫۴۳kV/m.
۱۷. (الف) −۳٫۸۵kV؛ (ب) −۳٫۸۵kV. ۱۹. ۳۲MeV.
۲۱. −۱٫۱nC. ۲۳. ۶۳۷MV.
۲۵. (الف) $qd/2\pi\epsilon_0 a(a+d)$.
۲۷. (الف) ۲٫۷۶MV؛ (ب) ۵٫۲۷J؛ (ج) ۷٫۳۵J.
۲۹. ۱۸۶pJ. ۳۱. ۷۴۶V/m. ۳۳. −۲/۳ × 10^{21}V/m.
۳۵. −۳۹٫۲V/m. ۳۷. (الف) ۲٫۴۶V؛ (ب) ۲٫۴۶V؛ (ج) صفر. ۴۳. (الف) −۱۱۵mV؛ (ب) ۱۸٫۱nVm.
۴۵. (الف) ۳٫۶۴nC؛ (ب) ۱۲٫۵nC/m^2.
۴۷. (الف) کره بزرگ: ۳۸٫۶nC، کره کوچک: ۱۸٫۶nC؛ (ب) هر کدام ۲٫۸۴kV.
۴۹. (الف) ۱۱۰μC، ۱٫۱μC؛ (ب) ۸٫۷۵μCm^2، ۸٫۷۵μC/m^2.

مسئله‌ها

۱. (الف) ۲۵۶kV؛ (ب) ۰٫۷۴۵C.
۳. $(qQ/8\pi\epsilon_0)(1/r_1 - 1/r_2)$.
۵. ۲٫۱۷d. ۷. (الف) ۵۶۲μm؛ (ب) ۸۱۳V.
۹. (الف) −۵٫۴۰nm؛ (ب) ۹٫۰۰nm؛ (ج) نه
۱۳. (الف) $(k/4\pi\epsilon_0)[(L^2+y^2)^{1/2}-y]$؛
(ب) $(k/4\pi\epsilon_0)[1-y/(L^2+y^2)^{1/2}]$؛ (ج) $0{,}75L$.

۱۵. ۲٫۰ × 10^{-8}. ۱۷. (الف) صفر؛ (ب) صفر؛ (ج) صفر؛ (د) صفر؛ (هـ) صفر.

فصل ۲۹

تمرینها

۱. (الف) ۱٫۳۳kC؛ (ب) ۸٫۳۱ × 10^{21}.
۳. (الف) ۹٫۴۱A/m^2، شمال. ۵. ۰٫۴۰۰mm.
۷. ۰٫۶۷A، به سمت پایانهٔ منفی.
۹. (الف) ۶۵۴nA/m^2؛ (ب) ۸۳٫۴MA.
۱۱. ۰٫۵۹Ω. ۱۳. ۵۲٫۵min.
۱۵. (الف) ۱٫۵kA؛ (ب) ۵۳MA/m^2؛
(ج) ۱۱۰nΩ·m، پلاتین. ۱۹. ۳.
۲۱. (الف) ۶٫۰۰mA؛ (ب) ۱۵٫۹nV؛ (ج) ۲۱٫۲nΩ.
۲۳. ۱۱۹۰$(\Omega\cdot m)^{-1}$. ۲۵. (الف) مس: ۵۵٫۳A/cm^2، آلومینیم: ۳۴٫۰A/cm^2؛ (ب) مس: ۱٫۰۱kg، آلومینیم: ۴۹۵g.
۲۷. (الف) ۸٫۵۲kΩ؛ (ب) ۴٫۵۱μA.
۲۹. (الف) ۷٫۶۵ × 10^{5}N/C؛ (ب) ۳٫۶۰ × 10^{6}N/C؛
(ج) ۲٫۵۱ × 10^{-5}C/m^2.
۳۱. (الف) $R(3\times 10^{6}\,V/m)$.

مسئله‌ها

۱. ۷٫۱ms. ۳. (الف) ۳۸۰μV؛ (ب) منفی؛
(ج) ۴٫۳ دقیقه. ۵. (الف) ۹۵٫۰μC؛ (ب) ۱۵۸C°.
۷. (الف) ۲۵۰C°. ۹. ۵۴Ω. ۱۱. (الف) نقره؛ (ب) ۶۰٫۸nΩ.
۱۳. $R=(\rho/4\pi)(1/a-1/b)$. ۱۵. ۰٫۳۶.

فصل ۳۰

تمرینها

۱. ۷٫۵pC. ۳. ۳٫۲۵mC. ۵. ۰٫۵۴۶pF.
۷. (الف) ۸۴٫۵pF؛ (ب) ۱۹۱cm^2. ۹. ۹۰۹۰.
۱۱. ۷٫۱۷μF. ۱۳. (الف) ۲٫۴μF؛ (ب) $q_4=q_6=480\mu C$؛
(ج) $\Delta V_4=120V$، $\Delta V_6=80V$.
۱۵. (الف) $d/3$؛ (ب) $3d$.
۱۷. (الف) ۹۴۲μC؛ (ب) ۹۱٫۴V. ۲۱. ۲۶۴ ریال.
۲۳. (الف) ۲۸٫۶pF؛ (ب) ۱۷٫۹nC؛ (ج) ۵٫۵۹μJ؛
(د) ۷۴٫۱mJ/m^3. ۲۵. ۴۸۲kV/m.
۲۹. ۳٫۸۹. ۳۱. ورقهٔ میکا. ۳۳. ۸۶٫۳nF.
۳۵. (الف) ۷۳۰pF؛ (ب) ۲۸kV.

۳۷. (الف) $d/(d-b)$؛ (ب) $\epsilon_۰ A/(d-b)$؛
(ج) $q^۲ b/۲A\epsilon_۰$، به داخل کشیده می‌شود.
۳۹. (الف) ۱۳٫۴kV/m؛ (ب) ۱۶nC؛ (ج) ۵٫۰۲nC.

مسئله‌ها

۵. (الف) ۴۵٫۴V؛ (ب) ۵۲٫۷μC؛ (ج) ۱۴۶μC.
۷. (الف) ۵۰V؛ (ب) صفر.
۹. (الف) $q_۱ = ۹٫۰\mu C$، $q_۲ = ۱۶\mu C$، $q_۳ = ۹٫۰\mu C$، $q_۴ = ۱۶\mu C$؛ (ب) $q_۱ = ۸٫۴۰\mu C$، $q_۲ = ۱۶٫۸\mu C$، $q_۳ = ۱۰٫۸\mu C$، $q_۴ = ۱۴٫۴\mu C$.
۱۱. (الف) ۲٫۰J.
۱۳. (الف) $e^۲/۳۲\pi^۲\epsilon_۰ r^۴$؛ (ب) $e^۲/۸\pi\epsilon_۰ R$؛
(ج) ۱٫۴۰fm. ۱۷. ۱٫۶۳kV.
۲۱. (الف) $۲\Delta V$؛ (ب) $U_i = \epsilon_۰ A(\Delta V)^۲/۲d$، $U_f = \epsilon_۰ A(\Delta V)^۲/d$؛ (ج) $\epsilon_۰ A(\Delta V)^۲/۲d$.
۲۳. (الف) ۸۵٫۶pF؛ (ب) ۱۱۹pF؛ (ج) ۱۰٫۳nC، ۱۰٫۳nC؛ (د) ۹٫۸۶kV/m؛ (ه) ۲٫۰۵kV/m؛ (و) ۸۶٫۶V؛ (ز) ۱۷۰nJ.

فصل ۳۱

تمرینها

۱. ۱۰٫۶kJ. ۳. ۱۳ ساعت ۳۸ دقیقه. ۵. −۱۰V.
۷. (الف) ۱۴Ω؛ (ب) ۳۵mW.
۹. (الف) ۴۴٫۲V؛ (ب) ۲۱٫۴V؛ (ج) چپ.
۱۱. $\mathscr{E}/۷R$. ۱۳. (الف) $i_۱ = ۶۶۸mA$، پایین، $i_۲ = ۸۵٫۷mA$، بالا، $i_۳ = ۵۸۲mA$، بالا؛ (ب) −۳٫۶۰.
۱۵. (الف) ۳٫۴A؛ (ب) ۰٫۲۹V و: (الف) ۰٫۵۹A؛ (ب) ۱٫۷۷V.
۱۷. ۴٫۰Ω، ۱۲Ω. ۱۹. ۷٫۵V.
۲۱. ۲۶۲Ω یا ۳۸٫۲Ω.
۲۳. (الف) ۱۳۱Ω؛ (ب) $i_۱ = ۴۷٫۵mA$، $i_۲ = ۲۱٫۲mA$، $i_۳ = ۱۴٫۴mA$، $i_۴ = ۱۱٫۹mA$.
۲۵. (الف) $R/۲$؛ (ب) $۵R/۸$. ۲۹. ۱۸kC.
۳۱. (الف) ۱٫۰۳kW؛ (ب) ۱۴۵۳ ریال.
۳۳. (الف) $R_۲$؛ (ب) $R_۱$.
۳۵. (الف) ۱۶۳۶۸ ریال؛ (ب) ۵۲۹Ω؛ (ج) ۴۳۵mA.
۳۷. (الف) $۲٫۸۸ \times ۱۰^{۱۱}$؛ (ب) ۲۴٫۰μA؛ (ج) ۱٫۱۴kW،
۲۳٫۱mW. ۳۹. (الف) ۶٫۱m؛ (ب) ۱۳m.
۴۳. ۴٫۶۱. ۴۵. (الف) ۲٫۲۰s؛ (ب) ۴۴mV.

۴۷. ۲٫۳۵MΩ. ۴۹. (الف) ۹۵۵nA؛ (ب) ۱٫۰۸μW؛
(ج) ۲٫۷۴μW؛ (د) ۳٫۸۲μW.

مسئله‌ها

۱. کابل. ۳. (الف) ۱٫۵kΩ؛ (ب) ۴۰۰mV؛ (ج) ۰٫۲۶٪.
۵. (الف) $\rho_A = ۱۶٫۳n\Omega \cdot m$، $\rho_B = ۷٫۴۸n\Omega \cdot m$؛
(ب) $j_A = j_B = ۶۲٫۳kA/cm^۲$؛ (ج) $E_A = ۱۰٫۲V/m$، $E_B = ۴٫۶۶V/m$؛ (د) $\Delta V_A = ۴۳۵V$، $\Delta V_B = ۱۹۵V$.
۷. (الف) $۳R/۴$؛ (ب) $۵R/۶$.
۹. (الف) موازی؛ (ب) ۷۲٫۰Ω، ۱۴۴Ω.
۱۱. ۰٫۴۵A. ۱۵. ۲۷٫۴cm/s.
۱۷. (الف) $۱٫۳۷L$؛ (ب) ۰٫۷۳۰A. ۱۹. $RC \ln ۲$.

فصل ۳۲

تمرینها

۱. ۱ : +، ۲ : −، ۳ : ۰، ۴ : −.
۳. (الف) ۳٫۴km/s. ۵. $۸٫۲ \times ۱۰^۹$.
۹. (الف) ۰٫۳۴mm؛ (ب) ۲٫۶keV.
۱۱. (الف) $۱٫۱۱ \times ۱۰^۷$m/s؛ (ب) ۰٫۳۱۶mm.
۱۳. (الف) ۲۶۰۰km/s؛ (ب) ۱۱۰ns؛ (ج) ۱۴۰keV.
(د) ۷۰kV.
۱۵. (الف) K_p؛ (ب) $K_p/۲$. ۱۷. (الف) $\sqrt{۲}r_p$؛ (ب) r_p.
۱۹. (الف) $۰٫۹۹۹۹۲۸c$. ۲۱. یک ذرهٔ آلفا.
۲۳. ≈ ۲۴۰m. ۲۵. ۳۷cm/s.
۲۹. ۴۶۷mA؛ از چپ به راست.
۳۱. (الف) ۳۳۰MA؛ (ب) $۱٫۱ \times ۱۰^{۱۷}$W.
۳۳. $(-۰٫۴۱۴N)\hat{k}$. ۳۵. (الف) صفر، ۰٫۱۳۸N، ۰٫۱۳۸N.
۳۷. (الف) ۲۰ دقیقه؛ (ب) ۰٫۰۵۹N·m.

مسئله‌ها

۱. $(۰٫۷۵T)\hat{k}$. ۳. (الف) به طرف شرق؛
(ب) $۶٫۲۷ \times ۱۰^{۱۴}m/s^۲$؛ (ج) ۲٫۹۸mm.
۷. (الف) $B\Delta x(qm/۲\Delta V)^{۱/۲}$؛ (ب) ۷٫۹۱mm.
۹. (الف) $-q$؛ (ب) $\pi m/qB$.
۱۱. (الف) ۷۸٫۶ns؛ (ب) ۹٫۱۶cm؛ (ج) ۳٫۲۰cm.
۱۵. ۴٫۲C. ۱۹. ۱٫۶۳A.

فصل ۳۳

تمرینها

۱. (الف) $۳ \times ۱۰^{۸}\mathrm{m/s}$. ۳. ۷٫۷mT. ۵. ۱۲nT.

۷. (الف) ۰٫۳۲۴fN، موازی با جریان؛ (ب) ۰٫۳۲۴fN، شعاعی به سمت خارج؛ (ج) صفر. ۹. ۰٫۳۰A، پادموازی.

۱۱. (الف) $۲٫۴۳\mathrm{A \cdot m^{۲}}$؛ (ب) ۴۶cm.

۱۳. $(\mu_{\circ} i\theta/۴\pi)(۱/b - ۱/a)$، به طرف خارج از صفحه.

۱۵. $(\mu_{\circ} i/۲\pi w)\ln(۱ + w/d)$، بالا.

۱۹. (الف) $۶۸\mu\mathrm{T}$؛ (ب) $۹٫۳ \times ۱۰^{-۷}\mathrm{N \cdot m}$.

۲۱. $۶۰۶\mu N$، به سمت مرکز مربع. ۲۳. (ب) ۲٫۳km/s.

۲۷. ۱۰۹m. ۳۱. (الف) $-۲٫۵\mu\mathrm{T \cdot m}$؛ (ب) صفر.

۳۳. (الف) $\mu_{\circ} ir/۲\pi c^{۲}$؛ (ب) $\mu_{\circ} i/۲\pi r$؛

(ج) $(\mu_{\circ} i/۲\pi r)[(a^{۲} - r^{۲})/(a^{۲} - b^{۲})]$؛ (د) صفر.

۳۵. $۸/\mu_{\circ}۳i$، به طرف داخل صفحه. ۳۷. (الف) منفی؛ (ب) ۹٫۷cm.

مسئله‌ها

۱. $۸N\mu_{\circ} i/۵\sqrt{۵}R$. ۵. (ج) $\frac{۱}{۲}nia^{۲}\sin(۲\pi/n)$.

۷. (الف) $(۲\mu_{\circ} i/۳\pi L)(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۱۰})$؛ (ب) بیشتر.

۹. ۰٫۲۷۲A. ۱۳. $\mu_{\circ} ir^{۲}/۲\pi a^{۳}$.

فصل ۳۴

تمرینها

۱. $۵۷\mu\mathrm{Wb}$. ۳. (الف) ۳۱mV؛ (ب) راست به چپ.

۵. (الف) $۱٫۱۲\mathrm{m\Omega}$؛ (ب) ۱٫۲۷T/s. ۷. (ب) ۵۸mA.

۹. $۴٫۹۷\mu\mathrm{W}$. ۱۱. (ب) نه. ۱۳. ۶۰۰nV.

۱۵. صفر. ۱۷. $iLBt/m$، به طرف دورتر از G.

۲۱. ۲۵μC. ۲۳. (الف) $(\mu_{\circ} ia/۲\pi)\ln(۱ + b/D)$؛

(ب) $\mu_{\circ} iabv/۲\pi RD(D + b)$. ۲۵. ۶٫۳rev/s.

۲۷. ۵٫۵kV. ۲۹. a: ‎−۱٫۲۰mV، b: ‎−۲٫۷۹mV،

c: ۱٫۵۹mV. ۳۱. (الف) $۴٫۵۳ \times ۱۰^{۷}\mathrm{m/s^{۲}}$، به سمت راست؛

(ب) صفر؛ (ج) $۴٫۵۳ \times ۱۰^{۷}\mathrm{m/s^{۲}}$، به طرف چپ.

۳۳. (الف) °۰٫۱۵.

مسئله‌ها

۱. (الف) $۲۸٫۲\mu\mathrm{V}$؛ (ب) از c به b.

۵. $۸۰\mu\mathrm{V}$، ساعتگرد. ۷. ۰٫۴۵۵V. ۱۱. $(Bar)^{۲}\omega\sigma t$.

۱۵. (الف) ۳۴V/m؛ (ب) $۶٫۰ \times ۱۰^{۱۲}\mathrm{m/s^{۲}}$.

فصل ۳۵

تمرینها

۱. $۱٫۲ \times ۱۰^{۹}\mathrm{A}$. ۳. (الف) $(-۲٫۸۶\mathrm{A \cdot m^{۲}})\hat{\mathrm{k}}$؛

(ب) $(۱٫۱۰\mathrm{A \cdot m^{۲}})\hat{\mathrm{k}}$. ۵. (ب) $ia^{۲}$. ۷. $۱/۲\pi i(a^{۲} + b^{۲})$.

۹. (الف) ۵۱۴GV/m؛ (ب) ۱۹٫۰mT. ۱۳. ۲۴mJ/T.

۱۵. ۰٫۵۸K. ۱۷. (الف) ۱۵۰T؛ (ب) ۴۵۰T.

۱۹. بله. ۲۱. (الف) $۳٫۰\mu\mathrm{T}$؛ (ب) $۹٫۰ \times ۱۰^{-۲۹}\mathrm{J}$.

۲۳. (الف) ۱۸۰km؛ (ب) $۲٫۳ \times ۱۰^{-۵}$. ۲۵. ۱۶۶۰km.

۲۷. $۶۱\mu\mathrm{T}$، °۸۴. ۲۹. ‎+۳Wb. ۳۱. $(\mu_{\circ} iL/\pi)\ln۳$.

مسئله‌ها

۳. (ب) K_{i}/B، برخلاف میدان؛ (ج) ۳۱۲A/m.

فصل ۳۶

تمرینها

۱. ۱۰۰nWb. ۳. ۰٫۲۶۱mH/m.

۵. (الف) ۰٫۶۰mH؛ (ب) ۱۲۰. ۷. ۷٫۸۷H. ۱۱. $۲۹٫۸\Omega$.

۱۳. (الف) ۴٫۷۸mH؛ (ب) ۲٫۴۲ms. ۱۵. $۴۲\mathrm{V} + (۲۰\mathrm{V/s})t$.

۱۷. ۱۲A/s. ۱۹. (الف) $i_{۱} = i_{۲} = ۳٫۳۳\mathrm{A}$؛ (ب) $i_{۱} = ۴٫۵۵\mathrm{A}$،

$i_{۲} = ۲٫۷۳\mathrm{A}$؛ (ج) $i_{۱} = ۰$، $i_{۲} = ۱٫۸۲\mathrm{A}$؛ (د) $i_{۱} = i_{۲} = ۰$.

۲۱. I. (الف) ۲٫۰A؛ (ب) صفر؛ (ج) ۲٫۰A؛ (د) صفر؛

(ه) ۱۰V؛ (و) ۲٫۰A/s؛ II. (الف) ۲٫۰A؛ (ب) ۱٫۰A؛

(ج) ۳٫۰A؛ (د) ۱۰V؛ (ه) صفر؛ (و) صفر.

۲۳. (الف) ۱۳٫۲H؛ (ب) ۰٫۱۲۴A. ۲۵. $۶۳٫۲\mathrm{MJ/m^{۳}}$.

۲۷. ۱۵۰MV/m. ۲۹. (الف) ۱۱۷H؛ (ب) ۰٫۲۲۵mJ.

۳۱. $۱۲ \times ۱۰^{۱۵}\mathrm{J}$. ۳۳. ۰٫۱۲۳A. ۳۵. ۰٫۰۳۸mH.

۳۹. (الف) ۸۹٫۳rad/s؛ (ب) ۷۰٫۳ms؛ (ج) $۲۴٫۱\mu\mathrm{F}$.

۴۱. (الف) $۶٫۰۸\mu\mathrm{s}$؛ (ب) ۱۶۴kHz؛ (ج) $۳٫۰۴\mu\mathrm{s}$.

۴۳. (الف) نه؛ (ب) ۶٫۱kHz؛ (ج) ۱۶nF.

۴۵. (الف) ۵۸۰۰rad/s؛ (ب) ۱٫۱ms.

۴۷. (الف) $q_m/\sqrt{۳}$؛ (ب) $t/T = ۰٫۱۵۲$.

۴۹. (الف) ۱ : ۶٫۰؛ (ب) ۳۶pF، $۲۲۰\mu\mathrm{H}$.

۵۱. (الف) $۱۸۰\mu\mathrm{C}$؛ (ب) $T/۸$؛ (ج) ۶۷W.

۵۳. $(L/R)\ln۲$. ۵۵. $۲٫۹۶\Omega$.

مسئله‌ها

۹. (الف) $\mu_{\circ} i^{۲}N^{۲}/۸\pi^{۲}r^{۲}$؛ (ب) $(\mu_{\circ} N^{۲}hi^{۲}/۴\pi)\ln(b/a)$.

۱۳. (الف) صفر؛ (ب) $۲i$.

فصل ۳۷

تمرینها

۱. ۳۷۷rad/s. ۳. (الف) ۳۷۵۰rad/s؛ (ب) ۲۳٫۴Ω.
۵. (الف) ۳۹٫۱mA؛ (ب) صفر؛ (ج) ۳۲٫۶mA؛
(د) تأمین انرژی. ۱۱. ۱٫۰kV $(> \mathscr{E}_m)$.
۱۳. (الف) ۳۶٫۰V؛ (ب) ۲۷٫۴V؛ (ج) ۱۷٫۰V؛ (د) ۸٫۴V.
۱۵. (الف) ۳۹٫۱Ω؛ (ب) ۲۱٫۷Ω؛ (ج) خازنی.
۱۷. ۱۷۷Ω. ۱۹. (الف) ۱٫۸۲W؛ (ب) ۳٫۱۳W.
۲۱. ۱۰۰V. ۲۵. (الف) ۲٫۴۹A؛ (ب) ۴، ۳۷٫۴، ۱۵۳، ۲۱۸، ۰٫۶۵، ۰٫۷۵ ولت؛ (ج) $P_C = p_L = ۰$، $P_R = ۹۳٫۰\text{W}$.
۲۷. ۱٫۸kV. ۲۹. فزاینده: ۵، ۴، ۱٫۲۵ کاهنده: ۰٫۸، ۰٫۲۵، ۰٫۲.
۳۱. ۴۰V.

مسئله‌ها

۱. (الف) ۶٫۷۳ms؛ (ب) ۱۱٫۲ms؛ (ج) القایی؛ (د) ۱۴۴mH.
۳. (الف) °۴۵؛ (ب) ۷۶٫۰Ω.
۷. (الف) ۲۲۹٫۰rad/s؛ (ب) ۶٫۱۱A؛ (ج) ۲۲۴٫۵rad/s، ۲۳۳٫۵؛ (د) ۰٫۰۳۹.
۹. (الف) ۴۱٫۲W؛ (ب) ۱۶٫۹W−؛ (ج) ۴۳٫۷W؛ (د) ۱۴٫۳W.
۱۱. (الف) ۷۶٫۴mH؛ (ب) ۱۷٫۸Ω.

فصل ۳۸

تمرینها

۱. ۱۰cm و $r = ۲٫۵\text{cm}$. ۳. پتانسیل بین صفحه‌ها را با آهنگ ۱٫۰kV/s تغییر می‌دهیم. ۵. (الف) ۱٫۸۴A؛ (ب) ۱۴۰GV/m·s؛
(ج) ۴۶۰mA؛ (د) ۵۷۸nT · m.
۷. (الف) ۰٫۸۴A؛ (ب) صفر؛ (ج) ۱٫۳A. ۹. ۲٫۲۷pT.
۱۵. $۵٫۰ \times ۱۰^{-۲۱}\text{H}$. ۱۷. ۱٫۰۷pT. ۲۱. ۱۰۰kJ.
۲۳. $۴٫۶۲ \times ۱۰^{-۲۹}\text{W/m}^۲$.
۲۵. ۷۸cm. ۲۷. (الف) ۸۸۳m؛ (ب) نه.
۲۹. (الف) ۶٫۵۳nT؛ (ب) $۵٫۱۰\text{mW/m}^۲$؛ (ج) ۸٫۰۴W.
۳۱. (الف) ۷۶٫۸mV/m؛ (ب) ۲۵۶pT؛ (ج) ۱۲٫۶kW.
۳۳. ۰٫۰۴۳kg · m/s. ۳۵. ۷٫۷MPa.
۳۷. (الف) ۵۸۶MN؛ (ب) $۱٫۶۶ \times ۱۰^{-۱۴}$.
۳۹. $I(۲ - f)/c$. ۴۳. ۴۹۰nm.

مسئله‌ها

۳. (الف) ۷٫۶۳μA؛ (ب) ۸۶۲kV · m/s؛ (ج) ۳٫۴۸mm؛
(د) ۵٫۰۷pT. ۵. (الف) $\pm Eba^۲/\mu_۰$ برای وجه‌های موازی با صفحه xy، صفر برای هر یک از چهار وجه دیگر؛ (ب) صفر.
۹. (الف) $E_\text{m} = cB_m$، $\omega/k = c$؛
(ب) $S = (E_\text{m}^۲/۴\mu_۰ c)\sin ۲\omega t \sin ۲kx$.
۱۱. (الف) $E = \mathscr{E}/r\ln(b/a)$، $B = \mu_۰\mathscr{E}/۲\pi Rr$؛
(ب) $S = \mathscr{E}^۲/۲\pi Rr^۲\ln(b/a)$.
۱۳. (الف) ۹۴٫۳MHz؛ (ب) ۹۶۰nT، $+z$؛
(ج) $۱٫۹۸\text{m}^{-۱}$، ۵۹۳Mrad/s؛ (د) $۱۱۰\text{W/m}^۲$؛
(هـ) ۶۷۸nN؛ ۳۶۷nPa.
۱۵. (الف) $۳٫۶۰\text{GW/m}^۲$؛ (ب) ۱۲٫۰Pa؛ (ج) ۱۶٫۷pN؛
(د) $۲٫۷۸\text{km/s}^۲$.

نمایه

مرکز نشر دانشگاهی
www.iup.ir

در ویراست اخیر این کتاب درسی شناخته شده با ارائهٔ مثالهای عملی بیشتر تلاش شده است، بی آنکه به سطح درس یا جدی بودن محتوای آن آسیبی برسد، قابل فهم بودن مطالب آن برای دانشجویان افزایش یابد. برای این منظور، با استفاده از پژوهشهای آموزش فیزیک، بسیاری از مطالب ویراست قبلی بازنویسی یا بازآرایی شده‌اند تا متن درسیِ جذاب‌تر، مفیدتر، و زودیاب‌تری در اختیار دانشجویان و مدرسان قرار بگیرد.

ISBN : 978-964-01-1345-5



RESNICK

Physics

lume 3